



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

~~Sci 880.48~~
Period. Shelves

Bound

18 1906



Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

SCIENCE CENTER LIBRARY

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

34030 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quel des Grands Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-DEUXIÈME. — ANNÉE 1904.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.
—
1904

107-7

8282.48

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1904 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MANNHEIM. NITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.
----------------------------------	---

Président.....	MM. CARVALLO.
Vice-Présidents	BIOCHE. BLUTEL. BOREL. HADAMARD.
Secrétaires	BRICARD. GRÉVY.
Vice-Secrétaires.....	LEAU. SERVANT.
Archiviste.....	RAFFY.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	ANDOYER, 1907. ANDRÉ, 1907. FOURET, 1907. GOURSAT, 1905. KOENIGS, 1906. LAISANT, 1905. LECORNU, 1906. LEVY (L.), 1905. D'OCAGNE, 1905. PAINLEVÉ, 1907. PERRIN (R.), 1906. TOUCHE, 1906.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17^e).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig.
1893. **ADAM** (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris (7^e).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, 121, boulevard de la Liberté, à Lille (Nord).
1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5^e).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, 1, rue de la Mouillière, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6^e).
1901. **ANGIBOUST**, rue d'Assas, 104, à Paris (6^e).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6^e).
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, place Vaucanson, 4, à Grenoble (Isère).
1900. **AURIC**, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1900. **BAIRE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1896. **BAKER**, professeur à l'Université, Toronto (Canada).
1894. **BALITRAND**, ingénieur à Mélaoui (Tunisie).
1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 23, à Paris (7^e).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), inspecteur général du génie maritime en réserve, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888. **BIÛCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e).
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9^e).
1898. **BLAKE** (Edwin-M.), 1910, Addison street, à Berkeley, Californie (U. S. A.).
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), docteur en philosophie, Herzberger chaussée, 49, à Göttingen.
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, maître de conférences à la Sorbonne, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16^e).
1895. **BOREL**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, 2, boulevard Arago, à Paris (13^e).
1896. **BOULANGER**, maître de conférences à l'Université, rue Caumartin, 80, à Lille (Nord).
1896. **BOURGET** (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. **BOURLET**, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14^e).
1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44 (6^e).
1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14^e).
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.
1901. **BUHL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, 4, rue de Villefranche, à Montpellier (Hérault).

Date
de
l'admission.

1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).
1897. **CABREIRA**, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.
1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, 32, rue de la Pompe, à Paris (16°).
1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16°).
1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris (17°).
1896. **CANTAN**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.
1887. **CARVALLO**, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5°).
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny, née de Lagerborg), Unionsgatan, 4, à Helsingfors.
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).
1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, Piazza S. Pietro in Vincoli, 5, à Rome (Italie).
1888. **CHAILAN** (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5°).
1893. **CHARLIAT**, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris (10°).
1896. **CHARTE**, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1881. **CHENIN**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris (8°).
1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. **CLAIRIN**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de l'Université, 57 *bis*, rue Jacquemars-Gielée, à Lille (Nord).
1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9°).
1890. **COLOT**, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1898. **COMBESIAU**, capitaine du génie, docteur ès sciences, à Limoges.
1900. **CONTE** (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).
1896. **COSSERAT** (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
1896. **COSSERAT** (F.), ingén. en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10°).
1900. **COTTON** (Émile), maître de conférences à l'Université de Grenoble.
1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5°).
1885. **DAUTHVILLE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1882. **DELANNAY**, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1901. **DELAUNAY**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue Alsace-Lorraine, 39, à Grenoble (Isère).
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.
1899. **DELENER**, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille (Nord).
1885. **DEWARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).
1897. **DENIS** (Henry), élève libre à l'École d'application du Génie maritime, rue de Fleury, 23, à Paris (6°).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
1900. **DICKSTEIN**, 117, Marszałkowska, Varsovie.
1902. **DIEGUEZ** (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3°, à La Corogne (Espagne).
1899. **DRACH** (Jules), chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue Bourbeau, 2, à Poitiers.

Date
de
l'admission.

1896. DUMAS (G.), licencié ès sciences, à Gland, canton de Vaud (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. DUNCAN, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1897. DURAN-LORIGA, command. d'artillerie, 20, plaza de Maria Pita, à la Corogne (Espagne).
1885. DYCK (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).
1902. EGOROFF (Dimitri), professeur à l'Université de Moscou, rue Palianka, Institut des Maîtres.
1903. ESPANET, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5°).
1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5°).
1900. ESTIENNE, capitaine au 19^e régiment d'artillerie, à Nice.
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, ingénieur aux Forges de Denain (Nord).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier (Hérault).
1891. FAUQUENBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1892. FERR (Henri), professeur à l'Université, rue Gevray, 19, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, 21, Liberty Str., à Hamilton (Canada).
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. FONTANEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, boulevard de Clichy, 6, à Paris (18°).
1891. FONTVIOLANT (DE), profes. à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil (16°).
1903. FORD WALTER, professeur à l'Université de Michigan, rue Notre-Dame-des-Champs, 99, à Paris (6°).
1889. FOUCHE, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°).
1903. FRAÏSSÉ, agrégé de l'Université, rue Vavin, 10 bis, à Paris (6°).
1892. FROLOV (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1903. FUETER, rue Berthollet, 2, à Paris (5°).
1900. GALDEANO (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse.
1872. GARIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).
1896. GAUTHIER-VILLARS, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7°).
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. GERBANS, professeur à Worcester College, Saint-John Street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. GIRARDVILLE, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1903. GODEY, rue du Bois-de-Boulogne, 6, à Paris (16°).
1881. GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 270, à Paris (14°).
1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).

Date
de
l'admission.

1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Saint-Placide, 62, à Paris (6°).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 210 bis, à Paris (7°).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1900. GUCHARD, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1891. GUIMARAES, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris (7°).
1873. HAAG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16°).
1882. HABICH, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. HADANARD, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14°).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1901. HANCOCK (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1900. HARDEL, élève ingénieur à l'École des Ponts et Chaussées, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-Inférieure).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°).
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1893. HIOUX, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1900. HOFFBAUER, ancien lieutenant d'art., rue du Châtelet, 22, à Fontenay-sous-Bois (Seine).
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), professeur à l'École S^{te}-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15°).
1880. HUMBERT, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, 33, boulevard Voltaire, à Paris (11°).
1903. L'ABBÉ ISSALY, rue Poquelin-Molière, 9, à Bordeaux.
1896. JACQUET (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. JAHNKE, privat docent à l'École Polytechnique de Charlottenburg, Ludwigskirstrasse, à Berlin W¹⁵ (Allemagne).
1898. JARRY (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12°).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5°).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°).
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue de l'Estrapade, 20, à Paris (5°).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1890. KOBÉ (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. KOCH (H. von), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).

Date
de
l'admission.

1897. **LACAUCHE**, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9°).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16°).
1893. **LANCELIN**, astronome adjoint de l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. **LANDAU** (Edmond), privat-docent à l'Université, Sommerstrasse, 2, Berlin, N. W.
1896. **LAROSE**, ingénieur des télégraphes, cité Martignac, 5, à Paris (7°).
1896. **LAUGEL**, ancien attaché d'ambassade, villa des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Maritimes).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6°).
1880. **LEAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°).
1896. **LEBEL**, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier.
1902. **LEBESGUE**, docteur ès sciences, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue Pougirard, 4, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1903. **LEBEUF**, directeur de l'observatoire de Besançon.
1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. **LÉNÉRAY**, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, rue Ville-ès-Martin, 109 bis, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 4, à Paris (15°).
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, rue Notre-Dame-des-Champs, 27, à Paris (6°).
1891. **LERY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. **LESPIAULT**, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6°).
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16°).
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Nylandsgatan, 15, à Helsingfors.
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. **LILOVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4°).
1900. **LOVETT** (E.-O.), professeur à Princeton University, New-Jersey (États-Unis).
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, ing^r des manufactures de l'État, Manufacture des Tabacs, à Châteauroux.
1902. **LUCAS DE PESLOCAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Marbeuf, 8, à Paris (8°).
1886. **LYON**, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5°).
1895. **MAILLET**, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).

Date
de
l'admission.

1872. **MANNHEIM**, colonel d'artillerie en retraite, professeur honoraire à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (16°).
1903. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 bis, à Paris (12°).
1884. **MARTIN** (Artemas), 915, N. W., à Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5°).
1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, rue Maruix, 22, à Gand (Belgique).
1894. **MAUPIN**, professeur au collège, rue de l'Arceau, 30, à Saintes (Charente-Inférieure).
1897. **MERHKE**, professeur à l'École technique supérieure, Woisseinburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. **MERCEBEAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7°).
1902. **MERLIN** (E.), avenue Négrié, 46, à Forest-lès-Bruxelles (Belgique).
1902. **MESXY** (R.), enseigne de vaisseau, rue de la Rampe, 4, à Brest.
1893. **NICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, rue Perdonnet, 12, à Paris (10°).
1899. **MILLER** (D^r G.-A.), professeur à Stanford University, Californie (États-Unis).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1897. **MONTCEUIL** (l'abbé DE), rue du Vieux-Raisin, 11, à Toulouse (Haute-Garonne).
1898. **MONTESUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).
1903. **MULLER** (J.-O.), rue Berthollet, 6, Paris (5°).
1898. **NAUD** (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris (6°).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).
1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Université, rue de l'Arbalète, 35 (5°).
1882. **OCAGNE** (M. V'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8°).
1873. **OVIDIO** (Enrico V'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), professeur à l'Université, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, maître de conférences à l'École Normale supérieure, répétiteur à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6°).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1900. **PERCHOT**, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, avenue de l'Observatoire, 1 (5°).
1874. **PERCIN**, général de brigade, chef du cabinet du ministre de la guerre.
1881. **PERROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des mines, avenue d'Eylau, 9, à Paris (16°).
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17°).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).
1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Sabalkansky prospect, 17, log. 15, à Saint-Petersbourg.

Date
de
l'admission.

1887. **PEZZO** (DELL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6°).
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1896. **PIÉRON**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris (6°).
1899. **PIERPONT** (James), prof. de l'Université Yale, 42, Mansfield st., New Haven, Connecticut (États-Unis).
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63 (5°).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université de Munich, 12, Arcisstrasse.
1896. **PRUVOST**, inspecteur général de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
1872. **PUTZ**, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau.
1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue Laffitte, 17, à Paris (9°).
1898. **RABUT** (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. **RABAU**, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris (6°).
1883. **RAFFY**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris (5°).
1903. **REMOUNDOS**, agrégé de l'Université d'Athènes, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1900. **RENARD**, rue de la Tour, 7, à Paris (16°).
1903. **RICHARD**, professeur au lycée de Dijon, place du Rosaire, 1, à Dijon.
1893. **RIVÉREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, rue Madame, 69, à Paris (6°).
1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8°).
1872. **ROUCHÉ**, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard St-Germain, 213, à Paris (7°).
1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).
1900. **SALTYKOW**, maître ès sciences mathématiques, professeur à l'Institut Polytechnique à Tomsk (Russie).
1872. **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mande (Seine).
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL**, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. **SCHOOTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉQUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7°).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7°).
1900. **SPARRE** (comte Magnus DE), château de Vallière, à St-Georges-de-Reneins (Rhône).
1881. **STANKOFF**, Maximilianovskiy pereonlok, 19, log. 12, à Saint-Petersbourg (Russie).
1879. **STEPHANOS** (D' Cyparissos), professeur à l'Université à Athènes (Grèce).

Date
de
l'admission.

1901. STETSON (Orlando), à Franklin (Massachusetts).
1898. STÖRNER (Carl), professeur à l'Université, Holtegaden, 14, à Christiania.
1903. SUCHAR, docteur ès sciences, rue Lafayette, 60, à Paris.
1872. SYLW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1896. TANNENBERG (DE), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1872. TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Pantin (Seine).
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1882. TARRY (Gaston), rue d'Isly, 19, à Alger (Algérie).
1897. TARRY (Harold), inspecteur des finances en retraite, à Kouba (Algérie).
1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, avenue Léonie, 1, à Saint-Cloud (S.-et-O.).
1899. THYBAUT (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue du Rocher, 101, à Paris (8^e).
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. TISSOT, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. TORRES, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17^e).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1896. TRESSE, doct. ès sciences, prof. au collège Rollin, rue Caulaincourt, 20, à Paris (18^e).
1893. VALLÉE-POUSSIN (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), docteur de l'Université, rue Polyclète, 5, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, chemin des Granges, 45, à Lyon (Rhône).
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université de Rome, via Lucina, 11.
1900. VOIBERT, éditeur, 63, boulevard Saint-Germain (5^e).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris (16^e).
1880. WALCKENAER, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7^e).
1879. WEILL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8^e).
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8^e).
1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Zuamenkaja, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).
1903. ZERVOS, docteur de l'Université d'Athènes, rue Claude-Bernard, 25, à Paris (5^e).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Rosenvonget, Saint-Kannikestræde, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, South Ingalls street, 644, Ann Arbor (Michigan) (Etats-Unis).
1902. ZOUKIS (Aristide), professeur à l'École militaire des Evelpides, rue Scoufa, 6, à Athènes.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

ACKERMANN-VOUINER, à Leipzig. — BENOIST (décédé). — BERDELLÉ, à Rioz. — BIENAYNE (décédé). — BIOCHE, à Paris. — BISCHOFFSHEIM, à Paris. — DOBERIL (vicomte R. de), à Rennes. — BORCHARDT (décédé). — BOREL, à Paris. — BROCARD, à Bar-le-Duc. — CANET, à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHARLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris. — COTTON, à Grenoble. — FOURET, à Paris. — GAUTHIER-VILLARS (décédé). — GOURSAT, à Paris. — HALPHEN (décédé). — HALSTED, à Amatin. — HADAMARD, à Paris. — HATON DE LA GOUILLIÈRE, à Paris. — HERMITE (décédé). — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — JORDAN, à Paris. — LAFFON DE LADÉBAT (décédé). — LÉAUTÉ, à Paris. — MAILLET, à Bourg-M-Reine. — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico. — MERCEREAU, à Paris. — D'OCAGNE, à Paris. — PEROTT, à Worcester. — PERRIN, à Paris. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC (prince C. de), à Cannes. — RAFFY, à Paris. — SALTYKOW, à Tomsk. — SÉLIVANOFF, à Saint-Petersbourg. — SPANRE (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — SYLOW, à Frederikshald. — TANNENY (Paul), à Paris. — TARRY (G.), à Alger. — TCHENICHEFF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

AN.		AN.	
1873	CHARLES.	1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1890	HATON DE LA GOUILLIÈRE.
1875	BIENAYNÉ.	1891	COLLIGNON.
1876	DE LA COURNERIE.	1892	VICAIRE.
1877	MANNHEIM.	1893	HUMBERT.
1878	DARBOUX.	1894	PICQUET.
1879	O. BONNET.	1895	GOURSAT.
1880	JORDAN.	1896	KÉNIGS.
1881	LAGUERRE.	1897	PICARD.
1882	HALPHEN.	1898	LECORNU.
1883	ROUCHÉ.	1899	GUYOU.
1884	PICARD.	1900	POINCARÉ.
1885	APPELL.	1901	D'OCAGNE.
1886	POINCARÉ.	1902	RAFFY.
1887	FOURET.	1903	PAINLEVÉ.
1888	LAISANT.		

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Hollande.
Baltimore.....	Johns Hopkins University.	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coimbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Göttingen.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences, à l'Université.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Alzate.	Mexique.

Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	<i>American mathematical Society.</i>	États-Unis.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	Bibliothèque de la Sorbonne.	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca Mathematica.</i>	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. BRIGARD, boulevard Raspail, 295, Paris, 14^e;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXII. — FASCICULE I.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1904

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*, banquier, rue de Trévis, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Bricard.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages** de texte imprimé.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tarrar Fund

SUR LE THÉORÈME DE M. JENSEN;

Par M. G. MITTAG-LEFFLER.

M. Goursat vient de publier (*Bull. des Sciences math.*, octobre 1902) une nouvelle démonstration du théorème de M. Jensen (*Acta math.*, t. XXII), qui rattache ce théorème au théorème fondamental de Cauchy. J'ai employé dans mon enseignement une démonstration analogue qui paraît plus directe.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour fermé S , comprenant dans son intérieur le point x sur lequel nous faisons, pour simplifier, la supposition qu'il ne sera ni un zéro ni un pôle. Supposons encore, pour simplifier, que $f(z)$ soit holomorphe et différent de zéro sur le contour même. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les zéros de $f(z)$ intérieurs au contour, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité, et $b_1, b_2, \dots, b_m$ les pôles de $f(z)$ intérieurs à S , chacun d'eux étant encore compté avec son degré de multiplicité.

Je me propose d'évaluer l'intégrale

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z-x} dz$$

prise le long du contour S dans le sens direct. Je suppose que la variable part d'un point A sur le contour, $\log f(z)$ ayant une valeur initiale déterminée. Je considère le contour fermé $\bar{S}$ formé de la courbe S , des circonférences c_v, k_v , de rayon ε , ayant pour centres les différents points a_v, b_v , et des lignes infiniment voisines tracées de part et d'autre d'un nombre de lignes situées entièrement à l'intérieur de S et reliant chacune un des points a_v et b_v avec le point A , en laissant les autres points a_v, b_v , ainsi que les points x , en dehors.

La fonction $\log f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour $\bar{S}$.
En lui appliquant le théorème de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^n \left[\int_{\alpha_v}^{\alpha'_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{c_v}^{\alpha'_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{\alpha'_v}^{\Lambda} \frac{\log f(z) + 2\pi i}{z-x} dz \right] \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{v=1}^m \left[\int_{\Lambda}^{\beta'_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{\beta'_v}^{k_v} \frac{\log f(z)}{z-x} dz + \int_{\beta'_v}^{\Lambda} \frac{\log f(z) + 2\pi i}{z-x} dz \right] \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \log f(x), \end{aligned}$$

α'_v et β'_v étant des points sur les circonférences c_v et k_v . En allant à la limite zéro avec ϵ et en observant que les intégrales $\int_{c_v}$, $\int_{k_v}$ deviennent alors zéro, on obtient

$$\sum_{v=1}^n \int_{\alpha_v}^{\Lambda} \frac{dz}{z-x} + \sum_{v=1}^m \int_{\beta_v}^{\Lambda} \frac{dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \log f(x).$$

On en tire

$$(2) \quad \log f(x) = \sum_{v=1}^n \log \frac{\alpha_v - x}{\Lambda - x} - \sum_{\mu=1}^m \log \frac{\beta_{\mu} - x}{\Lambda - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z-x} dz.$$

Il s'ensuit

$$(3) \quad f(x) = \frac{(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)}{(b_1 - x)(b_2 - x) \dots (b_m - x)} (\Lambda - x)^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z-x} dz}$$

et encore, en faisant $z - x = re^{i\theta}$ et en supposant que S soit un cercle de rayon r , ayant pour centre le point x ,

$$(4) \quad |f(x)| = \frac{|a_1 - x| |a_2 - x| \dots |a_n - x|}{|b_1 - x| |b_2 - x| \dots |b_m - x|} r^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\theta}.$$

Cette dernière formule devient celle de M. Jensen si l'on y fait $x = 0$.

On a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z} \right) dz.$$

En faisant dans la formule (3) $x = 0$ et en supposant que ce

point ne soit ni un zéro ni un pôle, on obtient

$$(5) \quad f(0) = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m} A^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz}.$$

En divisant (3) par (5), on obtient donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(0) \frac{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)}{\left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \left(1 - \frac{x}{b_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{b_m}\right)} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{x}{A}\right)^{m-n} e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right) dz}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule peut facilement être généralisée en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz + \frac{x}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^2} dz + \dots \\ &\quad + \frac{x^p}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^{p+1}} dz + \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^{p+1} dz \end{aligned}$$

et, en appliquant aux différentes intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^2} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^3} dz, \quad \dots, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z^{p+1}} dz$$

le même procédé que nous avons employé auparavant pour les intégrales

$$\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} dz, \quad \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z} dz,$$

on obtient alors la formule

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{\log f(0)}{1} + \frac{D \log f(0)}{1} x + \dots + \frac{D^p \log f(0)}{p!} x^p} \\ &\quad \times \frac{\prod_{v=1}^n E\left(\frac{x}{a_v}, p\right)}{\prod_{v=1}^m E\left(\frac{x}{a_v}, p\right)} E\left(\frac{x}{A}, p\right) e^{\frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{\log f(z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^{p+1} dz} \end{aligned} \right.$$

en ayant posé

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} E(z, p) &= (1-z) e^{\frac{1}{2} z^2 + \dots + \frac{1}{p} z^p} \\ E(z, 0) &= 1-z. \end{aligned} \right.$$

La formule (7) doit être mise à côté d'une autre qu'on obtient en partant de l'égalité (1)

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{f'(0)}{f(0)} + D \frac{f'(0)}{f(0)} \frac{x}{1} + \dots \\ &+ D^{(p-1)} \frac{f'(0)}{f(0)} \frac{x^{p-1}}{p-1} + \sum_{v=1}^n \frac{1}{x-a_v} \left(\frac{x}{a_v}\right)^p \\ &- \sum_{v=1}^m \frac{1}{x-b_v} \left(\frac{x}{b_v}\right)^p + \frac{1}{2\pi i} \int^s \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{1}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^p dz. \end{aligned} \right.$$

En faisant l'intégration par rapport à x , et en observant que

$$\begin{aligned} &\int^s \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\int_0^x \frac{1}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^p dx \right] dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int^s \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\log\left(1-\frac{x}{z}\right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z}\right)^p \right] dz, \end{aligned}$$

on obtient

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= e^{\log f(0) + \frac{D \log f(0)}{1} x + \dots + \frac{D^p \log f(0)}{p} x^p} \\ &\times \frac{\prod_{v=1}^n E\left(\frac{x}{a_v}, p\right)}{\prod_{v=1}^m E\left(\frac{x}{b_v}, p\right)} e^{-\frac{1}{2\pi i} \int^s \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\log\left(1-\frac{x}{z}\right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z}\right)^p \right] dz}. \end{aligned} \right.$$

On revient immédiatement de la formule (10) à la formule (7) en intégrant

$$\int^s \frac{f'(z)}{f(z)} \left[\log\left(1-\frac{x}{z}\right) + \frac{x}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{x}{z}\right)^p \right] dz$$

par parties.

(1) Voir ma Note aux *Comptes rendus*, 20 février 1882.

RECHERCHES SUR LA DIVISIBILITÉ DU NOMBRE $\frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$
PAR LES PUISSANCES DE LA FACTORIELLE $1.2 \dots n$;

Par M. C. DE POLIGNAC.

§ 1.

Avant d'entrer en matières, rappelons quelques résultats bien connus.

Désignant par $\left[\frac{a}{b} \right]$ le quotient entier de la division de a par b , notation usitée par Lejeune-Dirichlet, et appelant e l'exposant de la plus haute puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans le produit $1.2.3 \dots x$, en sorte que ce produit est supposé divisible par p^e , mais non par p^{e+1} , on a la formule classique

$$e = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right].$$

La limite $i = \infty$ est symbolique; elle se justifie en remarquant que, dès que $p^i > x$, on a $\left[\frac{x}{p^i} \right] = 0$.

De plus, on a toujours

$$\left[\left[\frac{x}{a} \right] \frac{a}{b} \right] = \left[\frac{x}{ab} \right] \quad (1).$$

Il en résulte

$$\left[\frac{x}{p^2} \right] = \left[\left[\frac{x}{p} \right] \frac{1}{p} \right]; \quad \left[\frac{x}{p^3} \right] = \left[\left[\left[\frac{x}{p} \right] \frac{1}{p} \right] \frac{1}{p} \right], \dots$$

Par suite, si l'on écrit,

$$\begin{aligned} x &= pq_1 + r_1 \quad \left(r_1 < p, \quad q_1 = \left[\frac{x}{p} \right] \right), \\ q_1 &= pq_2 + r_2 \quad \left(r_2 < p, \quad q_2 = \left[\frac{q_1}{p} \right] = \left[\frac{x}{p^2} \right] \right), \\ q_2 &= pq_3 + r_3 \quad \left(r_3 < p, \quad q_3 = \left[\frac{q_2}{p} \right] = \left[\frac{x}{p^3} \right] \right), \dots \end{aligned}$$

(1) Voir, entre autres, LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlentheorie*, § 15, édition 1863.

on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right] = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

Cela posé, je commencerai par démontrer trois propositions :

Soit x un nombre entier écrit dans le système de numération dont la base est le nombre premier p , en sorte que

$$x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

avec $a < p$ à un rang quelconque.

Désignons par $\sum x$ la somme des chiffres de x :

$$\sum x = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

PROPOSITION 1. — L'exposant de la plus haute puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans le pro-

duit $1.2.3\dots x$ est $\frac{x - \sum x}{p - 1}$.

Démonstration. — D'après ce qui précède, il suffira d'établir l'égalité

$$\frac{x - \sum x}{p - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right].$$

Conservant les notations adoptées ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} q_1 &= a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1 = \left[\frac{x}{p} \right], \\ \left[\frac{q_1}{p} \right] = q_2 &= a_n p^{n-2} + a_{n-1} p^{n-3} + \dots + a_2 = \left[\frac{x}{p^2} \right], \\ \left[\frac{q_2}{p} \right] = q_3 &= a_n p^{n-3} + a_{n-1} p^{n-4} + \dots + a_2 = \left[\frac{x}{p^3} \right], \\ &\dots\dots\dots \\ \left[\frac{q_{n-2}}{p} \right] = q_{n-1} &= a_n p + a_{n-1} = \left[\frac{x}{p^{n-1}} \right], \\ \left[\frac{q_{n-1}}{p} \right] = q_n &= a_n = \left[\frac{x}{p^n} \right], \\ \left[\frac{q_n}{p} \right] = q_{n+1} &= 0 = \left[\frac{x}{p^{n+1}} \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Chaque colonne de ce Tableau se compose de termes en progression géométrique. Faisant donc la sommation par colonnes et introduisant pour la symétrie le terme nul $\frac{a_0 - a_0}{p-1}$, il vient

$$\frac{a_n(p^n-1) + a_{n-1}(p^{n-1}-1) + \dots + a_3(p^3-1) + a_2(p^2-1) + a_1(p-1) + a_0 - a_0}{p-1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right],$$

c'est-à-dire, d'après nos notations,

$$\frac{x - \sum x}{p-1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\frac{x}{p^i} \right]. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

PROPOSITION 2. — Soit n un second nombre entier écrit dans le système numérique de base p ; faisant l'addition $x + n$, on aura

$$\sum (x + n) = \sum x + \sum n - k(p-1),$$

où k désigne le nombre total d'unités que, dans l'addition, on est amené à reporter d'une colonne à la suivante.

Démonstration.

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots & a < p, \\ n &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots & b < p. \end{aligned}$$

L'addition, membre à membre, donne

$$\begin{array}{r|l|l|l} x + n & = a_0 + a_1 & \left| \begin{array}{l} p + a_2 \\ + b_2 \end{array} \right| & p^2 + \dots + a_m \\ & + b_0 + b_1 & & + b_m \end{array} \left| \begin{array}{l} p^m \\ \\ \end{array} \right| p^m,$$

expression dans laquelle il faut ramener dans chaque colonne la somme des deux chiffres à un nombre inférieur à p . Ces réductions faites, on obtiendra

$$x + n = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots \quad (c_i < p).$$

Comparons ces deux expressions.

Comme dans la première, chacun des deux chiffres a_i , b_i d'une colonne quelconque est moindre que p , leur somme est moindre que $2p$. On a même partout

$$a_i + b_i + 1 < 2p,$$

puisque le maximum est $p-1 + p-1 + 1 = 2p-1$. D'après

cette remarque, on peut composer de proche en proche le Tableau suivant :

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + b_0 = k_0 p + c_0 \\ a_1 + b_1 + k_0 = k_1 p + c_1 \\ a_2 + b_2 + k_1 = k_2 p + c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_m + b_m + k_{m-1} = k_m p + c_m \\ k_m = c_{m+1} = 0 \text{ ou } 1 \end{array} \right\} c_i < p \quad (k_i = 0 \text{ ou } 1),$$

par suite

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_m + b_0 + b_1 + \dots + b_m + k_0 + k_1 + \dots + k_m \\ = (k_0 + k_1 + \dots + k_m)p + c_0 + c_1 + \dots + c_m + c_{m+1}. \end{aligned}$$

Or, comme chacun des nombres $k_0, k_1, \dots, k_m$ est égal à zéro ou à un, leur somme est égale au nombre d'unités reportées d'une colonne à la suivante, soit k . D'autre part, on a par définition

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m &= \sum x, \\ b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_m &= \sum n, \\ c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_m + c_{m+1} &= \sum (x + n). \end{aligned}$$

Il en résulte donc bien

$$\sum (x + n) = \sum x + \sum n - k((p-1) \text{ } ^{(1)}). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On trouverait de même

$$\sum (x - n) = \sum x - \sum n + k(p-1),$$

k étant ici le nombre d'unités empruntées au chiffre d'une

(¹) Arithmétiquement, l'opération s'indiquerait ainsi :

$$\begin{array}{ll} \dots a_i \dots a_3 a_2 a_1 a_0 & a_i < p. \\ \dots b_i \dots b_3 b_2 b_1 b_0 & b_i < p, \\ \dots c_i \dots c_3 c_2 c_1 c_0 & c_i < p. \end{array}$$

Dans chaque colonne, l'addition de deux chiffres ne peut surpasser $2p-2$ (18 dans le système décimal). On ne peut donc jamais reporter plus d'une unité dans la colonne suivante. Le chiffre de cette colonne augmente de 1, celui de la précédente diminue de p à chaque report; d'où la formule.

colonne et reportées dans la précédente suivant les règles de l'arithmétique élémentaire.

On voit d'ailleurs qu'en posant $x + n = m$, d'où $x = m - n$, la formule d'addition devient

$$m \sum = \sum (m - n) + \sum n - k(p - 1),$$

d'où

$$\sum (m - n) = \sum m - \sum n + k(p - 1).$$

PROPOSITION 3. — Faisant le produit nx , on aura

$$\sum nx = \sum n. \sum x - k(p - 1),$$

où k représente encore le nombre d'unités que, dans le produit, on est amené à reporter d'une colonne à la suivante.

Démonstration. — Soient

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots & a_i < p, \\ n &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots & b_i < p, \\ nx &= c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots & c_i < p. \end{aligned}$$

La multiplication, membre à membre, donne

$$\begin{array}{r|l} nx = a_0 b_0 + a_0 b_1 & p + a_0 b_2 \\ + a_1 b_0 & + a_1 b_1 \\ & + a_2 b_0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} p^2 + \dots, \end{array} \right.$$

résultat que, pour abréger, nous écrirons

$$nx = C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots$$

Observons que, par définition,

$$C_0 + C_1 + C_2 + \dots = \sum n. \sum x.$$

Si $a_0 b_0 < p$, on a $C_0 = c_0$; mais, en général,

$$C_0 = pk_0 + c_0$$

et l'on reporte k_0 unités à la colonne suivante, et cela quand bien même cette colonne ferait défaut dans le produit membre à

membre nx ; ce qui arriverait par exemple si l'on avait $a_i = b_i = 0$.

On a donc jusqu'ici

$$nx = c_0 + C_1 \mid p + C_2 p^2 + \dots \\ + k_0$$

On posera de même

$$C_1 + k_0 = pk_1 + c_1$$

et l'on reportera k_1 unités à la colonne suivante. Observons qu'ici on pourrait avoir $k_1 > p$, ce qui ne change rien à la marche du calcul.

On obtiendra ainsi successivement

$$\begin{aligned} C_0 &= c_0 + k_0 p, \\ C_1 + k_0 &= c_1 + k_1 p, & C_0 + C_1 &= c_0 + c_1 + k_0(p-1) + k_1 p, \\ C_2 + k_1 &= c_2 + k_2 p, & C_0 + C_1 + C_2 &= c_0 + c_1 + c_2 + (k_0 + k_1)(p-1) + k_2 p, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\ C_i + k_{i-1} &= c_i + k_i p, & C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_i &= c_0 + c_1 + c_2 + \dots \\ & & &+ c_i + (k_0 + k_1 + \dots + k_{i-1})(p-1) + k_i p. \end{aligned}$$

Mais, comme le produit est fini, il arrivera un moment où l'on trouvera $k_i = 0$; on aura alors

$$C_0 + C_1 + \dots + C_i = c_0 + c_1 + \dots + c_i + (k_0 + k_1 + \dots + k_{i-1})(p-1),$$

c'est-à-dire

$$\sum n. \sum x = \sum nx + k(p-1)$$

ou

$$\sum nx = \sum n. \sum x - k(p-1). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La Proposition 1 exige que p soit un nombre premier. Dans les deux autres propositions, p peut être quelconque.

§ 2.

Nous allons maintenant faire quelques applications de ces trois propositions.

THÉORÈME. — x et n étant, comme ci-dessus, écrits dans le

système de base p nombre premier, si le produit

$$1.2.3\dots(n-1)n$$

est divisible par p^α , — α exposant maximum —

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n)$$

sera divisible par $p^{\alpha+k}$; où k représente le nombre d'unités reportées d'une colonne à la suivante dans l'addition $x+n$.

Démonstration. — Par la proposition 1, on a

$$\alpha = \frac{n - \sum n}{p-1}$$

et, par la même proposition, l'exposant maximum avec lequel p entre dans le produit

est $1.2\dots x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$

$$\frac{x+n - \sum (x+n)}{p-1}.$$

De même, l'exposant maximum avec lequel p entre dans le produit

est $1.2\dots x$

$$\frac{x - \sum x}{p-1}.$$

Le nombre premier p entrera donc dans le produit

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n)$$

avec un exposant égal à la différence des deux précédents, soit

$$\frac{x+n - \sum (x+n) - x + \sum x}{p-1} = \frac{n - \sum (x+n) + \sum x}{p-1},$$

D'ailleurs, par la proposition 2, on a

$$\sum (x+n) = \sum x + \sum n - k(p-1);$$

l'exposant considéré est donc

$$\frac{n - \sum x - \sum n + \sum x}{p-1} + k = \frac{n - \sum n}{p-1} + k = \alpha + k.$$

C. Q. F. D.

En vue d'une application de la proposition 3, partons de l'identité

$$\frac{1.2...N - 1.N}{1.2...N - 1.N} = 1.$$

Posant $N = a_1 + a_2$, elle devient, en admettant $a_1 < a_2$,

$$\frac{1.2...(a_1 + a_2 - 1)(a_1 + a_2)}{1.2...a_1.(a_1 + 1)(a_1 + 2)...(a_1 + a_2)} = 1,$$

et comme, d'après un théorème classique, le produit

$$(a_1 + 1)(a_1 + 2)...(a_1 + a_2)$$

est divisible par $1.2...a_2$, on a

$$(1) \quad \frac{1.2.3...(a_1 + a_2)}{1.2...a_1.1.2...a_2} = \text{entier}.$$

On trouvera de même généralement avec $N = a_1 + a_2 + ... a_n$

$$(2) \quad \frac{1.2.3...(a_1 + a_2 + ... + a_n)}{1.2...a_1.1.2...a_2...1.2...a_n} = \text{entier}.$$

Si l'on pose dans (1) $a_1 = x$, $a_2 = (n - 1)x$, on a $N = nx$ et

$$(3) \quad \frac{1.2...nx}{1.2...x.1.2...(n-1)x} = \text{entier}.$$

D'autre part si dans (2) on pose $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = x$ on a

$$(4) \quad \frac{1.2.3...nx}{(1.2.3...x)^n} = \text{entier} \quad (1),$$

relation qui résulte de (3) *a fortiori*. Pour le faire voir mettons (4)

(1) Les expressions (1), (2), (3), (4) sont bien connues mais en vue de ce qui suit il y avait intérêt à montrer qu'elles résultent de l'identité initiale par la suppression de certains facteurs au dénominateur.

ou

$$(5a) \quad \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n} = 1.2.3 \dots n. q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_{n-1}.$$

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 décembre 1881, M. Mathieu Weill a démontré par un procédé d'analyse combinatoire la divisibilité du nombre $\frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$ par la factorielle $1.2 \dots n$. L'équation (5a) implique ce théorème et de plus fait connaître explicitement le résultat de la division. On voit que le théorème en question, tout comme ceux qu'expriment les égalités (1), (2), (3), (4), résulte de l'identité initiale avec $N = nx$, par la suppression de différents facteurs au dénominateur. Ils se trouvent restitués dans l'équation (5a) qui, en y remplaçant les quantités $q_1, q_2, \dots$, par leurs valeurs, reproduira l'identité initiale.

On peut pousser plus loin cette investigation et montrer que l'entier

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$$

est en général divisible par une puissance de la factorielle $1.2 \dots n$ supérieure à l'unité, soit $(1.2 \dots n)^h$ avec $h > 1$. La proposition 3 trouvera ici son application.

Soit p un nombre premier non supérieur au plus grand des deux nombres x et n ; p^e la plus grande puissance de p qui divise E . Évaluons d'abord ε .

Par la proposition 1, p entre dans le numérateur de E avec un exposant

$$\varepsilon_1 = \frac{nx - \sum nx}{p-1},$$

et dans la factorielle $1.2 \dots x$ avec un exposant

$$\varepsilon_2 = \frac{x - \sum x}{p-1},$$

par suite p entre dans le dénominateur de E avec l'exposant $n\varepsilon_2$ et l'on a

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - n\varepsilon_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon = \frac{n \sum x - \sum nx}{p-1}.$$

D'ailleurs par la proposition 3

$$\sum nx = \sum n \sum x - k(p-1).$$

Par conséquent

$$(6) \quad \epsilon = \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x + k,$$

telle est la valeur exacte de l'exposant cherché, ou, comme on dit aussi, le nombre de fois que le nombre premier p entre comme facteur dans l'entier E .

Si l'on se contente d'une valeur approchée on peut écrire

$$\epsilon \approx \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x.$$

On retrouve ainsi une formule approximative déjà obtenue par M. Désiré André ⁽¹⁾.

Cherchons maintenant avec quel exposant ϵ' , p entre dans l'expression

$$E' = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n 1 \cdot 2 \dots n}.$$

Par la proposition 1, p entre dans $1 \cdot 2 \dots n$ avec un exposant

$$\epsilon_3 = \frac{n - \sum n}{p-1}.$$

Conservant les notations précédentes on aura donc

$$\epsilon' = \epsilon_1 - n\epsilon_2 - \epsilon_3,$$

et, comme nous avons trouvé

$$\epsilon_1 - n\epsilon_2 = \frac{n - \sum n}{p-1} \sum x + k,$$

(1) Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 13 février 1882, M. Désiré André a donné ce résultat sous la forme $\epsilon \approx (\alpha + \beta + \gamma + \dots)P(n)$ où ϵ désigne l'exposant ϵ , $\alpha + \beta + \gamma + \dots = \sum x$ et où $P(n)$ représente le nombre de fois que p , nombre premier, entre comme facteur dans $1 \cdot 2 \dots n$, c'est-à-dire $\frac{n - \sum n}{p-1}$ d'après la proposition 1.

il vient

$$\epsilon' = \frac{n - \sum^n}{p-1} \left(\sum x - 1 \right) + k.$$

Cette valeur ne doit jamais être négative puisque nous avons trouvé plus haut que E' est un nombre entier; et en effet il résulte de nos notations que l'on a toujours

$$\sum x \geq 1, \quad k \geq 0.$$

Par une généralisation immédiate, p entrera dans l'expression

$$E'' = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n (1 \cdot 2 \dots n)^h}$$

avec un exposant

$$\epsilon'' = \epsilon_1 - n\epsilon_2 - h\epsilon_3,$$

soit

$$(7) \quad \epsilon'' = \frac{n - \sum^n}{p-1} \left(\sum x - h \right) + k,$$

et pour que E'' soit un nombre entier il faut et il suffit que cette expression soit nulle ou positive quel que soit p parmi les nombres premiers non supérieurs au plus grand des deux nombres x et n .

Dans le cas d'un nombre premier p supérieur à la fois à x et à n les développements du Paragraphe 1

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + \dots & (a_i < p), \\ n &= b_0 + b_1 p + \dots & (b_i < p), \end{aligned}$$

se réduisent à leurs premiers termes a_0, b_0 . On a

$$\sum x = x; \quad \sum n = n,$$

et l'expression (7) donne simplement

$$\epsilon'' = k.$$

Dans ce cas aussi les valeurs ci-dessus trouvées pour les exposants ϵ_2, ϵ_3 se réduisent à zéro comme cela devait être, eu égard aux hypothèses $x < p, n < p$; par suite l'égalité

$$\epsilon'' = \epsilon_1 - n\epsilon_2 - k\epsilon_0$$

se réduit à

$$\epsilon' = \epsilon_1,$$

d'où l'on conclut

$$\epsilon_1 = k.$$

Il est facile de vérifier ce résultat par la formule classique $\epsilon_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^i} \right]$. En effet, dans les notations du Paragraphe 1, la multiplication nx se réduit aussi au seul terme

$$nx = C_0$$

et pour déterminer k on a d'abord (voir § 1)

$$C_0 = nx = pk_0 + c_0 \quad (c_0 < p);$$

d'ailleurs, puisque $x < p$, $n < p$, on a $nx < p^2$; donc $k_0 < p$, par suite $k = k_0 = \left[\frac{nx}{p} \right]$, terme unique auquel dans ce cas se réduit la série $\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{p^i} \right]$.

Désignons maintenant par σ le minimum de $\sum x$ pour tous les nombres premiers considérés quand x est mis sous la forme

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \quad (a_i < p; \quad p = (2, 3, 5, 7, 11 \dots)).$$

Alors pour un nombre premier quelconque de cette suite on aura assurément

$$\sum x \geq \sigma.$$

Si donc on remplace h par σ dans la valeur de ϵ'' , la nouvelle expression

$$(8) \quad \frac{n - \sum^n}{p - 1} \left[\sum x - \sigma \right] + k$$

ne sera jamais négative et il en résulte, remplaçant h par σ dans E'' ,

que la quantité

$$(9) \quad F = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n (1 \cdot 2 \dots n)^{\sigma}}$$

est toujours un nombre entier ⁽¹⁾.

Remarque. — Si $\sum x = 1$ pour un certain nombre premier on a nécessairement $\sigma = 1$. Écartant le cas illusoire $x = 1$ cette circonstance ne peut se présenter que si $x = p^i$. Alors l'expression (8) s'évanouit. En effet, le premier terme s'annule en vertu de l'hypothèse $\sum x = 1 = \sigma$. Quant à k , remarquons qu'en mettant n sous la forme

$$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots$$

le produit nx s'effectuera par la simple addition de i à chacun des exposants de p dans l'expression de n . On n'aura donc rien à reporter d'une colonne à la suivante, par suite $k = 0$. Dans ce cas on a simplement

$$F = E' = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n (1 \cdot 2 \dots n)^{\sigma}}.$$

§ 3.

Dans les notations des Paragraphes 1 et 2, un nombre entier quelconque x étant écrit dans le système de numération dont la base est le nombre premier p , savoir

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \quad (a < p),$$

(¹) M. DÉSIRE ANDRÉ, *loc. cit.*, pose $Q = \frac{nx!}{(x!)^n}$ et énonce ainsi qu'il suit le théorème qu'implique l'égalité (9):

« S'il est impossible d'exprimer x par une somme de moins de k puissances d'un même nombre premier le quotient Q est divisible par la puissance $k^{\text{ième}}$ de la factorielle n . »

Dans la notation de M. André $x = \alpha + \beta p + \gamma p^2 + \dots$ doit être considéré comme exprimé par la somme de $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ puissances de p ; savoir α puissances égales à zéro, β puissances égales à 1, γ puissances égales à 2, etc. Si x ne peut être exprimé par moins de k puissances on a $k = \text{minimum}(\alpha + \beta + \gamma + \dots) = \sigma$ de notre texte. L'égalité (9) correspond donc bien à l'énoncé de M. André; mais dans cet énoncé la signification de la lettre k est toute différente de celle qui est attribuée à la même lettre dans le présent Mémoire.

on a par définition

$$\sum x = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

$\sigma =$ le minimum $\sum x$ que donnent les diverses expressions de x quand p parcourt la suite indéfinie des nombres premiers.

Ce minimum ne peut se rencontrer qu'avec un nombre premier non supérieur à x . Car avec un nombre premier quelconque supérieur à x , l'expression de x se réduit à son premier terme a_0 et donne $\sum x = x$, tandis que, pour tout autre nombre premier non supérieur à x , on a $\sum x < x$. Le nombre x lui-même ne saurait donc être égal à σ .

Nous avons vu également que le nombre entier

$$E = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n}$$

est toujours divisible par $(1 \cdot 2 \dots n)^\sigma$. Mais la puissance σ est-elle une limite supérieure et sinon, dans quels cas est-il possible de déterminer de combien la puissance limite surpasse σ ? C'est ce que nous nous proposons de rechercher.

Reprenons à cet effet l'expression

$$(1) \quad \varepsilon' = \frac{n - \sum^n}{p-1} \left(\sum x - h \right) + k \quad [\S 2; (7)]$$

qui fait connaître l'exposant ε' de la puissance du nombre premier p dans le quotient

$$E = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n (1 \cdot 2 \dots n)^h}$$

exposant qui selon la valeur de h pourra être positif, nul ou négatif.

Remplaçant, dans (1), h par $\sigma + \mu$, où μ représente un nombre entier positif quelconque, il vient

$$\varepsilon' = \frac{n - \sum^n}{p-1} \left(\sum x - \sigma - \mu \right) + k,$$

ce qui peut s'écrire

$$(2) \quad \epsilon' = \frac{n - \sum n}{p-1} \left(\sum x - \tau \right) + k - \mu \frac{n - \sum n}{p-1}.$$

Cette formule est exacte quels que soient x et n et jusqu'ici nous n'avons rien stipulé sur les grandeurs relatives de ces deux nombres. Or, pour déterminer σ , nous pouvons nous borner, ainsi qu'il vient d'être dit, à faire varier le nombre premier p sans dépasser x . D'autre part, lorsque $p > n$, on a $\sum n = n$ et la formule (2) se réduit à $\epsilon' = k$. Si l'on suppose $x > n$, alors pour tout nombre premier compris entre n et x cette formule est indépendante de μ et par conséquent illusoire en ce qui concerne l'examen de cette quantité. Nous introduirons donc la restriction suivante :

Convention restrictive : x est au plus égal à n .

D'après la signification de ϵ'' , tant qu'en donnant à μ des valeurs croissantes l'expression (2) ne sera pas négative le nombre E sera divisible par $p^{\sigma+\mu}$; il ne le sera plus à partir du moment où ϵ'' deviendra négatif.

Or le premier terme de ϵ'' dans (2) étant essentiellement positif (ou nul) quel que soit p , les valeurs de μ susceptibles de rendre ϵ'' négatif ne se rencontrent que parmi celles pour lesquelles

$$k < \mu \frac{n - \sum n}{p-1}$$

et, si p est un des nombres premiers qui donnent $\sum x = \tau$, on a

$$\epsilon' = k - \mu \frac{n - \sum n}{p-1}.$$

Dans ce cas, si l'on trouve

$$(\mu-1) \frac{n - \sum n}{p-1} < k < \mu \frac{n - \sum n}{p-1},$$

le nombre

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$$

sera divisible par $p^{\sigma+\mu-1}$ et ne le sera pas par $p^{\sigma+\mu}$, et cela suffit pour que E soit divisible tout au plus par la puissance $\sigma + \mu - 1$ de la factorielle $1.2 \dots n$.

Nous sommes donc amenés en définitive à comparer les valeurs

de k et de $\frac{n - \sum n}{p-1}$. Cette comparaison se fera aisément dans chaque cas particulier par un calcul direct, mais il n'existe aucune formule susceptible de rattacher à la variation de x et de n ni la variation de k , ni celle des nombres premiers pour lesquels $\sum x$ est minimum. Il faut donc se créer une méthode indirecte d'investigation; celle dont nous ferons usage repose sur la remarque suivante :

Remarque. — Lorsque n augmente, p restant constant, la quan-

tité $\frac{n - \sum n}{p-1}$ ne peut pas diminuer.

La démonstration directe serait facile, mais elle n'est pas nécessaire. Puisque $\frac{n - \sum n}{p-1}$ représente par la proposition I (§ 1) l'exposant de la plus grande puissance du nombre premier p qui entre comme diviseur dans la factorielle $1.2 \dots n$, il est clair que, si l'on fait croître n sans faire varier p , cet exposant ne peut décroître.

Comme conséquence immédiate, quand n croît, p restant constant, $n - \sum n$ ne peut décroître.

Voici comment cette remarque peut être utilisée :

Exposé de la méthode d'investigation.

Soient x et n deux nombres donnés respectivement compris entre des limites pour le moment indéterminées

$$\begin{aligned} x_0 &\leq x \leq X, \\ n_0 &\leq n \leq N. \end{aligned}$$

Pour satisfaire à la convention générale $x \leq n$, nous supposons $n_0 \geq X$.

Soit encore p un nombre premier quelconque non supérieur à n_0 .

D'après la remarque la quantité $\frac{n - \sum n}{p-1}$ ne pourra jamais décroître quand n croît jusqu'à N , donc $\frac{N - \sum N}{p-1}$ sera un maximum.

Imaginons qu'on puisse déterminer X et N de façon que, dans le produit nx , variable dans les limites fixées, la quantité k qui correspond à NX soit un maximum. Le désignant par K nous poserons

$$(3) \quad K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1};$$

comparant, à dessein, K non avec la valeur maxima correspondante $\frac{N - \sum N}{p-1}$ mais avec la quantité minima $\frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$. Supposons qu'on ait déterminé le minimum de μ pour lequel cette inégalité est satisfaite, on aura *a fortiori*

$$K < \mu \frac{N - \sum N}{p-1}$$

et il en résulte que pour cette même valeur de μ on aura partout dans le produit variable nx

$$k < \mu \frac{n - \sum n}{p-1},$$

puisque d'une part k est égal ou inférieur à K et que d'autre part $\frac{n - \sum n}{p-1}$ est égal ou supérieur à $\frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$.

Le nombre p désigne ici un nombre premier quelconque non supérieur à n . Si nous le prenons inférieur à x et si pour ce nombre premier on a $\sum x = \sigma$ on pourra conclure, ainsi qu'il a été dit plus haut, que le nombre $E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$ n'est pas divisible par

$(1.2\dots n)^{\sigma+\mu}$. Mais si avec p on n'a point $\sum x = \sigma$ l'inégalité

$k < \mu \frac{n - \sum n}{p-1}$ cesse d'être un criterium de non-divisibilité. C'est pourquoi il faut concevoir théoriquement le procédé que nous venons de décrire appliqué successivement à tous les nombres premiers non supérieurs à x . Soit p' l'un d'entre eux différent de p . Partant toujours des deux nombres donnés x et n on déterminera de nouvelles limites x'_0 X' ; n'_0 N' remplissant les conditions précédemment imposées à x_0 X et n_0 N et l'on en inférera un nouveau nombre μ' déterminé par l'inégalité

$$K' < \mu' \frac{n'_0 - \sum n'_0}{p'-1}.$$

En continuant ainsi on obtiendra une série de nombres

$$\mu, \mu', \mu'', \dots$$

Soit M le plus grand nombre qui se rencontre, une ou plusieurs fois, dans cette suite. On aura l'inégalité

$$k < M \frac{n - \sum n}{p-1}$$

dans laquelle k se rapporte au produit nx des deux nombres donnés et p à tous les nombres premiers non supérieurs à x ; par conséquent aussi à ceux pour lesquels $\sum x = \sigma$. Pour ceux-ci l'inégalité précédente est, exactement ou *a fortiori*, un criterium de non-divisibilité; on pourra donc conclure que le nombre E n'est pas divisible par la puissance $\sigma + M$ de la factorielle $1.2\dots n$.

Telle est la conception théorique de la méthode d'investigation; il s'agit maintenant de montrer qu'elle est réalisable.

Déterminons d'abord les limites supérieures X et N .

x étant un nombre entier quelconque, p un nombre premier non supérieur à x , il existera toujours un nombre entier i tel que

$$p^{i-1} \leq x < p^i,$$

et l'expression générale de x sera

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{i-1} p^{i-1},$$

où a_{i-1} n'est pas nul et où le minimum de i est 2, eu égard à la condition $p \nless x$.

Dans cette formule, le minimum de x correspond à

$$0 = a_0 = a_1 = \dots = a_{i-2}, \quad a_{i-1} = 1.$$

On a donc

$$\text{minimum } x = p^{i-1}.$$

Le maximum s'obtient en donnant à chaque coefficient sa valeur maximum $p - 1$, d'où

$$\text{maximum } x = p - 1 + \overline{p - 1} \cdot p + \dots + \overline{p - 1} \cdot p^{i-1} = p^i - 1.$$

Prenons maintenant pour n un nombre quelconque au moins égal au maximum de x , soit

$$n = b_0 + b_1 p + \dots + b_{i-1} p^{i-1} + b_i p^i + \dots;$$

alors, dans le produit nx où n est fixe et x variable dans ses limites, on aura un maximum pour k en prenant x maximum. En effet, k étant par définition le nombre total d'unités reportées d'une colonne à la suivante dans la multiplication membre à membre des deux expressions

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 p + \dots & (a_0, a_1, \dots \text{ variables}), \\ n &= b_0 + b_1 p + \dots & (b_0, b_1, \dots \text{ constants}), \end{aligned}$$

ce nombre total ne saurait être plus grand que lorsque chaque coefficient $a_0, a_1, \dots$ est le plus grand possible, c'est-à-dire égal à $p - 1$, auquel cas x est égal à son maximum $p^i - 1$.

Nous pouvons donc prendre

$$x_0 = p^{i-1}, \quad X = p^i - 1,$$

et les limites de x se trouvent déterminées.

Passons à la détermination des limites de n et prenons, sauf justification,

$$n_0 = \lambda p^h, \quad N = (\lambda + 1)p^h - 1 \quad \text{avec} \quad h \nless i,$$

où λ peut varier de 1 à $p - 1$.

Il s'agit de justifier le choix de N , eu égard à la règle donnée dans la méthode d'investigation.

On peut écrire

$$N = p^h - 1 + \lambda p^h,$$

d'où résulte immédiatement

$$N = p - 1 + \overline{p-1} \cdot p + \overline{p-1} \cdot p^2 + \dots + \overline{p-1} \cdot p^{h-1} + \lambda p^h,$$

formule exacte puisque $\lambda < p$.

Pour un autre nombre n quelconque de n_0 à N , on aura

$$n = b_0 + b_1 p + \dots + b_{h-1} p^{h-1} + \lambda p^h.$$

Mais dans le produit nx , où x est supposé fixe dans ses limites et n variable, la quantité k est maximum quand chaque coefficient de n est le plus grand possible, c'est-à-dire quand $n = N$.

La limite N est ainsi justifiée et l'on voit que le maximum maximorum de k correspond au produit maximum NX .

D'autre part, n étant donné, il existera pour tout nombre premier p un nombre h tel que

$$p^h \leq n < p^{h+1} - 1,$$

et, par conséquent aussi, une valeur de λ pour laquelle

$$\lambda p^h \leq n < (\lambda + 1)p^h - 1 \quad (1 \leq \lambda \leq p - 1).$$

Si l'on fait $h = i$ et $\lambda = 1$, on a

$$n = |p^i, p^i + 1, \dots, 2p^i - 1|.$$

Avec $h = i$ et *exceptionnellement* $\lambda = 0$, on a

$$n = p^i - 1;$$

c'est, d'après nos conventions, le minimum absolu de n égal à X maximum de x . Ici $n_0 = n = N$.

Faisant varier h à partir de i , on peut résumer l'ensemble des valeurs simultanées de x et de n dans le Tableau suivant. Il se compose de *divisions* indiquées par des accolades $\{$ et de *subdivisions* indiquées par des barres verticales $|$. Les divisions cor-

respondent aux valeurs de h , les subdivisions aux valeurs de λ .

$$\begin{aligned}
 x &= \{p^{i-1}, p^{i-1}+1, \dots, p^i-1\} \\
 n &= |p^i-1| \left\{ \begin{aligned} &|p^i p^{i+1}+1 \dots 2p^i-1| \\ &|2p^i, 2p^{i+1}+1, \dots, 3p^i-1| \\ &\dots\dots\dots \\ &|(p-1)p^i, (p-1)p^{i+1}+1 \dots p^{i+1}-1| \\ &|p^{i+1}, p^{i+1}+1 \dots 2p^{i+1}-1| \\ &\dots\dots\dots \\ &|(p-1)p^{i+1}, (p-1)p^{i+1}+1 \dots p^{i+2}-1| \\ &|p^{i+2}, p^{i+2}+1 \dots 2p^{i+2}-1| \dots \{ \\ &\dots\dots\dots \\ &|p^h, p^h+1 \dots 2p^h-1| \dots \\ &|\lambda p^h, \lambda p^h+1 \dots (\lambda+1)p^h-1| \dots \} \\ &\dots\dots\dots \\ &(1 \leq \lambda \leq p-1). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

x étant un nombre donné et p un nombre premier non supérieur à x , l'exposant i sera déterminé, et n , quel qu'il soit, à partir de p^i-1 , tombera forcément dans une des subdivisions de ce Tableau.

En faisant varier p et i le Tableau donne pour x tous les nombres entiers, sauf l'unité, puisque le minimum de i est 2, et, pour n , tous les nombres entiers à partir de p^i-1 .

Pour appliquer la méthode générale, nous aurons à former le produit NX correspondant à la subdivision dans laquelle tombe n et à déterminer μ par la condition

$$K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1},$$

n_0 étant pris dans la même subdivision.

Nous commencerons par le nombre $n = p^i-1$, seul de sa subdivision.

On a ici

$$\begin{aligned}
 X = n = p^i-1 &= p-1 + \overline{p-1} \cdot p + \overline{p-1} \cdot p^2 + \dots + \overline{p-1} \cdot p^{i-1}, \\
 \sum n &= \sum X = i(p-1).
 \end{aligned}$$

Supposant le produit nX effectué, on aura dans les notations

du paragraphe 1, toutes réductions faites,

$$nX = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots, \quad c < p,$$

et comme $n = X = p^i - 1$, on a ici

$$nX = (p^i - 1)^2 = 1 - 2p^i + p^{2i}.$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$1 - 2p^i + p^{2i} = 1 + \overline{p-2} \cdot p^i + \overline{p-1} \cdot p^{i+1} \\ + \overline{p-1} \cdot p^{i+2} + \dots + \overline{p-1} \cdot p^{2i-2} + \overline{p-1} \cdot p^{2i-1};$$

d'où résulte immédiatement

$$c_0 = 1, \quad c_1 = c_2 = \dots = c_{i-1} = 0, \\ c_i = p - 2, \quad c_{i+1} = c_{i+2} = \dots = c_{2i-1} = p - 1$$

et

$$\sum nX = i(p - 1).$$

Nous pouvons maintenant évaluer K par la formule générale

$$\sum nx = \sum n \cdot \sum x - k(p - 1) \quad [\text{Proposition 3, § 1}],$$

qui devient ici

$$\sum nX = \left(\sum n \right)^2 - K(p - 1),$$

c'est-à-dire

$$i(p - 1) = i^2(p - 1)^2 - K(p - 1), \\ K = i^2(p - 1) - i.$$

n se confondant ici avec ses limites n_0, N , nous avons, conformément à la méthode générale, à déterminer le minimum de μ dans l'inégalité

$$K < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}.$$

Or, on a ici

$$\frac{n - \sum n}{p - 1} = \frac{p^i - 1 - i(p - 1)}{p - 1} = \frac{p^i - 1}{p - 1} - i = 1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1} - i,$$

et l'inégalité devient

$$i^2(p - 1) - i < \mu(1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}) - i\mu$$

ou

$$(4) \quad i^2(p-1) + i(\mu-1) < \mu(1+p+p^2+\dots+p^{i-1}),$$

que nous indiquerons brièvement ainsi

$$V_1 < V_2.$$

Notre but est de trouver le minimum numérique de μ pour lequel cette inégalité est satisfaite quel que soit p , nombre premier, et i nombre entier ≥ 2 .

Or pour $i = 2, p = 2$ l'inégalité devient

$$4 + 2(\mu-1) < 3\mu; \quad \mu > 2.$$

La limite inférieure cherchée ne peut donc être moindre que 3 et l'inégalité (4) est satisfaite par les valeurs minima $i = 2, p = 2$ avec $\mu \geq 3$.

Nous chercherons maintenant à la vérifier avec i et p nombres entiers quelconques, à partir de 2; par implication elle se trouvera vérifiée pour $p =$ nombre premier quelconque.

A cet effet nous remplacerons successivement dans l'inégalité (4) i et p par $i+1, p+1$ et nous comparerons dans les deux cas l'accroissement δV_1 du premier membre avec l'accroissement δV_2 du second. Tant que l'accroissement du premier membre sera égal ou inférieur à l'accroissement du second l'inégalité sera encore satisfaite et la condition $\delta V_1 \leq \delta V_2$ donnera dans chaque cas un minimum pour μ qui pourra être supérieur au minimum 3 déjà trouvé avec les valeurs initiales $i = p = 2$. Le maximum minimorum ainsi obtenu sera la limite inférieure de μ dans l'inégalité (4).

1° Changement de i en $i+1$ dans (4).

On a

$$\delta V_1 = (2i+1)(p-1) + \mu - 1; \quad \delta V_2 = \mu p^i.$$

La condition $\delta V_1 \leq \delta V_2$ est

$$(2i+1)(p-1) + \mu - 1 \leq \mu p^i.$$

Elle peut s'écrire

$$(2i+1)(p-1) \leq \mu(p^i-1) + 1,$$

ou

$$2i + 1 \leq \mu \frac{p^i - 1}{p - 1} + \frac{1}{p - 1}$$

et sera satisfaite *a fortiori* si l'on pose

$$2i + 1 \leq \mu \frac{p^i - 1}{p - 1},$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad 2i + 1 \leq \mu (1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}).$$

Dans l'examen de cette nouvelle condition et de celles que nous rencontrerons par la suite, nous aurons à opérer identiquement comme avec l'inégalité (4) : chercher d'abord les valeurs initiales minima de i , p , μ qui y satisfont et comparer ensuite les accroissements des deux membres quand i et p augmentent séparément d'une unité.

Or la forme de la condition (5) montre que, si elle est satisfaite par trois valeurs i , p , μ , elle le sera encore par les mêmes valeurs i , μ et toute valeur supérieure de p . Il suffit donc de l'examiner avec $p = 2$; elle devient alors

$$2i + 1 \leq \mu (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{i-1})$$

et pour le minimum $i = 2$ on trouve

$$5 \leq 3\mu; \quad \mu \geq 2.$$

Changeons maintenant dans (5) i en $i + 1$. On a

Accroissement du 1^{er} membre = 2,

Accroissement du 2^e membre = $\mu \cdot 2^i$,

et la condition

$$2 \leq \mu \cdot 2^i$$

est toujours satisfaite quels que soient μ et i .

La condition $\delta V_1 \leq \delta V_2$ est donc satisfaite quels que soient i et p avec $\mu \geq 2$ et *a fortiori* avec $\mu \geq 3$. On en conclut que l'inégalité (4), satisfaite avec $\mu \geq 3$, $p = 2$, $i = 2$, le sera encore avec $\mu \geq 3$, $p = 2$, i quelconque.

2° Changement de p en $p + 1$ dans (4). On a ici

$$\delta V_1 = i^2; \quad \delta V_2 = \mu \left\{ 1 + p + 1 + (p+1)^2 + \dots + (p+1)^{i-1} - (1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}) \right\}.$$

La condition à satisfaire : $\delta V_1 \leq \delta V_2$ devra être traitée identiquement comme la condition correspondante dans 1° et comme l'inégalité (4). Nous appliquerons le procédé sans répéter les raisonnements.

On voit d'abord que δV_2 croît avec p . Car en groupant les termes deux à deux on a

$$\delta V_2 = \mu \left\{ 1 + (p+1)^2 - p^2 + (p+1)^3 - p^3 + \dots + (p+1)^{i-1} - p^{i-1} \right\}$$

et la différence des deux termes d'un groupe quelconque

$$(p+1)^m - p^m = 1 + mp + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} p^2 + \dots + mp^{m-1}$$

est positive et augmente avec p . Il suffit donc encore d'étudier la condition $\delta V_1 \leq \delta V_2$ avec $p = 2$; elle devient alors

$$i^2 \leq \mu \left(\frac{3^i - 1}{2} - (2^i - 1) \right)$$

ou

$$(6) \quad i^2 \leq \frac{\mu}{2} (1 + 3^i - 2^{i+1})$$

et pour le minimum $i = 2$ on trouve

$$\mu \geq 4,$$

limite plus élevée que celles obtenues jusqu'ici.

Changeant maintenant i en $i + 1$ dans (6) on trouve

$$\text{Accroissement du 1er membre} = 2i + 1,$$

$$\begin{aligned} \text{Accroissement du 2e membre} &= \frac{\mu}{2} \{ 3^{i+1} - 2^{i+2} - (3^i - 2^{i+1}) \} \\ &= \frac{\mu}{2} \{ 2 \cdot 3^i - 2^{i+1} \} = \mu (3^i - 2^i). \end{aligned}$$

La condition

$$2i + 1 \leq \mu (3^i - 2^i)$$

est satisfaite avec $i = 2$, $\mu = 1$; *a fortiori* avec $\mu \geq 4$; elle le sera

aussi quel que soit i ; car changeant encore i en $i + 1$ on a

Accroissement du 1^{er} membre = 1,

Accroissement du 2^e membre = $\mu (3^{i+1} - 2^{i+1} - (3^i - 2^i)) = \mu (2 \cdot 3^i - 2^i)$

et la condition

$$1 \leq \mu (2 \cdot 3^i - 2^i)$$

est évidemment toujours satisfaite.

En résumé nous trouvons 4 comme maximum minimorum; telle est donc la limite inférieure de μ dans l'inégalité (4).

De l'examen du cas 2^e considéré isolément résulte que l'inégalité (4) satisfaite avec $\mu \leq 4$, $i = 2$, $p = 2$ le sera encore avec $\mu \leq 4$, $i = 2$, p quelconque.

Associant les résultats de 1^e et de 2^e, la conclusion finale est la suivante :

L'inégalité (4) est toujours satisfaite avec $\mu = 4$ et i , p nombres entiers quelconques, sauf l'unité.

Elle est donc aussi satisfaite avec p nombre premier quelconque.

D'ailleurs l'inégalité (4) est identique à la condition

$$K < \mu \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

avec

$$n = p^i - 1,$$

par suite on a

$$K < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

et il en résulte, comme dans l'exposé de la méthode, que dans tout produit nx , où

$$n = p^i - 1 \quad \text{et} \quad p^{i-1} \leq x \leq p^i - 1,$$

on a

$$k < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque n est constant et $k \leq K$.

Remarquons enfin que la limite $\mu = 4$ convient à toutes les

valeurs de i , le minimum $i = 2$ inclus. Pour des valeurs de i supérieures à 2, la limite s'abaisserait.

Ainsi, en reprenant l'investigation avec $i \geq 3$, on trouverait, quel que soit p , minimum $\mu = 2$; avec $i \geq 5$, minimum $\mu = 1$.

Généralisation. — Passons maintenant au cas général

$$n = |\lambda p^h, \lambda p^h + 1, \dots, (\lambda + 1)p^h - 1|,$$

$$X = p^i - 1, \quad n_0 = \lambda p^h, \quad N = (\lambda + 1)p^h - 1,$$

et, comme ci-dessus,

$$N = p - 1 + \overline{p-1} \cdot p + \dots + \overline{p-1} \cdot p^{h-1} + \lambda p^h.$$

Notons

$$\sum X = i(p-1), \quad \sum N = h(p-1) + \lambda,$$

$$\sum n_0 = \lambda, \quad \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1} = \lambda \frac{p^h - 1}{p-1}.$$

Formons le produit NX

$$NX = [\lambda + 1)p^h - 1][p^i - 1] = 1 - p^i - (\lambda + 1)p^h + (\lambda + 1)p^{h+i},$$

et l'on a identiquement

$$NX = 1 + (p-1)p^i + (p-1)p^{i+1} + \dots + (p-1)p^{h-1} + (p-1)p^h + (p-1)p^{h+1} + \dots + (p-1)p^{h+i-1} + \lambda p^{h+i}.$$

Pour la valeur limite $\lambda = p - 1$, le coefficient de p^h devient égal à -1 et la formule est en défaut. On la corrige immédiatement en écrivant ce terme et le suivant

$$\overline{p-1} \cdot p^h + \overline{p-2} \cdot p^{h+1},$$

sans changer les autres termes, sauf le dernier qui devient

$$(p-1)p^{h+i}.$$

Notons ici

$$\lambda = p - 1, \quad N = p^{h+1} - 1, \quad \sum N = (h+1)(p-1),$$

$$n_0 = (p-1)p^h, \quad \sum n_0 = p-1, \quad \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1} = p^h - 1,$$

$$NX = (p^{h+1} - 1)(p^i - 1) = 1 - p^i - p^{h+1} + p^{h+i+1},$$

et l'on a bien

$$NX = 1 + (p-1)p^i + (p-1)p^{i+1} + \dots + (p-1)p^h + (p-2)p^{h+1} \\ + (p-1)p^{h+2} + \dots + (p-1)p^{h+i}.$$

Procédant, nous trouvons

$$\lambda < p-1, \quad \sum NX = h(p-1), \\ \lambda = p-1, \quad \sum NX = (h+1)(p-1).$$

Évaluons maintenant dans les deux cas la quantité K qui correspond au produit NX par la formule

$$\sum NX = \sum N \cdot \sum X - K(p-1).$$

On trouve d'abord

$$\lambda < p-1, \quad h(p-1) = [h(p-1) + \lambda] \cdot i(p-1) - K(p-1), \\ K = i[h(p-1) + \lambda] - h,$$

et la condition $K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$ est

$$(7) \quad i[h(p-1) + \lambda] - h < \mu \lambda \frac{p^h - 1}{p-1}.$$

Ensuite

$$\lambda = p-1, \quad (h+1)(p-1) = (h+1)(p-1) \cdot i(p-1) - K(p-1), \\ K = i(h+1)(p-1) - (h+1),$$

et la condition $K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$ est ici

$$(7^*) \quad i(h+1)(p-1) - (h+1) < \mu(p^h - 1).$$

Or, en faisant $\lambda = p-1$ dans l'inégalité (7), on aurait

$$i(h+1)(p-1) - h < \mu(p^h - 1),$$

et il est clair que si cette dernière inégalité est satisfaite, l'inégalité (7^{*}) le sera *a fortiori*. Il suffit donc d'examiner l'inéga-

lité (7) en y comprenant la valeur limite $\lambda = p - 1$. De la sorte, le cas exceptionnel rentre dans le cas général.

L'inégalité (7) contient deux nouvelles indéterminées h et λ . Montrons d'abord que si elle est satisfaite avec deux valeurs particulières h, λ , elle le sera encore avec toutes valeurs supérieures de ces deux quantités.

Nous procéderons comme avant, changeant successivement h en $h + 1$ et λ en $\lambda + 1$, et comparant les accroissements des deux membres.

Changement de h en $h + 1$ dans (7). — L'inégalité (7) peut s'écrire

$$h[i(p-1)-1] + \lambda < \mu \lambda \frac{p^h - 1}{p - 1},$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Accroissement du 1}^{\text{er}} \text{ membre} &= i(p-1)-1, \\ \text{2}^{\text{e}} \text{ »} &= \mu \lambda p^h. \end{aligned}$$

La condition à remplir est

$$i(p-1) \geq \mu \lambda p^h + 1,$$

et si elle est satisfaite pour une valeur quelconque de h , elle le sera *a fortiori* pour une valeur plus grande. Il suffit donc de la vérifier pour $h = i$, valeur minima. Elle devient alors

$$i(p-1) \geq \mu \lambda p^i + 1,$$

et comme on a toujours

$$ip \geq p^i,$$

la condition est, *a fortiori*, toujours satisfaite.

Changement de λ en $\lambda + 1$ dans (7).

$$\begin{aligned} \text{Accroissement du 1}^{\text{er}} \text{ membre} &= i, \\ \text{2}^{\text{e}} \text{ »} &= \mu \frac{p^h - 1}{p - 1}. \end{aligned}$$

La condition est

$$i \geq \mu \frac{p^h - 1}{p - 1}.$$

et il suffit encore d'y remplacer h par i ; elle devient alors

$$i \geq \mu \frac{p^i - 1}{p - 1}.$$

Le premier membre est indépendant de p ; le second, qui est égal à $1 + p + p^2 + \dots + p^{i-1}$, croît avec p ; on peut donc y remplacer p par son minimum 2, et il vient finalement

$$i \leq \mu(2^i - 1),$$

condition qui est satisfaite avec $i = 2$, $\mu \geq 1$.

Elle le sera encore avec $i > 2$; car, changeant i en $i + 1$, l'accroissement du premier membre est 1, celui du second est $\mu 2^i$, toujours supérieur.

Notre assertion est donc justifiée, et il suffit, pour déterminer μ dans (7), d'y faire $h = i$, $\lambda = 1$.

L'inégalité est alors

$$i[i(p-1)+1] - i < \mu \frac{p^i - 1}{p - 1}$$

ou

$$(8) \quad i^2(p-1) < \mu(1+p+p^2+\dots+p^{i-1}).$$

En la comparant avec l'inégalité (4), qui se rapporte au cas particulier $n = X = p^i - 1$, on voit que si (4) est satisfaite, (8) le sera *a fortiori*. Il en sera donc de même de (7). Un nouvel examen est, par suite, inutile, et nous pouvons prendre $\mu = 4$ comme limite inférieure valable dans tous les cas.

Première conclusion. — Quels que soient, dans le Tableau général ci-dessus, x , n , i et p , on trouvera dans le produit nx

$$(9) \quad k < 4 \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

x et n étant donnés, si l'on fait parcourir à p la suite des nombres premiers non supérieurs à x , on obtiendra pour chaque nombre premier un nouveau tableau, et, quelle que soit la subdivision à laquelle n appartienne dans ces différents tableaux, la condition (9) sera toujours satisfaite.

Cela étant, elle subsistera aussi lorsque le nombre premier p sera un de ceux pour lesquels $\sum x$ est minimum. Mais dans ce cas, c'est-à-dire avec $\sum x = 6$, il a été expliqué en détail dans ce Paragraphe, notamment dans l'exposé de la méthode d'investi-

gation, que l'inégalité (9) est un criterium de non-divisibilité du nombre

$$E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.1 \dots x)^n}$$

par $(1.2 \dots n)^{\sigma+1}$ et il en résulte enfin que le nombre E sera divisible tout au plus par la puissance $\sigma + 3$ de la factorielle $1.2 \dots n$.

Toutefois $\mu = 4$ n'est qu'une première approximation et il est possible d'abaisser cette limite.

Cas dans lesquels $\mu = 1$. Faisant $\mu = 1$ dans l'inégalité (7) qui exprime la condition générale

$$K < \mu \frac{n_0 - \sum n_i}{p-1},$$

on obtient

$$(10) \quad i[h(p-1) + \lambda] - h < \lambda(1 + p + p^2 + \dots + p^{h-1}) \\ (h \geq i; 1 \leq \lambda \leq p-1).$$

Rappelons que la quantité maxima K correspond ici aux valeurs maxima $X = p^i - 1$, $N = (\lambda + 1)p^h - 1$ (voir généralisation).

Nous avons vu que si cette inégalité est satisfaite pour certaines valeurs i, p, h, λ elle sera satisfaite pour toutes valeurs supérieures de h et de λ , les autres quantités restant constantes.

Introduisant dans l'inégalité l'hypothèse

$$h = i + 1$$

elle devient

$$i[(i+1)(p-1) + \lambda] - (i+1) < \lambda(1 + p + \dots + p^i).$$

Pour les valeurs minima $i = 2 = p$, ce qui implique $\lambda = 1$ il vient

$$5 < 7.$$

L'inégalité est donc satisfaite pour des valeurs quelconques de i, p, λ , avec $h \geq i + 1$.

Conclusion. — Si l'on a

$$p^{i-1} \leq x < p^i; \quad p^{i+1} \leq n$$

pour tout nombre premier non supérieur à x , σ sera la puissance la plus élevée de la factorielle $1.2 \dots n$ qui divise le nombre

$$\frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}.$$

Dans le tableau des valeurs simultanées de x et de n la conclusion précédente qui résulte de l'hypothèse $h = i + 1$ s'applique à tout nombre n situé dans la troisième division du tableau ou dans une division supérieure. Avec $i = 2$, par exemple, le tableau est

$$\frac{x}{\{ p p + 1 \dots p^2 - 1 \}} \\ \frac{n}{\{ | p^2 p^2 + 1 \dots 2 p^2 - 1 | 2 p^2 \dots 3 p^2 - 1 | \dots | (p-1) p^2 \dots p^2 - 1 | \}}$$

Examen du cas $h = i$. Le nombre n dans cette hypothèse appartient à la seconde division du Tableau, qui se réduit à

$$\frac{x}{\{ p^{i-1} p^{i-1} + 1 \dots p^i - 1 \}} \\ \frac{n}{\{ | p^i \dots 2 p^i - 1 | 2 p^i \dots 3 p^i - 1 | \dots | (p-1) p^i \dots p^{i+1} - 1 | \}}.$$

Pour l'examen de ce cas il faut faire dans (10) $h = i$, d'où

$$(11) \quad i^2(p-1) + i(\lambda-1) < \lambda(1+p+\dots+p^{i-1}).$$

Cette inégalité doit être satisfaite avec $\lambda < p$, et son exactitude dépendra des valeurs relatives des indéterminées qui y figurent.

Ci-joint l'énumération de tous les cas possibles. Les valeurs correspondantes de p et de λ sont inscrites en dessous de ces deux quantités et en regard les unes des autres.

	p .	λ .	Inégalité (11).
$i = 2$	2	1	en défaut
	3	1, 2	id.
	≥ 5	≤ 3	id.
		≥ 4	satisfaite
$i = 3$	2	1	en défaut
	3	1	id.
	5	2	satisfaite
		1	en défaut
	≥ 7	≥ 2	satisfaite
$i = 4$	2	1	en défaut
	≥ 3	≥ 1	satisfaite
	≥ 5	≥ 1	id.
		≥ 2	d.

Si l'on remplace dans (11) λ par μ , on retombe sur l'inéga-

lité (4), qui exprime la condition $K < \mu \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$ dans le produit NX avec $n_0 = n = N = X = p^i - 1$; l'inégalité (4) est donc satisfaite avec $\mu = 1$, $i \geq 5$ et la remarque en a déjà été faite en terminant l'examen du cas unique où n coïncide avec ses limites extrêmes.

En résumé, le Tableau des valeurs simultanées de x et de n , pour lesquelles l'inégalité (11) est toujours satisfaite, quel que soit p , est

$$x = \{ p^{i-1} p^{i-1} + 1 \dots p^i - 1 \},$$

$$i \geq 5, \quad n = p^i - 1 \mid p^i, p^i + 1, \dots 2 p^i - 1 \mid 2 p^i \dots 3 p^i - 1 \mid 3 p^i \dots$$

$$4 p^i - 1 \mid \dots \mid (p-1) p^i \dots p^{i+1} - 1 \mid \{.$$

En prolongeant ce Tableau indéfiniment, on retomberait sur le cas $h \geq i + 1$ examiné tout d'abord, et la condition $i \geq 5$ disparaîtrait.

Le produit nx de deux nombres quelconques, pris dans le Tableau ci-dessus, donnera

$$k < \frac{n - \sum n}{p-1},$$

car l'inégalité (11) exprime la condition générale $\mu = 1$, c'est-à-dire

$$K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1},$$

K se rapportant au produit NX dans lequel $X = p^i - 1$ est un nombre fixe, et N un nombre variable égal au maximum de n dans une subdivision quelconque du Tableau, tandis que n_0 représente le minimum de n dans la même subdivision, et nous avons vu que la condition $\mu = 1$ entraîne

$$k < \frac{n - \sum n}{p-1},$$

puisque n_0, n, N étant pris dans la même subdivision, on a

$$k \leq K, \quad \frac{n - \sum n}{p-1} \geq \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}.$$

Le nombre x étant choisi égal ou supérieur à 2^1 , il y aura toujours un nombre premier p , tel que $p^{i-1} \leq x < p^i$ avec $i \geq 5$ qui conviendra par conséquent au Tableau ci-dessus. Il peut se faire que l'expression arithmétique de x au moyen de p

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots \quad (a < p)$$

donne $\sum x = \sigma$. Dans ce cas, ainsi qu'il a été expliqué en détail

au début de ce paragraphe, l'inégalité $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$ dans le produit nx où $n \geq x$ est le criterium de la non-divisibilité du nombre $E = \frac{1.2 \dots nx}{(1.2 \dots x)^n}$ par $p^{\sigma+1}$ et, par suite aussi, par $(1.2 \dots n)^{\sigma+1}$.

Donc si p , dans le Tableau ci-dessus, est un des nombres premiers pour lesquels $\sum x = \sigma$, le nombre E ne sera pas divisible par la puissance $\sigma + 1$ de la factorielle $1.2 \dots n$.

Bien que, n_0, n, N appartenant à une même subdivision du Tableau, l'inégalité $K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$, relative au produit NX , entraîne $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$ dans le produit nx , il pourra arriver que, la première inégalité n'étant pas satisfaite, la seconde le soit; on en rencontrera de nombreux exemples.

Cas particuliers et exemples. — Notons d'abord

$$\begin{aligned} x &= p^h, \\ n &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots \end{aligned}$$

Dans le produit nx , on aura évidemment $0 = k < \frac{n - \sum n}{p-1}$.
(Voir *Remarque*, § 2.)

Mêmes conclusions avec $n = p^h$, x quelconque.

Dans le premier cas, on a évidemment $\sigma = 1$, et l'on en con-

clut que le nombre $E = \frac{1.2 \dots np^h}{(1.2 \dots p^h)^n}$ n'est pas divisible par le carré de la factorielle $1.2 \dots n$.

Exemple 1. — Soit maintenant

$$x = 1 + p, \quad n_0 = p^2, \quad N = 2p^2 - 1.$$

Nous écartons les hypothèses $p = 2$ et $1 + p = 2^h$ qui ramènent au cas précédent.

Dans la Tableau qui correspond à p , on a $i = 2$; x est égal au deuxième nombre inscrit au Tableau, et n tombe dans la première subdivision qui correspond à $\lambda = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{c} p \quad p+1 \dots p^2-1 \\ x \quad \quad \quad X \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} n \\ p^2 \quad p^2+1 \dots 2p^2-1 \\ n_0 \quad \quad \quad N \end{array} \right\}.$$

L'inégalité (11), qui exprime relativement au produit NX la condition $K < \frac{n_0 - \sum n_0}{p-1}$, est en défaut (*voir* l'énumération). Mais il pourrait se faire qu'avec un autre produit on trouvât $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$. Prenons, à titre d'essai, le produit Nx . On peut l'évaluer directement.

On a

$$x = 1 + 1.p, \quad N = 2p^2 - 1 = p - 1 + (p-1)p + 1.p^2,$$

$$\sum x = 2, \quad \sum N = 2p - 1, \quad \frac{N - \sum N}{p-1} = p - 1 + \frac{p^2-1}{p-1} = 2p,$$

$$Nx = [p - 1 + (p-1)p + 1.p^2](1 + 1.p) = C_0 + C_1p + C_2p^2 + C_3p^3,$$

dans les notations du Paragraphe 1. Ici

$$C_0 = p - 1, \quad C_1 = 2(p - 1), \quad C_2 = p, \quad C_3 = 1.$$

On ramènera cette expression à la forme exigée dans le système de numération de base p , savoir

$$Nx = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots \quad (c < p)$$

par les opérations indiquées au Paragraphe 1.

$$C_0 = p - 1 = c_0, \quad C_1 = \underbrace{1 \cdot p + p - 2}_{k_1 c_1}, \quad C_1 + k_1 = \underbrace{1 \cdot p + 1}_{k_2 c_2},$$

$$C_3 + k_3 = 2 = c_3 \quad \text{si } p > 2.$$

On a donc

$$k = k_1 + k_3 = 2 \quad \text{avec } p > 2;$$

on aurait

$$k = 3 \quad \text{avec } p = 2.$$

Dans tous les cas, on a

$$k < \frac{N - \sum N}{p - 1},$$

c'est-à-dire

$$2 < 2p \quad \text{avec } p > 2,$$

$$3 < 2p \quad \text{avec } p = 2.$$

De plus, on a

$$\frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = \frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1,$$

d'où suit, avec $p > 2$,

$$k < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}.$$

Soit maintenant n un nombre quelconque entre les limites n_0 , N et k' , la quantité qui correspond au produit nx . On aura certainement

$$k' < \frac{n - \sum n}{p - 1},$$

puisque k' est au plus égal à k et que $\frac{n - \sum n}{p - 1}$ est au moins égal

$$\text{à } \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1}.$$

D'autre part, on a $\sum x = 2$ et l'on peut être sûr que 2 est le minimum $\sum x$, c'est-à-dire σ . Car, en supposant toujours $p > 2$, le nombre $x = 1 + 1 \cdot p$ est un nombre pair, donc un autre nombre premier P ne donnera pas $x = P^h$ (seul cas dans lequel on

trouverait $\sigma = 1$), à moins que $P = 2$, d'où $x = 1 + 1 \cdot p = 2^h$, hypothèse écartée au début.

Cela étant, d'après une remarque souvent répétée, la condition

$$k' < \frac{n - \sum n}{p - 1}$$

est un criterium de la non-divisibilité du nombre $E = \frac{1 \cdot 2 \dots nx}{(1 \cdot 2 \dots x)^n}$ par $p^{\sigma+1}$, d'où l'on conclut que ce même nombre E avec $x = p + 1$, $p > 2$, et $n = |p^2, p^2 + 1 \dots 2p^2 - 1|$ est divisible par le carré de la factorielle $1 \cdot 2 \dots n$, mais non par une puissance supérieure.

Exemple 2.

$$\begin{aligned} x = 2p, \quad n_0 = p^2, \quad N = 2p^2 - 1 = p - 1 + (p - 1)p + 1 \cdot p^2; \\ \sum x = 2, \quad \sum N = 2p - 1, \quad \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} = p + 1, \quad \frac{N - \sum N}{p - 1} = 2p. \end{aligned}$$

On a encore $i = 2$ dans le Tableau, et l'inégalité (11) est en défaut.

Évaluons le produit Nx .

$$Nx = (2p^2 - 1)2p = -2p + 4p^2 = (p - 2)p + (p - 1)p^2 + 3p^2,$$

développement exact en admettant $p > 3$.

Dans cette hypothèse,

$$\sum Nx = 2p,$$

et la formule

$$\sum Nx = \sum N \cdot \sum x - k(p - 1)$$

donne

$$2p = (2p - 1)2 - k(p - 1); \quad k = 2,$$

et l'on a, comme dans l'exemple 1,

$$k < \frac{n_0 - \sum n_0}{p - 1} < \frac{N - \sum N}{p - 1}.$$

On en conclut, comme dans cet exemple, que dans tout pro-

duit nx où $x = 2p$ et $p^2 \bar{z} n \bar{z} 2p^2$, on a $k' < \frac{n - \sum n}{p-1}$.

D'ailleurs, ici encore, $\sigma = 2$, et il en résulte que le nombre $E = \frac{1.2.3...2p.n}{(1.2.3...2p)^n}$ avec $p > 3$ et $n = |p^2, p^2 + 1 \dots 2p^2 - 1|$ n'est pas divisible par une puissance de la factorielle $1.2...n$ supérieure à 2.

On pourrait multiplier les exemples de ce genre, qui montrent

que l'on trouvera $k < \frac{n - \sum n}{p-1}$ avec des valeurs de n plus rapprochées de x que ne l'indique la méthode générale, et il est possible que σ soit dans tous les cas l'exposant maximum de la puissance de $1.2...n$ qui divise $\frac{1.2...nx}{(1.2...x)^n}$; mais il ne serait pas facile de resserrer les limites n_0, N , de manière à obtenir une certitude à cet égard.

Sauf le cas isolé $n_0 = N = X = p^i - 1$, les résultats obtenus jusqu'ici ne s'appliquent qu'aux nombres x et n , qui ne sont pas compris dans les mêmes puissances consécutives d'un même nombre premier. S'il en était autrement, c'est-à-dire si x et n se trouvaient tous deux dans la première division du Tableau, la méthode générale ne pourrait plus s'appliquer sans modification. La difficulté consisterait dans le choix de limites n_0, N susceptibles de conduire à un maximum numérique pour μ dans l'iné-

galité $K < \mu \frac{n_0 - \sum n}{p-1}$, et il faudrait avoir recours à d'autres moyens. Dans son étendue actuelle, le présent travail suffit néanmoins pour montrer le parti que l'on peut tirer théoriquement de la quantité k dont la nature n'indique *a priori* autre chose qu'un élément matériel de calcul numérique.

SUR LES ZÉROS D'UNE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES;

Par M. GEORGES REMOUNDOS.

1. M. P. Painlevé, dans son Cours à l'École normale supérieure sur les fonctions abéliennes, a signalé comme vraisemblable une proposition, qui est une extension aux fonctions non uniformes du célèbre théorème de M. E. Picard, sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé ⁽¹⁾.

J'ai confirmé, dans certains cas intéressants, l'idée de l'éminent géomètre par une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 20 avril 1903 ⁽²⁾.

J'espère que prochainement j'établirai cette extension dans le cas le plus général, à l'aide des intégrales abéliennes et en suivant une marche analogue à celle qui a permis à M. Picard d'établir son théorème.

Je me propose de développer ici la Note citée en indiquant en même temps comment ces considérations se rattachent à un théorème plus général, concernant les zéros d'une classe très étendue de fonctions ayant une infinité de branches.

2. Considérons l'équation

$$(1) \quad F(z, u) = \sigma_0(u) + \sigma_1(u)A_1(z) + \sigma_2(u)A_2(z) + \dots + \sigma_v(u)A_v(z) = 0,$$

où $A_1(z), A_2(z), \dots, A_n(z)$ désignent des fonctions transcendentes entières de *genre fini* et $\sigma_0(u), \sigma_1(u), \dots, \sigma_v(u)$ des fonctions entières de u absolument quelconques.

Considérons pour le moment u comme paramètre, et appelons valeurs *exceptionnelles* de u celles pour lesquelles $F(z, u)$ admet un nombre fini de zéros.

S'il y a des valeurs de u pour lesquelles $F(z, u)$ soit une constante, ces valeurs sont toutes exceptionnelles; une telle valeur est l'infini ⁽³⁾; cette valeur exceptée, toutes les autres annulent à la

⁽¹⁾ Voir *Traité d'Analyse*, t. III, p. 346.

⁽²⁾ Je prie le lecteur de combiner la lecture de cette Note avec celle du présent Mémoire. Pour abrégé, je la désignerai par la lettre (N).

⁽³⁾ $F(x, \infty)$ n'est pas une constante, si tous ces $\sigma_i(u)$ ne sont pas des polynomes; cependant, l'infini est toujours une valeur exceptionnelle.

fois $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, ..., $\sigma_v(u)$ (sinon on pourrait abaisser v).

Pour abréger le langage, j'appellerai (E) leur ensemble.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1}$, $v+1$, valeurs exceptionnelles ne faisant pas partie de (E). D'après les hypothèses $F(z\alpha_1)$, $F(z\alpha_2)$, ..., $F(z\alpha_v)$ et $F(z\alpha_{v+1})$ seront des fonctions entières de genre fini n'ayant qu'un nombre fini de zéros et peuvent, par conséquent, se mettre sous la forme (1)

$$(2) \quad \begin{cases} F(z, \alpha_1) = P_1(z) e^{Q_1(z)}, & F(z, \alpha_2) = P_2(z) e^{Q_2(z)}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ F(z, \alpha_v) = P_v(z) e^{Q_v(z)}, & F(z, \alpha_{v+1}) = P_{v+1}(z) e^{Q_{v+1}(z)}. \end{cases}$$

Posons

$$\varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v) = \begin{vmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \sigma_2(\omega_1) & \dots & \sigma_v(\omega_1) \\ \sigma_1(\omega_2) & \sigma_2(\omega_2) & \dots & \sigma_v(\omega_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_v(\omega_v) & \sigma_2(\omega_v) & \dots & \sigma_v(\omega_v) \end{vmatrix} = [\sigma_1(\omega_k), \sigma_2(\omega_k), \dots, \sigma_v(\omega_k)]$$

($k = 1, 2, 3, \dots, v$).

Je démontrerai que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1}$ pris v à v doivent vérifier l'équation

$$(3) \quad \varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v) = 0,$$

c'est-à-dire que v quelconques de ces nombres doivent constituer une solution de cette équation.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, l'élimination de $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_v(z)$ (qui serait possible) entre les équations (2) nous conduirait à la relation suivante :

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{v+1}) P_1 e^{Q_1} - \varphi(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{v+1}) P_2 e^{Q_2} + \dots \\ + (-1)^{k+1} \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{v+1}) P_k e^{Q_k} + \dots \\ + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v) P_{v+1} e^{Q_{v+1}} = C, \end{cases}$$

où C est une certaine constante.

Or, cette relation est impossible, à moins que toutes ces quan-

(1) Voir É. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 56.

tités $\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{v+1})$, $\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{v+1})$, ..., $\varphi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v)$ ne soient nulles (¹).

M. Borel a fait une étude approfondie des relations de la forme (4) beaucoup plus générales que celle-ci et démontré leur impossibilité, à l'aide de la théorie de la croissance des fonctions entières, dans son important Mémoire. J'y renvoie le lecteur et je crois inutile de répéter ici la démonstration, qui est fort simple dans le cas qui nous occupe, car une dérivation de la relation (4) nous conduit immédiatement à une relation de la même forme, ayant une exponentielle de moins.

Je dois remarquer que j'ai supposé que $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_v(z)$, sont des transcendentes distinctes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas entre elles de relations linéaires avec des polynomes comme coefficients.

Cette hypothèse, qui ne diminue pas la généralité de la question, entraîne le fait qu'aucun des $Q(z)$ n'est une constante.

En désignant par (E) l'ensemble des racines de l'équation, chacune étant accompagnée par ses valeurs équivalentes,

$$(5) \quad \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v-1}, \omega) = 0,$$

on a le théorème suivant :

I. La fonction $u(z)$ à un nombre infini de branches, définie par l'équation (1), prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf, peut-être, un ensemble dénombrable qui fait partie de l'ensemble (E).

Ce théorème s'applique dans le cas où le nombre des valeurs exceptionnelles non équivalentes dépasse v , c'est-à-dire le nombre des transcendentes distinctes qui figurent dans $F(z, u)$.

3. Je dois ajouter que l'on arriverait aux mêmes résultats si l'on supposait que $\sigma_0(n)$, $\sigma_1(u)$, ..., $\sigma_v(u)$ sont des fonctions uniformes quelconques, n'ayant que des points singuliers essen-

(¹) Voir É. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (Acta Mathematica, t. XX, p. 385). Nous supposons ici que, parmi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1}$, il n'y a pas deux valeurs équivalentes. Deux valeurs α_i et α'_i seront dites *équivalentes* lorsque le rapport $F(z, \alpha_i) : F(z, \alpha'_i)$ est une fonction rationnelle. Si α_i est exceptionnel, α'_i l'est aussi.

tiels isolés; alors les points limites de l'ensemble (E) seraient parmi ces points singuliers essentiels, qui pourraient être aussi des valeurs exceptionnelles.

Dans les cas où les $\sigma(u)$ admettent des lignes singulières essentielles, il pourrait se faire que l'infini fût un point d'intermédiation incomplète de la fonction $u(z)$, d'après la terminologie de M. Painlevé (¹), c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs exceptionnelles fût continu, une aire, par exemple.

4. Passons maintenant au cas, qui a fait l'objet de la Note (N), et qui présente le plus grand intérêt; c'est le cas où $F(z, u)$ est un polynôme, par rapport à u . Soit

$$(6) \quad f(z, u) = a^v + A_1(z)u^{v+1} + A_2(z)u^{v+2} + \dots + A_{v-1}(z)u + A_v(z) = 0.$$

Ici, on voit tout de suite que la fonction $\varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v)$ est toujours différente de zéro, lorsque les valeurs des $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v$ sont distinctes et n'appartiennent pas à (E).

Quant aux valeurs (E), elles n'existent que dans le cas où le nombre des transcendentes distinctes qui figurent dans $f(z, u)$ est moindre que son degré v , et sont au plus v , l'infini compris. Elles sont d'une nature tout à fait différente des autres, car elles ne dépendent pas du tout des coefficients $A(z)$; elles seraient toujours exceptionnelles, quelles que soient les fonctions $A(z)$, pourvu que la forme de l'équation $f(z, u) = 0$ reste la même. Nous pouvons les appeler valeurs exceptionnelles *formelles*.

On en déduit immédiatement les théorèmes énoncés dans la Note (N).

Je n'ai pas cherché à reconnaître si le théorème (I) nous permet de trouver des fonctions à un nombre infini de branches définies par (1) et pour lesquelles le nombre des valeurs exceptionnelles soit limité, au plus égal à $v + 1$, l'infini compris.

5. Appelons *genre* de la fonction à v branches définie par l'équation (6) le plus grand des genres de ses coefficients $A_1(z), A_2(z), \dots, A_v(z)$.

(¹) Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles (Comptes rendus, t. CXXXI, 1900).

On donnerait une pareille définition de son ordre. L'ordre ainsi défini reste invariable quand on effectue sur u une transformation homographique.

En effet, en posant

$$u = \frac{au_1 + b}{cu_1 + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

on trouve une équation de la forme

$$(7) \quad u_1^g + a_1(z)u_1^{g-1} + a_2(z)u_1^{g-2} + \dots + a_{g-1}(z)u_1 + a_g(z) = 0.$$

dans laquelle les $a(z)$ désignent des fonctions méromorphes dont l'ordre est au plus égal à g (1), si g est le plus grand des ordres des $A(z)$. La transformation homographique ne peut donc élever l'ordre. Elle ne peut non plus l'abaisser, car alors la transformation inverse, qui est de même nature, l'élèverait. Les résultats récents de MM. Boutroux et Lindelöf ne nous permettent pas de dire la même chose pour le genre.

On voit que la définition que je donne ici est en parfait accord avec celle du genre ou de l'ordre des fonctions méromorphes donnée par M. Borel.

6. M. E. Maillet, dans son important Mémoire *Sur les fonctions entières* (Journal de M. Jordan, fascicule IV, 1902), appelle *fonctions quasi entières et quasi méromorphes* les fonctions de la forme

$$(8) \quad f(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + \varphi_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),$$

où $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ désignent des fonctions entières ou méromorphes et définit l'ordre d'une telle fonction dans le voisinage de chacun des points singuliers essentiels. Il démontre que $f(z)$ peut se mettre sous la forme d'un produit

$$(9) \quad f(z) = \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \psi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \dots, \psi_v\left(\frac{1}{z-a_v}\right),$$

où $\psi_1(t)$, ..., $\psi_v(t)$ sont aussi des fonctions entières ou méromorphes.

(1) Voir ÉMILE BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 62.

Cette propriété nous permet d'étendre facilement au cas où les $A(z)$ sont des fonctions quasi entières ou quasi méromorphes toutes les propositions que je viens de démontrer ici.

7. Convenons d'appeler fonction *algébroïde* toute fonction à un nombre fini de branches, définie par une équation telle que (6), où les $A(z)$ sont des fonctions entières ou méromorphes. On définirait de la même façon les fonctions *quasi algébroïdes*.

J'ai donc démontré le théorème suivant :

II. *Toute fonction transcendante algébroïde ou quasi algébroïde à ν branches et de genre fini prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf 2ν au plus. Si le nombre des valeurs exceptionnelles est supérieur à 2ν , la fonction $u(z)$ est algébrique.*

8. En terminant, je dois observer que l'on pourrait généraliser tous les théorèmes précédents en utilisant les relations exponentielles, dont l'impossibilité est démontrée par M. Borel dans son Mémoire déjà cité des *Acta mathematica* (1).

Observation. — Le théorème (I) suppose explicitement que tous les $A(z)$ sont des transcendentes. Le cas contraire nécessite une discussion spéciale que je ferai dans un autre travail.

Ici j'observe que, pour certaines valeurs exceptionnelles, le nombre des exponentielles, qui figurent dans le premier membre de la relation (4) peut bien se réduire. Cela arrive dans les cas où, parmi les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu+1}$, il y a des valeurs équivalentes

Il n'y a que le second membre qui ne subira aucune réduction. Il est aisé de voir qu'il est égal à $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu+1})$, avec

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu}, \alpha_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} \sigma_0(\alpha_1) & \sigma_0(\alpha_2) & \dots & \sigma_0(\alpha_{\nu}) & \sigma_0(\alpha_{\nu+1}) \\ \sigma_1(\alpha_1) & \sigma_1(\alpha_2) & \dots & \sigma_1(\alpha_{\nu}) & \sigma_1(\alpha_{\nu+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\nu}(\alpha_1) & \sigma_{\nu}(\alpha_2) & \dots & \sigma_{\nu}(\alpha_{\nu}) & \sigma_{\nu}(\alpha_{\nu+1}) \end{vmatrix}.$$

En appliquant donc toujours la proposition fondamentale de

(1) Au moment de la correction des épreuves, nous ajoutons que ce théorème de M. Borel va assez loin pour nous affranchir de toute restriction sur le genre des $A_i(z)$.

M. Borel (Mémoire cité), si l'on veut, par suite, tenir compte de toutes les valeurs exceptionnelles, on doit exprimer le théorème en question par la seule condition

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_v, x_{v+1}) = 0.$$

Ainsi, $v + 1$ valeurs exceptionnelles autres que (E) doivent satisfaire à cette relation.

**SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT
GUIDÉ PAR UNE COURBE RIGIDE;**

Par M. L. LECORNU.

L'expérience dite *bouclage de la boucle* donne une certaine actualité à la question suivante que je me propose d'examiner ici en détail ⁽¹⁾ :

Quelle doit être la forme d'une courbe rigide, située dans un plan vertical pour qu'un mobile pesant qui parcourt cette courbe sans frottement exerce sur elle une pression constante.

Pour fixer les idées supposons jusqu'à nouvel ordre que la courbe tourne sa concavité vers le bas et que le mobile posé du côté de cette concavité est animé d'un mouvement descendant. J'appelle θ l'angle aigu de la tangente avec l'horizontale, v la vitesse, ρ le rayon de courbure. Je prends la masse du mobile égale à l'unité et je désigne par g son poids, par λg l'action de la courbe sur le mobile égale et opposée à la pression constante du mobile sur la courbe.

On a la relation

$$(1) \quad \frac{v^2}{\rho} = g(\lambda + \cos \theta),$$

à laquelle s'ajoute l'équation des forces vives

$$(2) \quad v dv = g \sin \theta ds.$$

L'arc élémentaire ds est lié au rayon de courbure par la for-

⁽¹⁾ M. Bourlet (*Nouvelles Annales*, avril 1903) a déjà abordé cette question et montré que, même en tenant compte d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, le problème se ramène à des quadratures.

mule $\rho = \frac{ds}{d\theta}$. L'élimination de ρ et de ds donne

$$(3) \quad \frac{dv}{v} = \frac{\sin \theta d\theta}{\lambda + \cos \theta},$$

d'où, en appelant k une constante arbitraire,

$$(4) \quad v = \frac{k}{\lambda + \cos \theta}.$$

Portons dans (1) cette valeur de v . Il vient

$$(5) \quad \rho = \frac{k^2}{g(\lambda + \cos \theta)^2} = \frac{v^2}{kg}.$$

Le rayon de courbure est donc proportionnel au cube de la vitesse. Soit y la distance du mobile à l'horizontale sur laquelle sa vitesse s'annulerait. On a

$$(6) \quad y = \frac{v^2}{2g} = \frac{k^2}{2g(\lambda + \cos \theta)^2}.$$

La comparaison des équations (5) et (6) donne

$$(7) \quad \rho = \frac{2\sqrt{2g}}{k} y^{\frac{3}{2}}.$$

Le carré du rayon de courbure est donc proportionnel au cube de l'ordonnée.

On retrouve là une propriété connue de la parabole; celle-ci est une solution particulière de la question : elle correspond au cas où la pression est nulle.

Signalons en passant la solution singulière $\rho = \infty$, $\cos \theta = -\lambda$, qui correspond à une droite inclinée : il est clair d'ailleurs que toute trajectoire rectiligne répond à la question.

L'équation (4) admet une interprétation remarquable. Si l'on construit l'*hodographe* du mouvement en menant par une origine fixe un vecteur égal et parallèle à la vitesse v , les coordonnées polaires d'un point de cette hodographe sont v, θ . On en conclut immédiatement que :

L'hodographe est une section conique.

Soient a le demi-grand axe de cette conique et e son excentricité. En identifiant l'équation (4) avec l'équation

$$v = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

on trouve

$$e = \frac{1}{\lambda}, \quad a = \frac{ke}{1 - e^2} = \frac{k\lambda}{\lambda^2 - 1}.$$

D'après cela l'hodographe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la pression du mobile sur sa trajectoire est supérieure, égale ou inférieure au poids.

La vitesse aréolaire sur l'hodographe est $v^2 \frac{d\theta}{dt}$ ou $\frac{v^2}{\rho}$. Elle est donc, en vertu de la relation (5) égale à la constante kg . Comme l'origine de l'hodographe est un foyer de la conique, la constance de la vitesse aréolaire montre qu'on se trouve en présence du mouvement planétaire. En d'autres termes : si x, y sont les coordonnées du mobile pesant, le point dont les coordonnées sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ se meut exactement comme une planète.

Voici un corollaire de ce théorème. On sait que la vitesse du point qui décrit l'hodographe est identique à l'accélération totale du mobile considéré. Or, dans le cas présent, l'accélération totale, par hypothèse, est la résultante d'une accélération verticale g et d'une accélération λg normale à la vitesse. Ces deux composantes sont constantes. Si l'on revient à l'hodographe, on voit que :

Dans le mouvement planétaire la vitesse est à chaque instant la résultante de deux vitesses constantes, l'une perpendiculaire au grand axe et l'autre normale au rayon vecteur issu du Soleil.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier directement ce résultat.

Une autre conséquence du même théorème consiste dans la possibilité d'utiliser, pour l'étude du mouvement avec pression constante, les formules classiques dans lesquelles intervient l'anomalie excentrique.

Admettons d'abord que l'hodographe soit elliptique et appelons u

l'anomalie excentrique. On a

$$\begin{aligned} v &= a(1 - e \cos u), \\ \cos \theta &= \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u}, \quad \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{u}{2}, \\ u - e \sin u &= nt. \end{aligned}$$

Le moyen mouvement n qui figure dans cette dernière formule est égal à la constante des aires, qui est ici kg , divisée par ab . Donc

$$n = \frac{kg}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} = \frac{g \sqrt{1 - e^2}}{ae}.$$

Ces équations déterminent, en fonction du temps, la vitesse v et l'inclinaison θ de la tangente sur l'horizontale.

L'ordonnée y est fournie immédiatement par la relation

$$(8) \quad y = \frac{v^2}{2g} = \frac{a^2}{2g} (1 - e \cos u)^2.$$

Pour avoir l'abscisse x , il suffit d'intégrer la relation

$$dx = \cos \theta ds = v \cos \theta dt = \frac{a}{n} (1 - e \cos u) (\cos u - e) du.$$

Le calcul ne présente aucune difficulté et, en remplaçant n par sa valeur, on trouve

$$(9) \quad x = \frac{a^2 e}{\sqrt{1 - e^2} g} \left[-\frac{3}{2} eu + (1 + e^2) \sin u - \frac{e}{4} \sin 2u \right].$$

On connaît ainsi x, y en fonction de l'anomalie excentrique, et par conséquent en fonction du temps.

Si l'on forme l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve

$$ds = \frac{a^2 e}{g \sqrt{1 - e^2}} (1 - e \cos u)^2 du = \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} y du.$$

L'intégration donne

$$s = \frac{a^2 e}{\sqrt{1 - e^2} g} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) u - 2e \sin u + \frac{e^2}{4} \sin 2u \right].$$

La valeur de y peut se mettre sous la forme analogue

$$y = \frac{a^2}{2g} \left(1 + \frac{e^2}{2} - 2e \cos u + \frac{e^2}{2} \cos 2u \right).$$

Ces diverses formules montrent que l'expression $3es + (2 + e^2)x$ est fonction linéaire de $\sin u$, $\sin 2u$ et par conséquent s'exprime algébriquement en fonction de y . L'arc s est donc fonction algébrique des coordonnées de son extrémité variable.

La valeur de x ne se présente sous forme réelle que si l'excentricité e est inférieure à l'unité. Dans le cas où l'hodographe est hyperbolique ($e > 1$) on ramène à la forme réelle en posant $u = i\omega$, ce qui introduit des sinus et des cosinus hyperboliques. Les formules deviennent

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \frac{a^2 e}{g\sqrt{e^2-1}} \left[-\frac{3}{2} e \omega + (1 + e^2) \text{Sh } \omega - \frac{e}{4} \text{Sh } 2\omega \right], \\ y &= \frac{a^2}{2g} \left[1 + \frac{e^2}{2} - 2e \text{Ch } \omega + \frac{e^2}{2} \text{Ch } 2\omega \right], \\ \omega - e \text{Sh } \omega &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{ae} g t. \end{aligned}$$

Les deux coordonnées sont infinies en même temps que t . La courbe, symétrique par rapport à l'axe des y , présente deux branches paraboliques dont les directions asymptotiques sont $\tan \theta = \pm \sqrt{e^2-1}$. La valeur de x , positive pour les petites valeurs de t , devient ensuite négative : il y a donc un point double réel sur l'axe des y .

L'hodographe est constituée par la branche d'hyperbole tournant sa concavité vers le foyer.

Le cas intermédiaire $e = 1$ correspond à l'hodographe parabolique. Remplaçons, dans la formule (9), a par sa valeur $\frac{ke}{1-e^2}$. Pour que x demeure fini quand e tend vers l'unité, il faut que u soit infiniment petit. Développant alors la valeur de u suivant les puissances croissantes de u , on reconnaît que u doit être du même ordre que $\sqrt{1-e}$.

Si l'on pose $\frac{u}{2\sqrt{1-e}} = \varphi$, il vient à la limite

$$x = \frac{k^2}{4g} \left(\varphi - \frac{\varphi^5}{5} \right).$$

On trouve aussi

$$y = \frac{k^2}{8g} (1 + \varphi^2)^2, \quad \varphi + \frac{\varphi^3}{3} = \frac{2gt}{k}.$$

La trajectoire est une courbe unicursale du cinquième ordre avec un point double réel ($\varphi^4 = 5$) et deux branches paraboliques à direction asymptotique horizontale.

Si l'on fait croître e jusqu'à $+\infty$, on parvient au mouvement parabolique ordinaire dont l'hodographe est une droite verticale.

Restent à examiner les valeurs négatives de e . Le changement de signe de e , et par conséquent de λ , nous avertit que la pression est renversée, c'est-à-dire que le mobile est de l'autre côté de sa trajectoire. Pour bien voir comment les choses se passent, partons de la position pour laquelle $\theta = 0$ et soit v_0 la vitesse correspondante. La formule (4) devient $v = v_0 \frac{\lambda + 1}{\lambda + \cos \theta}$. Remplaçons λ

par $-\frac{1}{e'}$, e' étant la valeur absolue de e . Nous avons ainsi

$v = v_0 \frac{e' - 1}{e' \cos \theta - 1}$. Si e' est compris entre 1 et ∞ , l'hodographe est une branche d'hyperbole tournant sa convexité vers le foyer.

Les directions asymptotiques sont données par $\cos \theta = \frac{1}{e'}$, d'où

$\tan \theta = \sqrt{e'^2 - 1}$. La valeur (10) de x , dans laquelle il faut maintenant changer e en $-e'$, ne s'annule plus pour aucune valeur de ω , autre que zéro, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de point double réel sur l'axe de symétrie.

A mesure que la valeur absolue de e' se rapproche de l'unité, les deux asymptotes de l'hodographe tendent à se confondre; finalement, pour $e' = 1$, l'hodographe se réduit à une demi-droite horizontale. En même temps la trajectoire du mobile a pour limite une droite horizontale sur laquelle celui-ci se trouve posé: pour une pareille droite il est clair que la pression exercée par le mobile est égale à son poids, ce qui correspond bien à l'hypothèse $e' = 1$.

Supposons enfin e' compris entre l'unité et zéro. L'équation (1) mise sous la forme $\frac{v^2}{\rho} = g \left(\cos \theta - \frac{1}{e'} \right)$ montre que ρ est maintenant négatif, et en particulier que pour le point de départ ($\theta = 0$) la concavité de la courbe est tournée vers le haut. L'hodographe

est d'ailleurs elliptique et l'on retrouve la forme de trajectoire déjà rencontrée pour les valeurs de ϵ comprises entre zéro et l'unité avec cette seule différence que le point de départ est à un sommet inférieur au lieu d'un sommet supérieur.

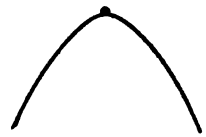
Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Les trois figures ci-dessus résument toute la discussion. La figure 1 correspond à l'hodographe elliptique (λ supérieur à 1 ou inférieur à $\epsilon - 1$). La figure 2 se rapporte à l'hodographe hyperbolique avec valeur positive de λ ($\lambda < 1$) et la figure 3 à l'hodographe hyperbolique avec valeur négative de λ ($\lambda > -1$). Les petits disques hachurés indiquent de quel côté de la trajectoire circule le mobile pesant.

INFLUENCE DE LA FORME DES ÉQUATIONS EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

Par M. C.-A. LAISANT.

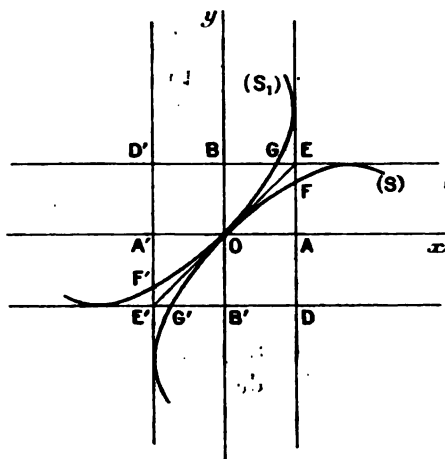
Il y a longtemps déjà j'ai publié, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, une Communication intitulée : *Sur la représentation analytique des figures et leur segmentation*, où je faisais ressortir la possibilité de représenter à volonté une partie seulement d'une courbe donnée. Les remarques très brèves que je présente ci-après se rattachent un peu au même ordre d'idées, tout en étant différentes de celles que je viens de rappeler. Elles reposent sur la limitation qu'on s'impose dans le champ de variation d'une coordonnée x , si dans l'équation de la figure entre une fonction $\varphi(x)$ qui devient imaginaire lorsque x dépasse certaines valeurs limites.

Je me bornerai, pour plus de brièveté, à des exemples simples.

Soit $y = \sin x$ ou $y - \sin x = 0$ l'équation d'une sinusoïde. On peut aussi bien l'écrire $x - \arcsin y = 0$, et elle représente la courbe entière, tout comme la précédente, puisque y ne varie qu'entre -1 et $+1$, mais qu'à chaque valeur de y correspondent

une infinité de valeurs de x . De même, $x - \sin y = 0$, ou $y - \arcsin x = 0$ représente toute la sinusoïde S_1 . Si nous écrivons $(y - \sin x)(x - \sin y) = 0$, nous aurons l'équation de l'ensemble des deux sinusoïdes. Mais $(y - \sin x)(y - \arcsin x) = 0$ représentera seulement la partie de la figure comprise entre les deux parallèles AD et $A'D'$ à Oy , puisque x ne peut varier que

Fig. 1.



de -1 à $+1$; c'est-à-dire toute la sinusoïde S_1 et une partie seulement ($F'O F$) de la courbe S . De même $(x - \sin y)(x - \arcsin y) = 0$ représente toute la sinusoïde S et l'arc $G'OG$ de la courbe S_1 . Enfin $(y - \arcsin x)(x - \arcsin y) = 0$ représente la partie comprise dans le carré $DE D'E'$, c'est-à-dire une figure ayant quatre points d'arrêt.

On reconnaîtrait de même que $\arcsin x = \arcsin y$ est une équation qui représente un segment de droite, diagonale $E'E$ du carré $DE D'E'$ dans la figure précédente.

Je pourrais rappeler aussi l'exemple de la courbe ayant pour équation $y = \cos \sqrt{x}$; elle a ou n'a pas un point d'arrêt sur Oy , suivant qu'on se croit obligé de donner à x des valeurs exclusivement positives, ou qu'on s'autorise à faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$.

Enfin, j'ai entendu des mathématiciens fort éminents, à qui je posais la question, se demander si $y = x$ ou $y = (\sqrt{x})^2$ sont deux équations qui représentent bien la même figure.

Tout ceci montre à quel point la forme des équations importe en Géométrie analytique, et quelles précautions devraient s'imposer dans l'enseignement, lorsqu'on opère des transformations de calcul.

SUR UN HYPERBOLOGRAPHE A LIQUIDE;

Par M. E. ESTANAVE.

Considérons une courbe C dont l'équation, rapportée à deux axes rectangulaires, est $y = f(x)$ et une sécante AB, soient A et B deux points consécutifs d'intersection de la droite et de la courbe C. Cherchons l'enveloppe de la droite AB qui limite sur la courbe C une surface d'aire donnée.

Tout d'abord, on peut remarquer que si l'aire ACB est constante le point de contact de AB et de son enveloppe sera au milieu de AB; il suffit pour s'en convaincre de considérer la position infiniment voisine de la droite AB.

Par suite, x_0, y_0, x_1, y_1 étant les coordonnées de A et de B, les coordonnées d'un point de la courbe Γ , enveloppe de AB, seront

$$(1) \quad X = \frac{x_0 + x_1}{2},$$

$$(2) \quad Y = \frac{y_0 + y_1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

On peut considérer l'aire constante S comprise entre la droite AB et la courbe C comme la différence entre l'aire du trapèze AabB et celle de la courbe C, a, b étant les projections de A et B sur l'axe des x . On a, par suite,

$$(3) \quad (x_1 - x_0) \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = S.$$

On obtiendra l'équation de la courbe Γ enveloppée par la droite AB en éliminant x_0 et x_1 entre les trois équations (1), (2) et (3).

Nous examinerons en particulier le cas où la courbe C est du second degré.

Si C est une conique, la courbe Γ est une conique homothé-

tique. La courbe Γ est donc un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la courbe C est un cercle, une ellipse, une parabole, une hyperbole ou même un système de deux droites constitué par les asymptotes de l'hyperbole.

D'après cela, on voit que la courbe C n'est pas, en général, plus simple que la courbe Γ , sauf dans le cas où la courbe C est formée par un système de deux droites.

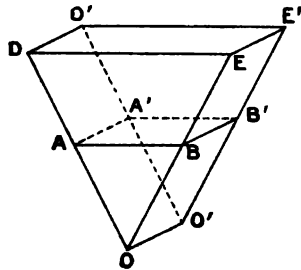
Considérons en particulier ce cas qui va nous conduire à l'hyperbolographe, qui est le but de cette Communication. Le principe de cet appareil est, en effet, fondé sur une propriété bien connue de la tangente à l'hyperbole.

Si l'on considère une branche d'hyperbole dont les asymptotes sont OA , OB , on sait que l'aire du triangle AOB , déterminée par la tangente AB sur les asymptotes, est constante quelle que soit la tangente AB à l'hyperbole considérée.

Cette branche d'hyperbole peut donc être considérée comme l'enveloppe du troisième côté d'un triangle AOB d'aire constante.

Si nous considérons (*fig. 1*) une cuve prismatique DOE , $D'O'E'$

Fig. 1.



contenant un volume V de liquide, l'aire du triangle AOB découpé par la surface libre AB , $A'B'$ sur la face DOE restera constante lorsque l'on fera pivoter la cuve autour de l'arête OO' supposée horizontale, car

$$AOB \times OO' = V.$$

Par suite, dans ce mouvement de pivotement autour de OO' la surface libre du liquide enveloppe un cylindre hyperbolique dont

les génératrices sont parallèles à OO' . Toute section normale à OO' sera une branche d'hyperbole identique à celle qu'enveloppe la droite AB .

Cela posé, on peut déterminer les relations qui existent entre le volume V de liquide, l'angle 2ω au sommet de la cuve et les longueurs a, b des axes de l'hyperbole enveloppée par AB .

En désignant par λ la longueur de l'arête OO' , S la surface constante du triangle AOB , a et b les axes de l'hyperbole, l'on a

$$\text{tang } \omega = \frac{b}{a}, \quad V = S\lambda = \frac{ab}{4}\lambda,$$

d'où l'on tire

$$a = 2\sqrt{\frac{V}{\lambda \text{ tang } \omega}}, \quad b = 2\sqrt{\frac{V}{\lambda} \text{ tang } \omega}.$$

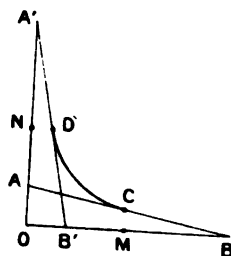
Si nous voulons obtenir une hyperbole qui a pour axes non plus a et b , mais Ka, Kb , les formules précédentes nous montrent que ω aura la même valeur et que le volume V' de liquide à introduire dans la cuve sera

$$V' = K^2 V.$$

Donc, les volumes de liquide à introduire dans une *même* cuve pour obtenir deux hyperboles homothétiques sont entre eux comme le carré du rapport d'homothétie.

Remarque. — La courbe dessinée par le liquide sur la section droite n'est pas à considérer dans son entier. Si, par exemple, pour fixer les idées, on considère une cuve prismatique à angle

Fig. 2.



droit, tous les points de la courbe dessinée (fig. 2) ne font pas partie de l'hyperbole équilatère.

En effet, AB étant la tangente à la courbe menée par le point B, point extrême de la course du liquide, le milieu de AB sera un point extrême de l'hyperbole. Nous devons limiter la courbe par deux parallèles aux asymptotes menées par les milieux M et N de OB et OA', les points B et A' étant les positions extrêmes de la nappe liquide.

On sait, d'autre part, que le rayon de courbure de l'hyperbole $xy = m^2$ en des points d'abscisse $x = m, 2m, 3m, \dots$ va très rapidement en grandissant et, par suite, la portion d'hyperbole située après le point C d'abscisse $4m$ se confond sensiblement avec une parallèle à l'asymptote. La partie intéressante de la courbe est justement celle comprise entre les points C et D que dessine le liquide.

Grâce aux résultats signalés par M. C.-A. Laisant dans un Mémoire (1) sur la segmentation des figures planes où il indique le moyen de représenter, par une équation, un fragment d'une courbe à l'exclusion de toute autre partie, nous pouvons donner la représentation analytique de la portion CD de l'hyperbole dessinée par le liquide. Il suffit de poser, avec M. Laisant,

$$x = m \left(\frac{b}{m} \right)^{-\sin t}, \quad y = m \left(\frac{b}{m} \right)^{\sin t},$$

avec la relation $ab = m^2$, ab étant les coordonnées du point C, ba celles du point D.

On a encore, en éliminant le paramètre t ,

$$\arcsin \frac{Lx - Lm}{Lb - Lm} + \arcsin \frac{Ly - Lm}{Lb - Lm} = 0.$$

Dispositif expérimental. — Le dispositif que j'ai adopté se compose essentiellement d'une cuve prismatique triangulaire (DOE, D'O'E') (*fig. 1*) ayant au sommet l'angle des asymptotes de l'hyperbole à tracer. La cuve est mobile autour d'un axe horizontal parallèle à l'arête au sommet OO'. Son mouvement de

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII, p. 123.

pivotement, qui doit être assez lent et continu, est obtenu à l'aide d'un mouvement d'horlogerie approprié.

Pour fixer sur une surface plane les diverses positions de la surface du liquide de la cuve, j'ai pris, dans une première série d'expériences, des plaques de cuivre et, comme liquide, une dissolution d'un sel de mercure. Le bichlorure ou l'azotate donnent des dépôts très nets de mercure sur le cuivre préalablement décapé, avec de l'émeri, par exemple.

Dans une autre série d'expériences, j'ai pris des plaques de fer avec une dissolution de sulfate de cuivre.

Les plaques ont la même forme que la cuve et viennent s'appuyer, parallèlement aux faces triangulaires de la cuve, sur les faces $DO\ D'O'$, $EO\ E'O'$. Elles sont maintenues par des taquets placés en DD' , EE' et OO' . Le liquide approprié étant introduit dans la cuve, on dispose la plaque et l'on fait pivoter lentement la cuve jusqu'à ce que la surface libre du liquide vienne dans le voisinage du bord EE' et ensuite du bord DD' . On retire alors la plaque sur laquelle se trouve dessinée la branche d'hyperbole. La courbe dessinée doit, comme je l'ai dit, être limitée par des parallèles aux asymptotes menées par les milieux de OD et de OE .

Dans les expériences faites, j'ai utilisé des cuves de zinc verni, d'angle au sommet de 90° et 60° , mais on pourrait se servir de cuves à angle variable, analogues au prisme à angle variable utilisé en Optique. On a ainsi à sa disposition deux variables ω et V , ce qui permet de tracer des hyperboles d'axes donnés à l'avance a et b .

Remarques. — Si l'on voulait avoir non plus sur une surface métallique, mais sur du papier les images de ces hyperboles, on pourrait prendre une plaque photographique qu'on a préalablement voilée en l'exposant à la lumière et la placer dans la cuve où l'on a mis un volume V d'un révélateur quelconque. Après fixation du cliché, on pourra tirer sur papier des épreuves de l'hyperbole tracée par le révélateur.

On peut aussi remarquer qu'on peut prendre pour profil C des fragments de courbes simples dont le tracé est facile. Par exemple, si le profil C est constitué par une branche de parabole et la tangente au sommet, le contour Γ est une courbe du quatrième degré.

Flotteurs. — En terminant, nous rattacherons le principe expérimental, qui nous a servi de point de départ, à la théorie des flotteurs.

Si nous considérons, en effet, un solide pesant qui flotte à la surface d'un liquide, la surface libre du liquide détache dans le solide, supposé homogène, un volume constant (le poids de son égal volume de liquide est égal au poids du corps). Les plans de flottaison qui découpent ainsi dans le corps des volumes égaux enveloppent une surface dite *surface d'isocarène* qui est, en général, une surface compliquée. Dans le cas d'un corps prismatique cette surface est simple.

Si nous considérons, en effet, un corps de forme prismatique (*fig. 2*) DOE D'O'E', si on le fait flotter verticalement, la ligne de flottaison sera AB A'B'. La surface d'isocarène sera un cylindre hyperbolique qui est aussi le lieu des intersections des plans de flottaison.

On peut imaginer qu'on passe d'une position à la position voisine en faisant tourner le corps d'un angle infiniment petit autour de cette génératrice. Pratiquement, on peut incliner le flotteur en déplaçant la charge : on aurait là un autre mode de génération de l'hyperbole, mais il paraît physiquement moins commode à réaliser que celui que nous avons adopté.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JANVIER 1904.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et à l'élection du Conseil.

Communication :

M. Laisant : *Sur l'influence de la forme des équations en Géométrie analytique.*

SÉANCE DU 20 JANVIER 1904.

PRÉSIDENTE DE M. BOREL.

Correspondance :

M. Pellet adresse une Note sur les *Fonctions entières*.

Communications :

M. Zervos : *Sur le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une autre fonction.*

M. Borel : Observations sur la Communication précédente.

M. Roche : *Sur les développements en séries de polynomes.*

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1904.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

Communications : •

M. Bricard : *Sur les six rapports anharmoniques de quatre quantités.*

M. Grévy : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Zervos : *Sur la représentation des fonctions non uniformes.*

M. Lecornu : *Sur les roulements à billes.*

SÉANCE DU 20 FÉVRIER 1904.

PRÉSIDENTE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Raffy : *Sur les surfaces enveloppes de sphères.*

M. Bricard : Observations sur la Communication précédente.

M. Zervos : *Sur les équations algébriques.*

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I^{re} PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en série*; 1886..... 15 fr.

II^{re} PARTIE : *Application de la Mécanique à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888..... 20 fr.

III^{re} PARTIE : *Fragment. (Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5^e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.)* Publiée par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891. 8 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 1).

	Pages
État de la Société au commencement de 1904.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin.....	xv

Mémoires et Communications.

[D 4 c] MITTAG-LEFFLER (G.). — Sur le théorème de M. Jensen....	1
[I 2 c] DE POLIGNAC (C.). — Recherches sur la divisibilité du nombre $\frac{1.2...nx}{(1.2...x)^n}$ par les puissances de la factorielle $1.2...n...$	5
[D 3 f β] REMOUNDOS (G.). — Sur les zéros d'une classe de fonc- tions transcendantes.....	44
[R 7 a α] LECORNU (L.). — Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide,.....	50
[K 6 a] LAISANT (C. A.). — Influence de la forme des équations en géométrie analytique.....	56
[X 8] ESTANAVE (E.). — Sur un hyperbolographe à liquide.....	58

Comptes rendus des séances (janvier et février 1904).....	63
---	----

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°)

JORDAN (Camillo), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2^e édition, entièrement refondue. 3 volumes in-8, avec figures, se vendant séparément :

TOME I : *Calcul différentiel*; 1893..... 17 fr.

TOME II : *Calcul intégral (Intégrales définies et indéfinies)*;
1894..... 17 fr.

TOME III : *Calcul intégral (Équations différentielles)*; 1896.. 15 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES

S'adresser, pour la rédaction, à M. BRICARD, boulevard Raspail, 295, Paris, 14^e;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXII. — FASCICULE II.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1904

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine* banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Bricard.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de *une figure* pour quatre pages de texte imprimé.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUE SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

Soit $F(z)$ une fonction entière d'un genre fini p . Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r , r étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif α , le produit

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de 0 à ∞ .

Je me propose d'indiquer comment la connaissance :

1° *D'une limite supérieure du nombre N correspondant à une valeur donnée de α ;*

2° *De la valeur que prend $F(z)$ pour $z = 0$;*

3° *Du genre p de cette fonction,*

Permet de calculer des limites inférieures des modules des zéros de $F(z)$ et, d'une manière plus générale, des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend une valeur C donnée à l'avance.

Tout d'abord l'égalité

$$(1) \quad M(r)e^{-\alpha r^{p+1}} < N$$

entraîne, comme l'on sait, la suivante : en posant

$$(2) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

on aura

$$(3) \quad |a_n| < N \frac{\beta^n}{n^c}$$

où c et β sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$(4) \quad c = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \left(\frac{ze}{c}\right)^c.$$

D'autre part, d'après un résultat que j'ai démontré dans un

travail antérieur (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312) : si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série (2) et si l'on forme la fonction

$$(5) \quad u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

on aura

$$(6) \quad \lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}}$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive r .

L'inégalité (6) subsistera manifestement si l'on substitue aux coefficients $a_1, a_2, a_3, \dots$ les quantités définies par le second membre de l'inégalité (3), de sorte qu'on peut prendre

$$(7) \quad u(r) = \frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \sum_1^{\infty} \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2nc}};$$

le second membre de (6) fournira une limite inférieure de λ quelle que soit la valeur réelle et positive r . Et en particulier en faisant $r = \frac{1}{\beta}$ on arrive à la proposition suivante :

Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction $F(z)$ est donnée par l'expression

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{p+1}} \sqrt{1 + b \left(\frac{K}{A} \right)^2}}$$

où K désigne une limite supérieure de N ; A le module de $F(0)$; a et b deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$\alpha = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}} \quad b = \theta \left(\frac{2}{p+1} \right),$$

$\theta(t)$ désignant la transcendante

$$\theta(t) = \sum_1^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes a et b restent les mêmes pour toutes les fonc-

tions $F(z)$ d'un même genre p et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

Pour $p = 0$,

$$a = e = 2,7183; \quad b = \theta(2) = 1,0639;$$

Pour $p = 1$,

$$a = \sqrt{2}e = 2,3316; \quad b = \theta(1) = 1,2913;$$

Pour $p = 2$,

$$a = \sqrt[3]{3}e = 2,0128; \quad b = \theta(\frac{2}{3}) = 1,5383; \quad \dots$$

En remplaçant dans (8) A par $|F(0) - C|$ cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C.

SUR LES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR UNE CLASSE ÉTENDUE D'INTÉGRALES DÉFINIES;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Les intégrales de la forme

$$(1) \quad \int_L R(t, z) dt,$$

où R est une fonction *rationnelle en z*, à coefficients fonctions *quelconques de t*, sont susceptibles de représenter des fonctions analytiques arbitraires de la variable z .

En effet, toute fonction analytique de z se laisse définir, et cela d'une infinité de manières, par des intégrales de la forme (1), qui la représentera dans telle ou telle partie du plan.

Ainsi, la formule fondamentale de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t)}{t - z} dt,$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par des différentiations, des changements de la variable ou du chemin d'intégration, etc., fournissent des expressions analytiques de la fonction $F(z)$ sous la forme (1).

On en déduit une infinité d'autres formules du même type en les appliquant à des fonctions assujetties à des conditions plus particulières. Telles sont, par exemple, les formules de Stieltjes (1)

$$F(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \psi(t)}{t^2 + z^2} dt,$$

$$F(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \varphi(t)}{t^2 + z^2} dt$$

[où φ et ψ sont la partie réelle et le coefficient de i dans $F(it)$], applicables à des classes étendues des fonctions; ou bien les formules, en nombre illimité, de la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, z) F(\lambda + ti) dt,$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, z) F(t + \mu i) dt,$$

valables, la première dans les cas où la fonction $F(z)$ est holomorphe pour les z à partie réelle plus grande que λ , la seconde lorsque $F(z)$ est holomorphe pour les z à coefficient de i plus grand que μ (2), etc.

Une fonction $F(z)$ étant donnée par son développement de Taylor

$$F(z) = A_0 + A_1(z - a) + A_2(z - a)^2 + \dots,$$

le coefficient A_n se laisse mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$(2) \quad A_n = \int_L A(t) [r(t)]^n dt,$$

(1) STIELTJES, *Sur le développement de $\log \Gamma(a)$* (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1889, p. 425-441).

(2) PETROVITCH, *Généralisation de certaines formules de Stieltjes* (*Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. XVII, 1903).

ou sous la forme d'une somme de termes (2); ceci fait, on aura

$$F(z) = \int_L \frac{A(t)}{1 - (z - a)r(t)} dt.$$

On connaît des solutions particulières du problème d'exprimer A_n sous la forme (2) pour des cas très étendus. M. Le Roy, par exemple, a indiqué la manière de mettre A_n sous la forme

$$A_n = \int_0^1 A(t) t^n dt$$

toutes les fois que A_n est une fonction de n régulière dans le domaine de l'infini, ou encore si A_n est exprimable par une série procédant suivant des puissances positives quelconques de n et, en particulier, si A_n est une fonction algébrique de n régulière à l'infini ou n'ayant qu'un pôle (1).

D'autres solutions sont fournies par celles du *problème des moments* traité récemment par MM. Stieltjes, Borel et Le Roy, et consistant à mettre une suite dénombrable de quantités $A_0, A_1, A_2, \dots$, sous la forme

$$A_n = \int_0^\infty \varphi(t) t^n dt$$

On peut, d'ailleurs, transformer ces formules en une infinité d'autres rentrant dans le type (2). Dans des cas particuliers, on aura des solutions diverses du même problème par de nombreuses intégrales définies connues de la forme (2) (2).

Certaines classes spéciales de fonctions $F(z)$ se laissent exprimer par une formule de la forme (1) par des procédés particuliers ne convenant qu'à de telles fonctions. C'est ainsi que les formules connues

$$\int_0^1 [F(0) + z F'(zt)] dt = F(z),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (z-1) \sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{z}}$$

fournissent le moyen d'exprimer le logarithme, ou l'arc tang, ou

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1900.

(2) Voir, par exemple, les formules de la page 77 de ce Mémoire.

bien la racine carrée d'une fonction rationnelle quelconque de z sous la forme d'une intégrale portant sur une fonction rationnelle de z , etc.

2. Remarquons maintenant qu'une fois la fonction $F(z)$ exprimée d'une manière quelconque sous la forme (1), on saura l'exprimer d'une infinité de manières par une intégrale de la forme que nous avons ici en vue.

En effet, il existe un nombre illimité de fonctions $\Phi(t, z)$, rationnelles en z et jouissant de cette propriété que pour toute valeur de z , appartenant à une certaine partie du plan, on ait

$$(3) \quad \int_L \Phi(t, z) dt = 0.$$

Ainsi, l'arc d'intégration L formant un contour fermé et $P(t, z)$, $Q(t, z)$ étant deux polynômes en z à coefficients fonctions uniformes en t , si les deux équations

$$P = \infty, \quad Q = 0,$$

pour $|z| < a$ (a étant un nombre réel et positif donné) n'ont pas de racines en t comprises à l'intérieur du contour L , on aura

$$\int_L \frac{P(t, z)}{Q(t, z)} dt = 0$$

pour toute valeur de z à module inférieur à a .

Si le chemin L coïncide avec l'intervalle $(0, \infty)$, on peut prendre pour $\Phi(t, z)$ la fonction

$$\frac{1}{1+t^2} \frac{\lambda z \cos t - z^2}{\lambda^2 - 2\lambda z \cos t + z^2}$$

(où λ est un nombre réel et positif quelconque); l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{1+t^2} dt$$

étant nulle pour toute valeur positive de n , on aura

$$\int_0^\infty \Phi(t, z) dt = 0$$

pour toute valeur de z à module inférieur à λ .

De même, on sait qu'il y a une infinité de fonctions $\varphi(t)$ jouissant de cette propriété que, pour $n = 0, 1, 2, \dots$, on ait

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) t^n dt = 0 \quad (1);$$

on construira, à l'aide de telles fonctions, une infinité de fonctions $\Phi(t, z)$ satisfaisant à la condition (3), etc.

De telles fonctions $\Phi(t, z)$ existent pour un chemin L quelconque; en en ajoutant autant qu'on voudra à la fonction figurant sous le signe de l'intégrale (1), on aura des représentations analytiques, en nombre illimité, de la fonction donnée $F(z)$ sous la forme de l'intégrale portant sur une fonction rationnelle en z .

3. Les fonctions $F(z)$, définies par des intégrales (1), ne sont donc pas des fonctions spéciales : toute fonction analytique est susceptible d'être exprimée d'une infinité de manières sous cette forme.

De plus, à des fonctions $F(z)$ compliquées, à des transcendentes irréductibles aux fonctions usuelles correspondent souvent les fonctions $R(t, z)$ rationnelles en z à coefficients fonctions très simples. Tel est, par exemple, le cas de la fonction

$$\frac{e^{-at^2}}{1 - ze^{-bt^2}}$$

(le chemin L étant l'intervalle $0, \infty$) correspondant à la transcendente irréductible

$$F(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{a + bn}};$$

ou bien le cas de la fonction

$$\frac{e^{-t} - e^{-bt} + ze^{-bt}(1 - e^{-at})}{(1 - ze^{-at})t},$$

(L étant l'intervalle $0, \infty$) correspondant à la transcendente

$$F(z) = \sum_0^{\infty} \log(a + bn) z^n, \quad \dots$$

(1) Voir, par exemple, BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, Chap. II.

Des transcendentes pareilles se présentent, d'ailleurs, d'elles-mêmes dans une foule de problèmes variés, directement exprimées sous la forme que nous avons ici en vue.

Ainsi l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{f(x, z)} = \frac{dy}{\varphi(y)},$$

où f est une fonction rationnelle en z et quelconque en x , sera, lorsqu'on y fixe la valeur de x , une fonction de z qui s'exprime par des combinaisons simples de fonctions fournies par des quadratures et de certaines fonctions $F(z)$ directement exprimées sous la forme (1).

En y faisant, par exemple, $x = \infty$, on aura la valeur asymptotique de l'intégrale exprimée comme fonction du paramètre z . La valeur asymptotique, par exemple, de l'intégrale de l'équation

$$(e^{\alpha x} - z e^{\beta x}) \frac{dy}{dx} = \varphi(y) \quad (0 < \alpha < \beta),$$

dans les cas où l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

est à l'intégrale uniforme, sera ou bien une fonction rationnelle de la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\alpha + (\beta - \alpha)n}},$$

ou bien rationnelle en $e^{a\theta(z)}$, ou bien algébrique en $\text{sn}[a\theta(z)]$, où a , le module de sn et les coefficients de ces fonctions rationnelles ou algébriques étant constants.

Étant donnée une équation algébrique du premier ordre

$$(4) \quad F\left(x, y \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

à points critiques fixes et du genre zéro, l'évaluation de l'intégrale $\int_L y dx$ ou, plus généralement, de

$$(5) \quad \int_L R(x, y) dx$$

(R étant rationnelle en y , quelconque en x), conduit également aux transcendentes dont nous nous occupons ici. Car l'intégrale y sera une combinaison rationnelle d'une certaine fonction

$$u = \frac{Cv_1 + v_2}{Cw_1 + w_2}$$

fournie par l'intégration d'une certaine équation de Riccati, rattachée à l'équation (4). L'intégrale (5) sera donc de la forme

$$\int_L P(x, C) dx,$$

où P est une certaine fonction rationnelle en C à coefficients fonctions de x dépendant algébriquement de v_1, v_2, w_1, w_2 et des coefficients fonctions de l'équation différentielle (4) : elle sera donc une fonction de la constante d'intégration C qui se présente directement sous la forme (1).

Dans le cas, par exemple, de l'équation bien simple

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - \alpha^2 x,$$

l'intégrale

$$\int_0^\infty (y + \alpha) dx$$

a pour valeur

$$C\sqrt{\alpha\pi} \sum_0^\infty \frac{C^n}{\sqrt{n+1}} \dots$$

4. Supposons maintenant qu'on se donne à l'avance une intégrale déterminée (1), où les coefficients de la fonction rationnelle R, ainsi que le chemin L, soient précisés. Il y aurait un intérêt manifeste à étudier les particularités de la fonction $F(z)$ qu'elle représente directement sur l'expression analytique ainsi donnée, sans chercher à la ramener à des combinaisons explicites de fonctions connues. C'est à cet ordre d'idées que se rattache la présente étude. Je m'y propose, en particulier, d'indiquer quelques relations existant entre certaines particularités des fonctions figurant comme coefficients dans la fonction rationnelle R et celles de la fonction $F(z)$ elle-même, correspondant à la fonction R et le chemin d'intégration donnés.

Tout d'abord, le développement de l'intégrale en série ordonnée suivant les puissances de la variable z met en évidence la possibilité d'exprimer la fonction $F(z)$ comme combinaison simple de diverses puissances de z et de certaines fonctions $\theta(z)$ jouant, par rapport à $F(z)$, le rôle d'une espèce d'éléments simples.

Les coefficients des séries

$$\theta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

ainsi obtenues et correspondant à ces éléments simples apparaissent sous la forme

$$a_n = \int_1^\infty \Lambda(t) [r(t)]^n dt,$$

où les fonctions $\Lambda(t)$ et $r(t)$ dépendent algébriquement des coefficients de la fonction rationnelle R .

La forme même de la dernière intégrale, déjà étudiée sous quelques rapports et dans certains cas plus particuliers, rend particulièrement faciles diverses recherches concernant, par exemple, la manière dont a_n varie avec n , ses limites supérieures ou inférieures, sa valeur approchée ou valeur asymptotique pour n très grand, la convergence des séries $\theta(z)$ et diverses autres particularités des fonctions $\theta(z)$ (zéros, singularités, valeurs asymptotiques, mode de croissance, etc.).

Les résultats récents sur les séries de Taylor et sur les fonctions représentées par des intégrales définies, comme par exemple ceux de MM. Hadamard et Le Roy, y trouveront un vaste champ d'applications variées. Je me bornerai à en signaler quelques-unes les plus directes, n'ayant pour but que d'en faire ressortir la possibilité et l'intérêt d'une théorie plus complète des fonctions faisant l'objet de ce Mémoire.

II. — DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE TAYLOR.

1. Considérons l'intégrale

$$(6) \quad F(z) = \int_1^\infty R(t, z) dt,$$

où R est une fonction rationnelle de z à coefficients fonctions

analytiques quelconques de t . Nous supposons que ni le numérateur ni le dénominateur de R ne contiennent de facteurs de la forme $(z - a)^k$ (a étant constant), sans quoi on tirerait ces facteurs en dehors de l'intégrale. La fonction R étant holomorphe pour les valeurs de z au voisinage de $z = 0$, on aura, pour z suffisamment petit,

$$(7) \quad R(t, z) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \dots$$

D'après le théorème bien connu sur les développements des fonctions rationnelles en séries de Taylor, le coefficient général H_n sera la somme d'un nombre limité de termes ayant tous la forme

$$(8) \quad P_i(n, t) [r_i(t)]^n;$$

les fonctions $r_i(t)$ ne dépendent que de n et s'obtiennent comme racines d'une certaine équation algébrique en r

$$(9) \quad G(t, r) = 0,$$

transformée en $z = \frac{1}{r}$ de l'équation obtenue en égalant à zéro le dénominateur de $R(t, z)$; les fonctions $P_i(n, t)$ sont des polynômes en n à coefficients fonctions de t dépendant rationnellement des coefficients des diverses puissances de z dans $R(t, z)$; enfin, le degré du polynôme P_i en n sera égal à $\lambda_i - 1$, où λ_i désigne l'ordre de la racine correspondante $r = r_i(t)$ de l'équation algébrique (9). A chaque racine r de (9) correspondra un terme (8) dans l'expression de H_n .

Le coefficient H_n sera donc la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n^k A_i(t) [r_i(t)]^n,$$

où les fonctions $A_i(t)$ et $r_i(t)$ ne dépendent pas de n et dépendent algébriquement des coefficients de la fonction $R(t, z)$.

Par conséquent, en supposant que l'intégration de la série (7) soit légitime, on aura le résultat suivant :

Le coefficient a_n de la série

$$(10) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

correspondant à la fonction étudiée (6), sera la somme d'un

nombre limité de termes

$$(11) \quad n^k I(n),$$

où k est un entier positif, et $I(n)$ une fonction de n donnée par la formule

$$(12) \quad I(n) = \int_L A(t) [r(t)]^n dt.$$

La détermination du coefficient a_n se ramène donc au calcul des intégrales de la forme (12).

Il arrive, toutefois, dans certains cas particuliers, que quelques-unes parmi les intégrales $I(n)$, correspondant à la fonction donnée $F(z)$, soient infinies ou indéterminées, quoique $F(z)$ soit holomorphe pour $z = 0$. De tels cas se présentent lorsque plusieurs intégrales $I(n)$, multipliées par une même puissance de n , sont infinies ou indéterminées quel que soit n , cette discontinuité disparaissant dans leur somme. *La détermination du coefficient a_n se ramène alors au calcul des intégrales de la forme*

$$(13) \quad \int_L \{ A_1(t) [r_1(t)]^n + A_2(t) [r_2(t)]^n + \dots \} dt,$$

où le nombre de termes sous le signe $\int$ est limité.

Ceci se présente, par exemple, dans le cas de la fonction

$$(14) \quad F(z) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{1-z} - \frac{e^{-2t}}{1-ze^{-t}} \right\} \frac{dt}{t},$$

à laquelle correspond le coefficient

$$(15) \quad a_n = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t} e^{-nt} \right] dt;$$

chacune des deux intégrales (15), prise séparément, est infinie; le coefficient a_n est, cependant, fini et a pour valeur

$$a_n = \log(n+2).$$

2. Revenons aux intégrales (12) auxquelles se ramène, dans le cas général, le calcul des coefficients a_n .

D'abord, dans certains cas ces intégrales se laissent exprimer sous la forme explicite comme fonctions de n .

Supposons, par exemple, que l'arc d'intégration forme un contour fermé qui entourera alors nécessairement des singularités d'au moins une fonction $A(t)$ et $r(t)$; $I(n)$ sera la somme d'intégrales prises le long des circonférences de rayon infiniment petit décrites autour de ces singularités. En particulier, chaque pôle de $A(t)$ donnera, dans l'expression de $I(n)$, un terme de la forme

$$n(n-1)\dots(n-h)ab^n,$$

où a et b sont des constantes indépendantes de n et h un entier positif également indépendant de n . Chaque pôle de $r(t)$ fournira un terme dont la valeur sera donnée par le résidu correspondant; celui-ci peut représenter des fonctions infiniment variées de n , comme l'on s'assure, par exemple, en prenant

$$r(t) = \frac{1}{t},$$

dans quel cas le résidu représentera le coefficient c_{n-1} de la série

$$A(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

Un grand nombre d'intégrales $I(n)$ se calculerait par des méthodes spéciales liées aux hypothèses faites sur les fonctions $A(t)$, $r(t)$ et le chemin d'intégration L , ou à l'aide des formules connues du Calcul intégral. En voici quelques intégrales connues de cette espèce :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-at} e^{-nbt} dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a+bn}}, \\ \int_0^\infty e^{-nt} \cos at dt &= \frac{n}{a^2+n^2}, \\ \int_0^\infty e^{-nt} \cos at^2 dt &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{n+\sqrt{a^2+n^2}}{a^2+n^2}}, \\ \int_0^\infty e^{-nt} \sin at \frac{dt}{t} &= \arctan \frac{a}{n}, \\ \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{a+it} \right)^n e^{ctt} dt &= \frac{2\pi}{e^{ac}} \frac{c^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}, \\ \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{a^2+t^2} \right)^n dt &= 2\pi \left(\frac{1}{2a} \right)^{2n-1} \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{1.2.3\dots(n-1)}, \\ \int_0^1 \frac{t^{2n} dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}, \\ \int e^t \left(\frac{1}{t} \right)^n dt &= \frac{2\pi i}{1.2.3\dots(n-1)} \end{aligned}$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence décrite autour de l'origine), etc.

3. Dans les cas où il est impossible d'exprimer $I(n)$ comme fonction explicite de n , on peut en préciser des limites supérieures ou inférieures soit pour la valeur même de $I(n)$, soit pour son module; la forme même de ces intégrales rend particulièrement faciles les recherches de cette espèce.

Ainsi, le chemin d'intégration étant réel ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$, le théorème de la moyenne fournira soit des limites supérieures, soit des limites inférieures de $I(n)$. Pour les intégrales, par exemple, de la forme

$$I(n) = \int_0^{\infty} A(t) e^{ant} dt \quad (a < 0),$$

on aurait

$$\frac{M_1}{n} < I(n) < \frac{M_2}{n},$$

M_1 et M_2 étant des constantes; pour

$$I(n) = \int_0^{\infty} A(t) e^{ant^2} dt,$$

il serait

$$\frac{M_1}{\sqrt{n}} < I(n) < \frac{M_2}{\sqrt{n}};$$

pour

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \left(\frac{1}{a^2 + t^2} \right)^n dt,$$

on aurait

$$M_1 \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} \left(\frac{1}{2a} \right)^{2n-1} < I(n) < M_2 \frac{n(n+1)\dots(2n-1)}{1.2.3\dots(n-1)} \left(\frac{1}{2a} \right)^{2n-1}.$$

Lorsque le chemin d'intégration ou les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ ne sont pas réels, en choisissant, par exemple, deux fonctions $\lambda(t)$ et $u(t)$ de sorte qu'on ait constamment, le long de l'arc d'intégration,

$$|A(t)| \leq |\lambda(t)|,$$

$$|r(t)| \leq |u(t)|,$$

on aurait

$$|I(n)| < \int_L |\lambda(t)| |u(t)|^n ds,$$

s étant la longueur de l'arc L .

En particulier, on peut prendre comme intégrales de comparaison celles où la fonction $u(t)$ se réduit à une constante. Soit M le *minimum maximorum* du module de $r(t)$ le long des arcs obtenus en déformant L de manière que $I(n)$ conserve la même valeur que le long de L . Toutes les fois que l'intégrale

$$P = \int_L |\lambda(t)| ds$$

est une valeur finie, déterminée et différente de zéro, on aura

$$|I(n)| < PM^n.$$

Si le *minimum maximorum* n'existe pas, on prendrait pour M la plus grande valeur qu'acquiert la fonction $r(t)$ le long de L .

En faisant des hypothèses sur les fonctions $A(t)$ et $r(t)$, et en prenant pour fonctions de comparaison des fonctions variées de t , on aura des intégrales de comparaison en nombre illimité.

Considérons, par exemple, les intégrales de la forme

$$I(n) = \int_0^\infty A(t) [r(t)]^n dt,$$

où les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont supposées réelles pour toute valeur réelle positive de t et satisfont à cette condition qu'on ait en valeur absolue

$$A(t) \leq kt, \quad r(t) \leq \frac{h}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$$

On aura alors en valeur absolue (pour $n > 2$)

$$I(n) < kh^n \int_0^\infty \frac{t dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ou bien

$$I(n) < \frac{kh^2}{n-2} \left(\frac{h}{a}\right)^{n-2}.$$

Signalons, en passant, un résultat plus général fourni par des considérations de ce genre. Soit $f(z)$ une fonction réelle pour z réel et positif, holomorphe pour toute valeur de z à partie réelle, positif et tendant vers zéro lorsque z croît indéfiniment avec un argument quelconque compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

La valeur absolue du coefficient $\Lambda_n (n > 1)$ de la série de Taylor

$$f(z) = \Lambda_0 + \Lambda_1(z-a) + \Lambda_2(z-a)^2 + \dots,$$

où a est une quantité réelle et positive quelconque, est inférieure à la valeur

$$\frac{2N}{(n-1)\pi a^{n-1}},$$

N désignant la plus grande valeur absolue qu'acquiert le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$ pendant que z varie par valeurs positives de $z=0$ à $z=\infty$, et $\psi(z)$ représentant le coefficient de i dans $f(zi)$.

En effet, comme je l'ai montré ailleurs ⁽¹⁾, pour toute fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions énumérées, on aura, en valeur absolue,

$$\Lambda_n < \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{(\sqrt{a^2+t^2})^{n+1}} dt.$$

Or, le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$, nul pour $z=\infty$, fini pour $z=0$, et holomorphe pour toute valeur positive de z , présentera certainement un maximum N fini et déterminé, lorsque z varie de $z=0$ à $z=\infty$, de sorte qu'on aura en valeur absolue, pour les valeurs positives de t ,

$$\psi(t) \leq Nt,$$

ce qui conduit directement au résultat énoncé.

4. Outre les méthodes de comparaison précédentes, on peut, grâce à la forme des intégrales $I(n)$, avoir des limites supérieures de $I(n)$ par bien d'autres procédés.

Ainsi, lorsque le chemin L forme un contour fermé, on aurait, dans des cas étendus, des limites supérieures du module de $I(n)$ par des procédés analogues à celui par lequel on détermine de telles limites pour les coefficients des fonctions entières en partant de leur expression sous la forme de l'intégrale de Cauchy.

Supposons, pour indiquer un autre procédé, que le chemin L se réduise à un intervalle limité ou illimité de valeurs réelles, les

⁽¹⁾ Généralisation de certaines formules de Stieltjes (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1903, p. 331).

fonctions $A(t)$ et $r(t)$ étant réelles, finies et continues entre les limites d'intégration. L'inégalité de M. Schwartz

$$\left[\int \varphi \psi dt \right]^2 < \left[\int \varphi^2 dt \right] \left[\int \psi^2 dt \right],$$

valable pour les fonctions φ et ψ réelles et intégrables entre les limites de l'intégration, appliquée aux fonctions

$$\varphi = A(t), \quad \psi = [r(t)]^n,$$

conduit à l'inégalité

$$I(n) < A \sqrt{Y(n)},$$

où A est une constante indépendante de n ayant pour valeur

$$A = \sqrt{\int_L [A(t)]^2 dt},$$

et $Y(n)$ étant une fonction de n donnée par

$$Y(n) = \int_L [r(t)]^{2n} dt.$$

Appliquée, par exemple, aux intégrales

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \left(\frac{1}{a + bt^2} \right)^n dt,$$

où a et b sont des constantes positives et $A(t)$ une fonction telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(t) dt$$

ait un sens, la dernière inégalité conduit à

$$I(n) < \alpha \beta^n \sqrt{\frac{2n(2n+1) \dots (4n-1)}{1.2.3 \dots (2n-1)}},$$

α et β étant indépendants de n .

D'autres limites de $I(n)$ seraient fournies par le théorème connu d'Ossian Bonnet consistant en ce que, si $\varphi(x)$ est une fonction positive et croissante dans l'intervalle (a, b) , on aura

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

(avec $a < \xi < b$), et si $\varphi(x)$ est positive et décroissante, on aura

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

Supposons, par exemple, que le chemin L , ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ figurant dans $I(n)$, soient réels, et que, de plus, $r(t)$ et $r'(t)$ conservent des signes invariables pendant que t varie dans l'intervalle (a, b) [nous considérerons le signe de $r(t)$ comme positif] et enfin que l'intégrale

$$\int_{\xi}^{\eta} A(t) dt$$

reste finie, déterminée et différente de zéro pour toute valeur de ξ et η comprise entre a et b .

En appliquant le théorème de Bonnet aux fonctions

$$f(t) = A(t), \quad \varphi(t) = [r(t)]^n,$$

on aura

$$I(n) = A B^n,$$

où A et B sont des constantes ayant pour valeurs :

Si $r'(t) > 0$,

$$A = \int_{\xi}^b A(t) dt, \quad B = r(a);$$

si $r'(t) < 0$,

$$A = \int_a^{\eta} A(t) dt, \quad B = r(b),$$

ξ et η étant deux nombres compris entre a et b .

Si donc N et M représentent une limite supérieure et une limite inférieure des intégrales A ainsi définies, on aura

$$NB^n < I(n) < MB^n.$$

III. — DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES.

1. Le coefficient b_n de la série

$$R(t, z) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \dots$$

correspondant à la fonction $F(z)$ étudiée, sera, comme nous l'avions remarqué, la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$P(t, n)[r(t)]^n,$$

où les $r(t)$ ne dépendent pas de n et s'obtiennent comme racines d'une certaine équation algébrique en r à coefficients fonctions de t ; $P(t, n)$ sont des polynômes en n à coefficients fonctions de t des degrés indépendants de n .

Chaque polynôme $P(t, n)$ se laisse mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$P(t, n) = A_0(t) + nA_1(t) + n(n-1)A_2(t) + \dots,$$

où les $A_i(t)$ seront fonctions de t définies par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} P(t, 0) &= A_0, \\ P(t, 1) &= A_0 + A_1, \\ P(t, 2) &= A_0 + 2A_1 + 2A_2, \\ P(t, 3) &= A_0 + 3A_1 + 6A_2 + 6A_3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Par suite, le coefficient b_n se laisse exprimer sous la forme de la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k)I(n),$$

où k ne dépend pas de n , et où $I(n)$ sera de la forme

$$(16) \quad I(n) = \int_L A(t)[r(t)]^n dt.$$

Les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ ne dépendent pas de n et dépendent *algébriquement* des fonctions de t figurant comme coefficients des diverses puissances de z dans $R(t, z)$.

La fonction étudiée $F(z)$ s'exprime donc sous la forme de la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$\sum_0^n n(n-1)\dots(n-k)I(n)z^n = z^k \frac{d^k}{dz^k} \sum_0^n I(n)z^n,$$

d'où le théorème suivant, fondamental pour l'étude que nous nous proposons :

En désignant par

$$I_1(n), I_2(n), I_3(n), \dots$$

les diverses intégrales de la forme (16), rattachées à la fonction considérée $F(z)$, et par

$$\theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z), \dots$$

les diverses fonctions

$$\theta(z) = \sum_0^{\infty} I(n) z^n = \int_L \frac{A(t)}{1 - z r(t)} dt,$$

correspondant à ces intégrales, la fonction $F(z)$ se laisse mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de termes

$$\begin{aligned} \theta_1(z), \quad z \frac{d\theta_1}{dz}, \quad z^2 \frac{d^2\theta_1}{dz^2}, \quad \dots, \\ \theta_2(z), \quad z \frac{d\theta_2}{dz}, \quad z^2 \frac{d^2\theta_2}{dz^2}, \quad \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

On arriverait, comme on s'en rend bien compte, au même résultat en décomposant la fraction rationnelle $R(t, z)$ en fractions simples, et en intégrant l'expression obtenue le long du chemin L. La décomposition précédente de $F(z)$ n'est donc pas restreinte aux valeurs de z à l'intérieur du cercle de convergence de la série correspondante $\theta(z)$, pourvu que, pour les valeurs de z hors de ce cercle, on considère $\theta(z)$ comme définie par son expression

$$\theta(z) = \int_L \frac{A(t)}{1 - z r(t)} dt,$$

qui la représente dans tout le plan.

2. Les fonctions $\theta(z)$ jouent le rôle d'une espèce d'*éléments simples* par rapport aux fonctions $F(z)$. Ces éléments sont, d'ailleurs, infiniment variés et représentent, en général, des fonctions transcendentes de z .

Ainsi, les fonctions $F(z)$ correspondant aux fonctions

$$A(t) = e^{at}, \quad r(t) = \frac{1}{t}$$

et à l'arc L représentant un contour fermé entourant l'origine, sont des combinaisons linéaires d'un nombre limité de termes de la forme $z^k e^{az}$.

Les fonctions $F(z)$ correspondant aux fonctions $A(t)$ et $r(t)$ de la forme

$$A(t) = e^{at^n}, \quad r(t) = e^{bt^n}$$

(a et b étant des constantes à partie réelle négative) et à l'arc L se réduisant au demi-axe réel, se réduisent à des combinaisons linéaires des puissances de z , de la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{a}{\sqrt{a + bn}}$$

et de ses dérivés par rapport à z .

Lorsque les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont de la forme

$$A(t) = \frac{\sin at}{t}, \quad r(t) = e^{-t},$$

l'arc L se réduisant au demi-axe réel, le rôle d'élément simple est joué par la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \left(\arctang \frac{a}{n} \right) z^n, \dots$$

3. Dans certains cas, les fonctions $\theta(z)$ se réduisent à des fonctions *rationnelles* de z . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $I(n)$ soit polynome en

$$n, \quad a^n, \quad b^n, \quad c^n, \quad \dots,$$

$a, b, c, \dots$, et des degrés de ces polynomes étant indépendants de n .

En mettant à part le cas évident où la fonction correspondante $r(t)$ se réduit à une constante, il en sera ainsi, par exemple, *toutes les fois que l'arc L forme un contour fermé entourant un nombre limité de pôles de $A(t)$, et à l'intérieur duquel la fonction correspondante $r(t)$ est holomorphe*. Dans ce cas, l'intégrale $I(n)$ sera la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n(n-1)\dots(n-h)ab^n,$$

où a, b sont des constantes indépendantes de n , et h un entier également indépendant de n ; la fonction $\theta(z)$ est donc rationnelle.

IV. — CONVERGENCE DES SÉRIES $\theta(z)$.

1. Par la réduction des fonctions étudiées $F(z)$ aux éléments simples, la question de la convergence des séries

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

est ramenée à celle des séries

$$\theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \dots$$

Si $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ sont les rayons de convergence des séries $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ rattachées à la fonction $F(z)$, le rayon de convergence R de la série $F(z)$ sera le plus petit parmi les rayons ρ_i .

De même, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sont des limites inférieures des ρ_i , la plus petite d'entre elles sera une limite inférieure du rayon R .

Occupons-nous donc de la convergence des séries $\theta(z)$.

D'abord, dans les cas où l'intégrale correspondante $I(n)$ se laisse exprimer sous la forme explicite comme fonction de (n) , le rayon de convergence ρ de $\theta(z)$ sera donné comme limite pour $n = \infty$ de l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{I(n)}{I(n+1)}, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{I(n)}},$$

dans lesquelles l'intégrale $I(n)$ peut aussi être remplacée par sa valeur asymptotique.

Dans les cas où l'on ne sait calculer ni $I(n)$ ni sa valeur asymptotique, on peut, à l'aide des inégalités relatives à $I(n)$, déterminer des limites inférieures du rayon ρ .

Ainsi, si le long de l'arc L on a constamment

$$|r(t)| < M,$$

la constante

$$P = \int_L |A(t)| ds$$

ayant un sens, une limite inférieure de ρ sera donnée par $\frac{1}{M}$.

Imaginons maintenant que l'on déforme le chemin d'intégration de manière que l'intégrale $I(n)$ ne change pas de valeur. A tout chemin correspondra une valeur M et, si μ est le plus petit parmi les M ainsi obtenus, $\frac{1}{\mu}$ sera une limite inférieure de φ .

Or, dans des cas généraux $\frac{1}{\mu}$ représente même la valeur exacte du rayon φ .

Il en sera, d'abord, ainsi toutes les fois que l'arc L se réduit à une portion (a, b) , limitée ou illimitée, de l'axe réel, le long de laquelle les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles, finies et continues, et l'intégrale $\int A(t) dt$ finie et différente de zéro.

Pour le faire voir, supposons d'abord que $r(t)$ garde constamment un même signe dans l'intervalle (a, b) (nous considérerons ce signe comme positif) et que la dérivée $r'(t)$ y soit positive. D'après le théorème cité de Ossian Bonnet, on aura

$$(17) \quad I(n) = AB^n$$

avec

$$A = \int_{\xi}^b A(t) dt, \quad B = r(b), \quad a < \xi < b,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi = \frac{1}{r(b)}.$$

Si maintenant la dérivée $r'(t)$ était négative, on aurait encore l'égalité (17) avec

$$A = \int_a^{\xi} A(t) dt, \quad B = r(a), \quad a < \xi < b,$$

et le rapport de convergence serait

$$\varphi = \frac{1}{r(a)}.$$

Si, enfin, $r(t)$ et la dérivée $r'(t)$ changeaient de signe dans l'intervalle (a, b) , on décomposerait cet intervalle en plusieurs autres où $r(t)$, ainsi que $r'(t)$, gardent des signes invariables. Chacun de ces intervalles partiels donnera dans $I(n)$ un terme de la forme AB^n ; la valeur asymptotique de $I(n)$ coïncidera avec

celui de ces termes pour lequel $B = r(t)$ a la plus grande valeur, de sorte qu'en désignant celle-ci par μ on aura l'égalité asymptotique

$$I(n) \sim A \mu^n,$$

et le rayon ρ aura pour valeur $\frac{1}{\mu}$.

Voici maintenant un second cas général où le rayon ρ a pour valeur exacte $\frac{1}{\mu}$. Supposons qu'on puisse déformer le chemin d'intégration, réel ou imaginaire, de manière à le faire passer par un point α autre qu'une limite de l'intégrale et jouissant des propriétés suivantes : 1° qu'on ait $r'(\alpha) = 0$; 2° que la plus grande valeur de $r(t)$ le long du nouveau chemin ait lieu en α ; 3° que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ soient holomorphes au voisinage de α . Dans ce cas, on aura encore

$$\rho = \frac{1}{|r'(\alpha)|}.$$

Ceci résulte directement du théorème de M. Darboux consistant en ce que, dans les conditions énumérées, l'égalité asymptotique de Laplace est valable et l'intégrale $I(n)$ se laisse mettre, pour les grandes valeurs de n , sous la forme

$$N \frac{[r(\alpha)]^n}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon),$$

où N est une constante indépendante de n , et ε une fonction de n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

2. D'une manière générale, la question de convergence des fonctions $\theta(z)$ est étroitement liée à celle des valeurs asymptotiques des intégrales $I(n)$ ou, ce qui revient au même, à celle des valeurs approchées des $I(n)$ pour les grandes valeurs de n .

Nous rappellerons quelques égalités asymptotiques de cette espèce, connues ou faciles à démontrer, s'appliquant directement à la question de convergence des fonctions $\theta(z)$.

En premier lieu, l'égalité asymptotique de Laplace

$$\int_1^\infty A(t) r(t)^n dt \sim \frac{AB^n}{\sqrt{n}}$$

(où A et B sont des constantes, indépendantes de n), applicable dans les conditions connues, précisées par M. Darboux ⁽¹⁾ et citées dans le paragraphe précédent.

MM. Flamme ⁽²⁾ et Hamy ⁽³⁾ se sont particulièrement occupés des intégrales de la forme

$$\int_L A(t) t^n dt, \quad \int_L A(t) \left(\frac{1}{t}\right)^n dt,$$

et ont mis en évidence la manière dont leurs valeurs asymptotiques dépendent de la nature des singularités de la fonction $A(t)$.

M. Le Roy ⁽⁴⁾ s'est occupé des valeurs asymptotiques des intégrales

$$I(n) = \int_0^\infty A(t) e^{nt} dt$$

lorsque la fonction $A(t)$ satisfait à certaines conditions assez larges.

Un procédé simple, dû à M. Poincaré ⁽⁵⁾, permet de traiter le cas des intégrales $I(n)$ de la forme

$$\int_L A(t) e^{int} dt,$$

prises le long d'un chemin réel ou imaginaire de longueur finie; on arrive à l'égalité asymptotique

$$I(n) \sim \frac{A e^{an}}{n},$$

où A et a ne dépendent pas de n .

Citons encore le cas où l'intégrale $I(n)$ donnée est une fonction de n régulière dans le domaine de l'infini et, par suite, dévelop-

⁽¹⁾ Mémoire Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, etc. (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1878).

⁽²⁾ Recherches des expressions approchées, etc. (Thèse de doctorat, Paris, 1887).

⁽³⁾ Sur le développement approché de la fonction perturbatrice, etc. (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1894).

⁽⁴⁾ Valeurs asymptotiques de certaines séries, etc. (*Bull. des Sciences math.*, 1900).

⁽⁵⁾ Théorie analytique de la propagation de la chaleur. Chap. VII.

pable en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{n}$, convergente pour les valeurs suffisamment grandes de n : on démontre aisément l'égalité asymptotique

$$I(n) = \frac{A}{n^p},$$

A étant une constante et p un entier positif ou nul, indépendants de n . Tel est, par exemple, le cas des intégrales

$$\int_0^\infty A(t) e^{-nt} dt$$

lorsque $A(t)$ est holomorphe au voisinage de $t = 0$ et telle que, en posant

$$A(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots,$$

la série

$$\sum n! x_n t^n$$

converge pour les valeurs suffisamment petites de t [ce qui arrive, en particulier, toutes les fois que $A(t)$ est une fonction entière du genre zéro].

3. Un cas particulièrement intéressant est celui où la fonction considérée $\theta(z)$ est une *fonction entière* de z . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des expressions

$$\sqrt[n]{I(n)}, \quad \frac{I(n+1)}{I(n)}$$

tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment. La proposition subsiste, d'ailleurs, si l'on substitue aux intégrales $I(n)$ leurs valeurs asymptotiques, dont il a été question dans le paragraphe précédent.

Ainsi, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{int} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{n^2}{4a}}$$

est une fonction entière de n ; au contraire, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} e^{-nt} dt$$

n'est pas entière, la valeur asymptotique de $I(n)$, d'après une proposition du paragraphe précédent, étant égale à $\frac{1}{n}$.

Dans les cas où l'on ne saurait exprimer sous la forme explicite ni la valeur exacte $I(n)$ ni sa valeur asymptotique, on peut procéder par comparaison, comme dans l'étude de la convergence des séries $\theta(z)$. La règle intuitive suivante rendra souvent des services à cet égard :

Soient $\lambda(t)$ et $u(t)$ deux fonctions telles qu'à l'intégrale

$$Y(n) = \int_L |\lambda(t)| |u(t)|^n ds$$

correspond la fonction entière

$$Y(0) + Y(1)z + Y(2)z^2 + \dots$$

Si le long du chemin L on a constamment

$$\begin{aligned} |A(t)| &\leq |\lambda(t)|, \\ |r(t)| &\leq |u(t)|, \end{aligned}$$

la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale $I(n)$ sera également une fonction entière de z .

En nous reportant à ce qui a été dit pour le rayon de convergence des séries $\theta(z)$, on trouverait aisément d'autres règles fournissant des conditions suffisantes ou bien pour que $\theta(z)$ soit une fonction entière, ou bien pour qu'elle ne le soit pas. Elle ne le sera pas, par exemple, si, le chemin d'intégration étant réel, les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles, finies et continues le long de ce chemin, l'intégrale

$$\int_L \Lambda(t) dt$$

ayant un sens.

Ou bien encore : si $A(t)$ et $r(t)$ satisfont aux conditions pour que l'inégalité asymptotique de Laplace soit applicable à l'intégrale correspondante $I(n)$, etc.

V. — PARTICULARITÉS DIVERSES DES FONCTIONS $\theta(z)$.

1. La forme même des expressions analytiques des fonc-

tions $\theta(z)$, données soit sous la forme des séries

$$(18) \quad \theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \dots$$

avec

$$(19) \quad I(n) = \int_L A(t) [r(t)]^n dt,$$

soit comme intégrales

$$(20) \quad \theta(z) = \int_L \frac{A(t)}{1 - zr(t)} dt,$$

rend particulièrement facile l'étude de ces fonctions, en mettant en évidence des relations existant entre leurs diverses particularités et celles des fonctions correspondantes $A(t)$ et $r(t)$.

La première expression analytique définit $\theta(z)$ à l'intérieur d'une certaine circonférence; la seconde en fournit le prolongement analytique dans tout le plan. Chacune d'elles met en évidence certaines particularités des fonctions qu'elle définit. La première, par exemple, se prête directement à l'application des résultats récents de la théorie des séries de Taylor, relatifs aux relations existant entre la manière dont varie $I(n)$ avec n et celle dont croît $\theta(z)$ avec z ; ou bien entre les particularités de $I(n)$ et les singularités de $\theta(z)$, ses zéros, ses pôles, etc. La seconde expression est souvent plus commode pour le calcul numérique des fonctions $\theta(z)$; elle rend possible l'étude des propriétés de $\theta(z)$ au delà du cercle de convergence de la série correspondante, etc. Les résultats récents relatifs à certaines intégrales de la forme (20), dus à M. Le Roy, offrent, par exemple, le moyen d'étudier les valeurs asymptotiques des fonctions $\theta(z)$, la distribution de leurs singularités dans le plan des z , la manière dont se comporte $\theta(z)$ lorsque z approche du cercle de convergence de la série $\theta(z)$ ou bien d'une singularité, ou lorsque z tourne autour de celle-ci, etc.

Nous n'indiquerons qu'à titre d'exemples quelques résultats de cette nature.

2. Tout d'abord, les connaissances sur des limites supérieures ou inférieures du module de la fonction $A(t)$ ou $r(t)$ entraînent des connaissances sur les limites que ne saurait dépasser le module de la fonction correspondante $\theta(z)$ pour les valeurs données de z .

Ainsi, en désignant par M le plus grand module de $r(t)$ le long de l'arc L ou bien d'un chemin équivalent, la fonction rationnelle

$$\frac{P}{1 - Mz}$$

avec

$$P = \int_L |A(t)| ds$$

représentera une limite supérieure de $|\theta(z)|$ pour toutes les valeurs de z à module inférieur à $\frac{1}{M}$.

On aura des limites plus précises dans les cas où les limites supérieures des modules de $A(t)$ et $r(t)$ sont fournies par des fonctions diverses de t .

Ainsi, l'axe L se réduisant au demi-axe réel, si les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles pour les valeurs réelles et positives de t et telles que pour les valeurs positives convenablement choisies de k , h , a on ait en valeur absolue

$$A(t) \leq kt, \quad r(t) \leq \frac{h}{\sqrt{a^2 + t^2}},$$

on aura en valeur absolue

$$I(n) < \frac{kh^2}{n-2} \left(\frac{h}{a}\right)^{n-2} \quad (n > 2),$$

de sorte que la fonction

$$I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + kh^2 z^2 \log\left(1 - \frac{hz}{a}\right)$$

représentera une limite supérieure de $|\theta(z)|$ pour toutes les valeurs de z à module inférieur à $\frac{a}{h}$.

Signalons, à ce propos, un résultat d'une portée plus générale, fourni par les mêmes considérations et conduisant à une inégalité intéressante relative aux accroissements finis d'une classe étendue de fonctions.

Considérons une fonction $f(z)$ réelle pour z réel et positif, holomorphe pour toute valeur de z à partie réelle positive et tendant vers zéro lorsque z croît indéfiniment dans une direction quelconque correspondant aux parties réelles positives.

Comme nous l'avons montré précédemment, à partir du rang $n = 2$, les coefficients A_n du développement

$$f(z) = A_0 + A_1(z - \lambda) + A_2(z - \lambda)^2 + \dots$$

sont, en valeurs absolues, inférieurs aux coefficients correspondants de la série

$$\theta(z) = I(2)(z - \lambda)^2 + I(3)(z - \lambda)^3 + \dots,$$

où

$$I(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(t)}{\sqrt{(\lambda^2 + t^2)^{n+1}}} dt,$$

$\psi(t)$ désignant le coefficient de i dans $f(ti)$ et λ étant un nombre réel et positif quelconque.

Or, comme l'on a, en vertu de ce qui précède,

$$I(n) < \frac{2N}{\pi} \frac{1}{(n-1)\lambda^{n-1}}$$

(N désignant la plus grande valeur absolue, finie et différente de zéro, qu'acquiert le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$ pendant que z varie par valeurs positives de $z = 0$ à $z = \infty$), on aura en valeur absolue

$$\theta(z) < \frac{2N}{\pi} \log \left(1 - \frac{z - \lambda}{\lambda} \right),$$

d'où, en faisant

$$\lambda = x, \quad z = x + h,$$

on tire le résultat suivant :

La valeur absolue de l'expression

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

est inférieure à celle de l'expression

$$\frac{2N}{\pi} \log \left(1 - \frac{h}{x} \right)$$

quelles que soient les quantités réelles et positives h et x pourvu qu'elles satisfassent à la condition — $x < h < x$.

3. Lorsque la fonction $\theta(z)$ est entière, on peut, dans des cas

étendus, étudier la manière dont elle se comporte lorsque le module de z croît indéfiniment.

Supposons, par exemple, qu'on ait déterminé, par des procédés de M. Hadamard, une fonction $\chi(n)$ au plus égale, pour les valeurs entières de n , au module de l'intégrale $I(n)$ et telle que la fonction

$$\varphi(n) = \sqrt[n]{\chi(n)}$$

soit une fonction réelle, positive, continue et croissante de n , devenant infinie pour $n = \infty$. En désignant par x le module de z et par $\psi(z)$ la fonction inverse de φ , d'après le théorème bien connu de M. Hadamard, la fonction $\theta(z)$ croîtra moins vite que la fonction

$$x^\varepsilon e^{\int \frac{\psi(r)}{\alpha} dr},$$

le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Ainsi, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{nti} dt = A e^{-\alpha n^2}$$

(où a, A, α sont des constantes positives) croîtra moins vite que la fonction

$$x^\varepsilon e^{\frac{1}{\alpha} (\log x)^2}.$$

Dans des cas étendus, on saura même préciser la valeur asymptotique de la fonction $\theta(z)$, supposée entière, pour les grandes valeurs de z . Considérons, par exemple, le cas étudié par M. Le Roy ⁽¹⁾ : supposons qu'en posant

$$-\log I(n) = \varpi(n),$$

la fonction $\varpi(n)$ satisfasse aux conditions suivantes :

1° Cette fonction, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres sont réelles, positives et continues pour les valeurs positives de n ;

2° $\varpi(n)$ et $\varpi'(n)$ croissent jusqu'à l'infini tandis que $\varpi''(n)$ décroît jusqu'à zéro pour $n = \infty$;

⁽¹⁾ Valeurs asymptotiques de certaines séries (Bull. des Sciences math., 1900, p. 262).

3° Le produit $n^2 \varpi'(n)$ représente une fonction positive et indéfiniment croissante avec n ;

4° Le rapport $\frac{\varpi(n)}{n}$ devient infini avec n .

D'après un théorème dû à M. Le Roy, lorsque la variable z croît indéfiniment dans la direction des z réels et positifs, la fonction correspondante $\theta(z)$ tendra asymptotiquement vers la fonction

$$\sqrt{2\pi} \frac{e^{u\varpi'(u) - \varpi(u)}}{\sqrt{\varpi'(u)}},$$

u désignant la racine réelle et positive de l'équation

$$\varpi'(u) = \log z.$$

Ainsi, dans le cas de

$$I(n) = e^{-np} \quad (1 < p < 2),$$

on aura

$$\varpi(n) = n^p, \quad u = \left(\frac{\log z}{p} \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

de sorte que la valeur asymptotique de la fonction correspondante $\theta(z)$ sera

$$\alpha (\log z)^k e^{\beta (\log z)^h},$$

α, ρ, k, h étant des constantes faciles à préciser.

Dans les cas où la fonction $\theta(z)$ n'est pas entière, on connaîtra dans des cas étendus sa valeur asymptotique lorsque z approche d'un point du cercle de convergence de la série $\theta(z)$. Tel est, par exemple, le cas de M. Le Roy suivant :

Supposons que, le rayon de convergence de $\theta(z)$ étant égal à l'unité, l'intégrale correspondante $I(n)$ soit une fonction réelle, positive et constamment décroissante de n , tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Soit $F(n)$ une fonction de n telle qu'on ait, pour $n = \infty$,

$$\lim \frac{1}{I(n)} \frac{dF}{dn} = 1.$$

D'après un théorème de M. Le Roy ⁽¹⁾, la valeur asymptotique

(1) Valeurs asymptotiques de certaines séries (Bull. des Sciences math., 1900, p. 250).

uque de $\theta(z)$ pour z voisin de 1 est de la forme

$$CF\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad (C = \text{const.}).$$

Ainsi, dans le cas où

$$I(n) = \int_0^\infty e^{-nt} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

la valeur asymptotique de la fonction correspondante $\theta(z)$, pour z voisin de 1, sera

$$\frac{C}{\sqrt{1-z}}.$$

Remarquons que la fonction $F(n)$ coïncide avec l'intégrale

$$\int \varphi(n) dn,$$

$\varphi(n)$ étant la valeur asymptotique de $I(n)$ pour les grandes valeurs de n , dont nous sommes précédemment occupé.

Remarquons aussi qu'au cas précédent se ramène facilement celui où le rayon de convergence de $\theta(z)$ n'est pas égal à l'unité, ou bien celui où $I(n)$ tend vers une limite finie différente de zéro.

4. Certains résultats dus à M. Le Roy, concernant les singularités des fonctions représentées par les séries de Taylor et par certaines classes d'intégrales définies, s'appliquent avec la plus grande facilité aux fonctions qui nous occupent, et fournissent directement des connaissances sur les singularités de ces fonctions, la nature analytique de celles-ci, etc.

Supposons, par exemple, que l'intégrale

$$I(n) = \int_L A(t) [r(t)]^n dt,$$

correspondant à la fonction considérée $\theta(z)$, se laisse transformer en une autre de la forme

$$I(n) = \int_0^1 B(x) x^n dx,$$

la fonction $B(x)$ n'étant assujettie qu'à la condition que l'inté-

grale

$$\int_0^1 |B(t)| dt$$

ait un sens.

La fonction correspondante $\theta(z)$ sera holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1. En particulier, si le cercle de convergence de la série

$$\theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \dots$$

a l'unité pour rayon, il ne contient qu'un point singulier de $\theta(z)$: c'est $z = 1$.

La portion $(+1, +\infty)$ de l'axe réel est pour $\theta(z)$ une coupure. Si $B(t)$ est holomorphe pour $0 > t > 1$, la coupure n'est pas essentielle, et $\theta(z)$ n'a pas d'autres points singuliers que $z = 1$ et $z = \infty$.

La fonction $\theta(z)$ n'est pas uniforme, et le calcul du saut brusque subi par l'intégrale, quand on franchit la coupure, donne ses diverses déterminations.

Plusieurs circonstances peuvent alors se présenter. Si $B(t)$ est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être à l'origine, les périodes de $\theta(z)$, quand on tourne autour du point singulier 1, sont données par l'expression

$$\frac{2k\pi i}{z} B\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dans le cas général (la coupure n'étant cependant pas essentielle) toutes les singularités sont possibles, suivant la nature de la fonction $B(t)$, pour les déterminations de $\theta(z)$ autres que la détermination principale.

Les procédés de M. Le Roy permettent de traiter aussi des cas beaucoup plus généraux; convenablement modifiés, ils sont, d'ailleurs, propres à s'appliquer, dans des cas très étendus, à des fonctions $\theta(z)$ correspondant aux coefficients $I(n)$ exprimés directement sous la forme générale

$$I(n) = \int_L A(t)[r(t)]^n dt.$$

Ajoutons aussi que cette dernière expression permet d'étendre la manière dont se comporte la fonction $I(t)$ pour $t = \infty$. Or, des connaissances de cette nature on peut souvent tirer des renseignements sur la distribution des singularités de la fonction correspondante $\theta(z)$ dans le plan des z (1).

5. Dans une Note antérieure (2), j'ai démontré la proposition suivante : si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série

$$(20) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

et si l'on forme la fonction

$$u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n},$$

on aura

$$\lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}},$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive r , pourvu qu'elle reste inférieure au rayon de convergence de la série (20).

La proposition subsiste manifestement lorsqu'on substitue dans $u(r)$ aux coefficients

$$|a_1|^2, |a_2|^2, |a_3|^2, \dots,$$

des nombres réels positifs quelconques qui leur sont supérieurs. Ceci fait qu'appliquée aux fonctions $\theta(z)$ exprimées sous la forme des séries (17), elle fournit des renseignements sur les limites inférieures des modules des zéros de ces fonctions ou, plus généralement, des valeurs de z pour lesquelles $\theta(z)$ prend une valeur donnée a . Il suffit pour cela de calculer la fonction $u(r)$ correspondant à la fonction $\theta(z)$ donnée, après y avoir remplacé le coefficient $I(n)$ par l'une des limites supérieures de son module, choisie de manière que le calcul de $u(z)$, ou au moins celui d'une de ses limites supérieures, soit possible. Les divers procédés indiqués précédemment conduisent à de telles limites

(1) Voir, par exemple, DESAINT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, p. 1102-1104.

(2) *Bulletin de la Société mathém. de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312.

supérieures de $|1(n)|$, et ce genre de calcul ne présente aucune espèce de difficultés.

Envisageons, par exemple, les transcendentes

$$\theta(z) = \int_0^{\infty} \frac{z A(t)}{e^t - z} dt,$$

correspondant à

$$I(n) = \int_0^{\infty} A(t) e^{-nt} dt,$$

et supposons que, pour t réel et positif, la fonction $A(t)\sqrt{t}$ soit continue, réelle, positive et constamment inférieure à un certain nombre M . On aura

$$a_n < M \int_0^{\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = M \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

et $u(r)$ correspondant à la fonction $\theta(z) + a$ (où a est un nombre réel et positif quelconque) aura pour expression

$$u(r) = \frac{1}{r^2} [a^2 - M^2 \pi \log(1 - r^2)],$$

de sorte qu'une limite inférieure μ des modules des valeurs de z pour lesquelles $\theta(z)$ prend la valeur donnée a , est fournie par la valeur de l'expression

$$\mu = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - M^2 \pi \log(1 - r^2)}},$$

et cela quelle que soit la valeur de r comprise entre 0 et 1. En prenant, en particulier,

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0,795\dots,$$

une limite inférieure cherchée sera

$$\mu = \frac{0,795a}{\sqrt{a^2 + M^2 \pi}}.$$

Indiquons encore un résultat plus général de cette espèce.

Soit $F(x)$ une fonction entière d'un genre fini μ . Désignons par M le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r , r étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif α , le produit

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de 0 à ∞ .
D'autre part, en posant

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

l'expression de a_n , sous la forme de l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{F(t)}{t} \left(\frac{1}{t}\right)^n dt,$$

conduit, comme l'on sait, à l'inégalité

$$|a_n| < N \frac{\beta^n}{n^{cn}},$$

où c et β sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$c = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \left(\frac{\alpha e}{c}\right)^c.$$

Le rôle de la fonction $u(r)$ est donc joué par la fonction

$$\frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \sum_1^\infty \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2nc}},$$

et, en y faisant $r = \frac{1}{\beta}$, on arrive à la proposition suivante :

Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction $F(z)$ est donnée par l'expression

$$(21) \quad \frac{1}{\alpha \alpha^{\frac{1}{p+1}} \sqrt{1 + b \left(\frac{K}{A}\right)^2}},$$

où K désigne une limite supérieure de N ; A le module de $F(0)$;
 α et b deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$\alpha = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}}, \quad b = 0 \left(\frac{2}{p+1} \right),$$

$\theta(t)$ désignant la transcendante

$$\theta(t) = \sum_1^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes a et b restent les mêmes pour toutes les fonctions $F(z)$ d'un même genre p et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

$$\begin{array}{lll} \text{pour } p = 0 : & a = e = 2,7183; & b = \theta(2) = 1,0639; \\ \text{pour } p = 1 : & a = \sqrt{2}e = 2,3316; & b = \theta(1) = 1,2913; \\ \text{pour } p = 2 : & a = \sqrt[3]{3}e = 2,0128; & b = \theta(\frac{2}{3}) = 1,5383, \dots \end{array}$$

En remplaçant dans (21) A par $|F(0) - C|$, cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C .

6. L'expression de $\theta(z)$, sous la forme de l'intégrale

$$(22) \quad \theta(z) = \int_L \frac{A(t)}{1 - z r(t)} dt$$

se prête facilement au calcul numérique approché des valeurs que prend cette fonction pour des valeurs données de z . Elle met, en outre, mieux en évidence certaines particularités de la fonction que ne le ferait l'expression de $\theta(z)$ sous la forme de la série de Taylor.

Supposons, par exemple, que les limites de l'intégrale, ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ soient réelles et positives. L'expression (22) montre tout d'abord que la fonction $\theta(z)$ (ou bien sa branche principale dans le cas où elle n'est pas uniforme) aura des valeurs réelles et positives pour les z réels, positifs ou négatifs, mais plus petits que $\frac{1}{M}$, M désignant la plus grande valeur de la fonction $r(t)$ entre les limites de l'intégrale.

En posant

$$z = \xi + \eta i,$$

on aura

$$\theta(z) = U + iV$$

avec

$$U = \int_L A(t) \frac{1 - \xi r(t)}{[1 - \xi r(t)]^2 + \eta^2 [r(t)]^2} dt,$$

$$V = \int_L A(t) \frac{r(t)}{[1 - \xi r(t)]^2 + \eta^2 [r(t)]^2} dt.$$

Le produit $A(t)r(t)$ étant positif pour toutes les valeurs de t comprises entre les limites de l'intégrale, la valeur V sera différente de zéro : la fonction $\theta(z)$ (sa branche principale) ne saurait donc avoir aucun zéro imaginaire. D'autre part, comme U ne saurait être nulle pour $\xi < \frac{1}{M}$, les zéros de $\theta(z)$ sont tous réels, positifs et plus grands que $\frac{1}{M}$, etc.

Il serait aussi facile d'en tirer des renseignements sur la façon dont se comporte $\theta(z)$ lorsque z croît indéfiniment par des valeurs positives ou négatives, ou bien lorsque z approche de la valeur $\frac{1}{M}$, etc. C'est là, par exemple, que les méthodes de M. Le Roy trouveraient de vastes applications.

Je me borne à signaler le vaste champ de recherches qu'offrent les fonctions $F(z)$ données par l'expression analytique faisant l'objet de ce Mémoire. Une étude plus approfondie de leurs diverses particularités mériterait d'être faite; on y rencontrera une foule de transcendantes nouvelles dont on saura étudier les propriétés et qui présenteront de l'intérêt.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES RÉCIPROQUES DU SECOND ORDRE;

Par M. PAUL-J. SUCHAR.

1. Soient

$$(1) \quad x_1 = \varphi(x)$$

une fonction de la variable x et

$$(2) \quad x = \psi(x_1)$$

la fonction inverse. Il existe des fonctions $F(x)$, $F_1(x_1)$ de la variable x et de la variable x_1 , qui jouissent de la propriété sui-

vante :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=\psi(x_1)} = F_1(x_1), \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=\varphi(x)} = F(x). \end{array} \right.$$

Les symboles $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=\psi(x_1)}$, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=\varphi(x)}$ sont les dérivées de $F(x)$ et $F_1(x_1)$ prises par rapport à x et x_1 , et où l'on remplace ensuite x en fonction de x_1 et x_1 en fonction de x à l'aide de (1) et (2). Ces fonctions sont solutions de deux équations différentielles linéaires de second ordre.

En effet, posons

$$(4) \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x);$$

la première relation de (3) nous donne, en dérivant par rapport à x_1 ,

$$\left(\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{x=\psi(x_1)} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1},$$

et, si l'on remplace x_1 en fonction de x d'après (1), on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f(x)F.$$

On aura de même, en partant de la seconde des relations (3),

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} F_1,$$

et les fonctions $F(x)$ et $F_1(x_1)$ sont solutions de ces dernières équations.

Nous dirons que ces équations sont réciproques.

2. Il résulte de ce qui précède que, étant donnée une équation différentielle linéaire du second ordre, on peut toujours la supposer ramenée à la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)y;$$

on formera sa réciproque en faisant le changement de la variable

indépendante

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x),$$

d'où

$$x_1 = \varphi(x) \quad \text{et} \quad x = \psi(x_1),$$

et le changement de la fonction en posant

$$y_1 = \frac{dy}{dx};$$

l'équation réciproque sera alors

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} y_1.$$

La propriété qui caractérise ces équations est la suivante :

La dérivée d'une solution d'une des équations considérée comme fonction de la variable indépendante de l'autre équation est une solution de cette dernière.

3. Considérons comme exemple l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{(3x)^{\frac{1}{2}}} y.$$

La réciproque de cette équation s'obtient en posant

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{1}{(3x)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$x_1 = -\frac{1}{(3x)^{\frac{1}{2}}} + c \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{3(x_1 - c)^2};$$

on aura donc

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(x_1 - c)^4} y_1.$$

Remarquons qu'on peut supposer $c = 0$, car cela revient à faire sur cette dernière équation un changement de la variable indépendante pour ramener le point $x_1 = c$ à l'origine; il faudra alors faire aussi $c = 0$ dans la relation qui lie x à x_1 , et l'équation réciproque sera

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{x_1^4} y_1.$$

Cette dernière équation est celle de Spitzer ⁽¹⁾ et se ramène à des coefficients constants par le changement

$$y_1 = zx_1, \quad x_1 = \frac{1}{t};$$

on aura alors

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = z.$$

Donc les solutions de l'équation précédente sont

$$x_1 e^{\frac{1}{x_1}} \quad \text{et} \quad x_1 e^{-\frac{1}{x_1}}.$$

Ces solutions étant linéairement indépendantes, on aura alors, d'après le n° 2, l'intégrale générale de l'équation donnée, à savoir :

$$y = a \left[1 - (3x)^{\frac{1}{3}} \right] e^{(3x)^{\frac{1}{3}}} + b \left[1 + (3x)^{\frac{1}{3}} \right] e^{-(3x)^{\frac{1}{3}}},$$

où a et b sont des constantes.

4. Considérons comme second exemple l'équation plus générale

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = [(2n-1)x]^{-\frac{2n}{2n-1}} y,$$

qui comprend, comme cas particulier, pour $n=1$, l'équation de Spitzer.

Nous aurons

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dx} = [(2n-1)x]^{-\frac{2n}{2n-1}}, \\ x_1 = -\frac{1}{2n-1} [(2n-1)x]^{-\frac{2n+1}{2n-1}}, \\ x = \frac{1}{2n-1} [-(2n+1)x_1]^{\frac{2n-1}{2n+1}}, \end{cases}$$

et pour l'équation réciproque

$$(3) \quad \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = [(2n-1)x_1]^{-\frac{2n}{2n+1}} y_1.$$

Nous avons supposé, comme dans le premier exemple, la constante d'intégration nulle.

Je me propose de montrer qu'il est possible de trouver une

⁽¹⁾ SPITZER, *Vorlesungen über lineare differential Gleichungen*, p. 98.

solution de ces équations lorsque n est un nombre réel, et, s'il est entier, l'intégrale générale s'exprimera par des fonctions élémentaires. Remarquons, cependant, que l'exemple considéré rentre dans le type général

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = ax^p y,$$

et qui, par un changement convenable de la variable et de la fonction, se ramène à l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{k^2}{t^2}\right) z = 0,$$

et l'équation proposée pourra alors s'intégrer à l'aide des fonctions de Bessel. La méthode que je suivrai me permet d'obtenir directement une solution, ou bien l'intégrale générale, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'équation de Bessel, ce qui me permettra d'ailleurs d'en déduire ensuite l'intégrale générale de l'équation de Bessel et reconnaître qu'elle s'exprimera à l'aide des fonctions élémentaires, si la constante k est de la forme

$$k^2 = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2,$$

où n est un nombre entier.

5. L'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [(2n-1)x]^{-\frac{2n}{2n-1}} y$$

se réduit pour $n = 1$ à l'équation de Spitzer

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^4} y$$

et qui a pour solutions

$$x e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad x e^{-\frac{1}{x}};$$

la fonction

$$y = x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}} \right),$$

que l'on peut encore écrire

$$y = \int_{-1}^{+1} e^{\frac{z}{x}} dz,$$

est encore une solution de cette dernière équation. Il y a donc

lieu de chercher si, tout au moins pour n positif, l'équation (1) n'a pas une solution de la forme

$$(4) \quad y = \int_{-1}^{+1} u(z, n) e^{z v(x, n)} dz,$$

où $u(z, n)$ est une fonction de z et du paramètre n et qui est telle que, pour toutes les valeurs de z comprises entre -1 et $+1$, l'intégrale (4) ait un sens; quant aux limites, elle est supposée finie ou infinie, mais, dans ce dernier cas, elle sera infinie comme $\frac{1}{1-z^2}$ et d'un ordre inférieur à l'unité; enfin pour $n=1$ elle sera égale à 1. La fonction $v(x, n)$ est supposée continue par rapport à x , ayant une dérivée et se réduisant à $\frac{1}{x}$ pour $n=1$. Ces conditions sont suffisantes pour retrouver les fonctions $u(z, n)$ et $v(x, n)$, de manière que la fonction (4) soit une solution de (1).

Nous aurons, en dérivant (4) par rapport à x ,

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \int_{-1}^{+1} u(z, n) z v'(x, n) e^{z v(x, n)} dz$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \int_{-1}^{+1} u(z, n) z^2 v'^2(x, n) e^{z v(x, n)} dz \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} u(z, n) z v''(x, n) e^{z v(x, n)} dz; \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} u(z, n) z^2 v'^2(x, n) e^{z v(x, n)} dz \\ &= - \int_{-1}^{+1} u(z, n) (1-z^2) v'^2(x, n) e^{z v(x, n)} dz \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} u(z, n) v'^2(x, n) e^{z v(x, n)} dz, \end{aligned}$$

ou encore, en intégrant la première intégrale par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle aux limites, on aura finalement

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dz} [u(z, n) (1-z^2)] \frac{v'^2(x, n)}{v(x, n)} e^{z v(x, n)} dz \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} u(z, n) z v''(x, n) e^{z v(x, n)} dz \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} u(z, n) v'^2(x, n) e^{z v(x, n)} dz. \end{aligned}$$

Si nous portons ces expressions dans (1), nous aurons une identité si la fonction $u(z, n)$ satisfait à la relation

$$(6) \quad \frac{d}{dz} [u(z, n)(1-z^2)] = 2kz u(z, n),$$

où k est un nombre qui dépend de n ; et, comme l'équation (1) est indépendante de $\frac{dy}{dx}$, on trouve en ayant égard à (5) que la fonction $v(x, n)$ doit satisfaire à la relation

$$(7) \quad 2k \frac{v'(x, n)}{v(x, n)} + v''(x, n) = 0;$$

enfin, on doit en outre avoir

$$(8) \quad v'(x, n) = [(2n-1)x]^{-\frac{1}{2n-1}}.$$

La relation (6) nous donne

$$u(z, n) = (1-z^2)^{-k-1},$$

à un facteur constant près qu'on peut supposer égal à 1 et, comme la fonction doit se réduire à 1 pour $n=1$, la constante k sera donc égale à $-n$. La relation (7) nous donne, en remarquant que la fonction $v(x, n)$ doit se réduire à $\frac{1}{x}$ pour $n=1$,

$$v(x, n) = [(2n-1)x]^{-\frac{1}{2n-1}},$$

et cette dernière fonction vérifie, comme on le voit, la relation (8).

Nous aurons donc une solution de (1) pour n réel et positif de la forme

$$(9) \quad y = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{n-1} e^{z[(2n-1)x]} z^{-\frac{1}{2n-1}} dz.$$

Il est facile de trouver une solution de la même équation pour n négatif. Remarquons que, si dans (1) nous changeons n en $-n$, on obtient une équation qui ne diffère de l'équation réciproque (3) que par le changement de x , en x . On aura donc une solution de l'équation (1) pour n négatif si l'on connaît une solution de (3) pour n positif. L'équation (3) étant la réciproque de (1), il résulte,

d'après ce qui précède, que la dérivée d'une solution de (1) considérée comme fonction de x_1 , à l'aide de (2) sera une solution de (3).

Nous aurons alors

$$y_1 = - \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{n-1} z [(2n+1)x_1]^{\frac{2n}{2n-1}} e^{z[-(2n+1)x_1]^{\frac{1}{2n-1}}} dz,$$

ou encore, en intégrant par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle aux limites, on aura

$$y_1 = \frac{2n+1}{2n} x_1 \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n e^{z[-(2n+1)x_1]^{\frac{1}{2n-1}}} dz.$$

Il suffit alors de supprimer l'indice de x dans cette dernière fonction pour avoir une solution de l'équation (1) pour n négatif. Il faut remarquer cependant que n doit être pris positivement dans cette dernière fonction.

6. Remarquons que le coefficient de l'équation (1) se présente sous forme illusoire si $n = \frac{1}{2}$, tandis que l'équation (3) se présente sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx_1^2} = \frac{1}{2x_1} y_1;$$

on trouvera alors la vraie valeur de (1) en cherchant la réciproque de cette dernière équation. On trouve ainsi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2e^{2x} y,$$

et il suffit alors, pour avoir une solution de cette dernière équation, de remplacer dans la solution trouvée pour (1)

$$\lim |(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}} = \sqrt{2}e^x,$$

et faire $n = \frac{1}{2}$; on trouve ainsi

$$y = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{2}ze^x} dz$$

pour solution de cette dernière équation.

7. Il nous reste à trouver l'intégrale générale de (1) et (3) pour toutes les valeurs entières de n .

Nous nous bornerons à déterminer l'intégrale générale de (1), car l'intégrale générale de (3) sera aussi connue dès que la première le sera, puisque cette dernière équation est la réciproque de la première.

Si, dans la fonction (9), nous supposons n entier et en intégrant par parties, on trouve les deux fonctions linéairement indépendantes, à savoir :

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \left\{ \begin{aligned} y &= (2n-1)x \left[a_0 + \frac{a_1}{|(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_2}{|(2n-1)x|^{\frac{2}{2n-1}}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{|(2n-1)x|^{\frac{n-1}{2n-1}}} \right] e^{|(2n-1)x|^{-\frac{1}{2n-1}}} \end{aligned} \right. \\
 & \text{et} \\
 11) \quad & \left\{ \begin{aligned} y &= (2n-1)x \left[b_0 + \frac{b_1}{|(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{b_2}{|(2n-1)x|^{\frac{2}{2n-1}}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{|(2n-1)x|^{\frac{n-1}{2n-1}}} \right] e^{-|(2n-1)x|^{-\frac{1}{2n-1}}}, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

où les coefficients a et b satisfont aux relations

$$(12) \quad \begin{cases} a_{k-1} = (-1)^{k-1} \frac{2^{k-1}k}{(k!)^2} a_0 \\ b_{k-1} = \frac{2^{k-1}k}{(k!)^2} b_0 \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

et qui sont des solutions de (1).

Si, dans l'équation (1), nous faisons le changement de la variable et de la fonction, en posant

$$y = zx^{\frac{1}{2}}, \quad t = ax^{\frac{1}{2k}}, \quad a = 2k\sqrt{b}, \quad b = -(-2k)\frac{1-2k}{k}, \\
 2k = -(2n-1),$$

cette équation se transforme en l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{k^2}{t^2}\right) z = 0.$$

Si nous supposons n un entier pair, on aura, d'après (10),

pour solutions de cette équation de Bessel,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{2n-1}{2}}} \left\{ \cos \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_0 - a_2 t^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2} t^{n-2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sin \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_1 t - a_3 t^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-1} t^{n-1} \right] \right\}, \\
 x_2 &= \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{2n-1}{2}}} \left\{ \cos \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_1 t - a_3 t^3 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-1} t^{n-1} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sin \left(t + \frac{2n-1}{4} \pi \right) \left[a_0 - a_2 t^2 + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2} t^{n-2} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

où les constantes a sont données par (12).

8. Nous avons vu, au n° 1, qu'on peut toujours transformer une équation linéaire et homogène de second ordre en une autre qui lui est réciproque et nous avons trouvé qu'à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)y$$

correspond la réciproque

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} y_1.$$

Il peut se faire que la fonction $f(x)$ soit telle que, en faisant sur elle la substitution $x = \psi(x_1)$, on ait

$$f[\psi(x_1)] = \frac{1}{f(x_1)};$$

alors l'équation réciproque prend la forme

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = f(x_1) y_1;$$

elle ne diffère de l'équation donnée que par le changement de x en x_1 et de y en y_1 , et la transformation donnée transforme l'équation en elle-même; en d'autres termes, l'équation proposée est en même temps sa réciproque.

On reconnaît une certaine analogie avec le travail de M. Appell: *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable* (*Acta mathematica*, t. XV).

La différence qui existe est que le changement de la fonction est supposé linéaire par M. Appell, tandis que ce changement, d'après notre n° 2, n'est pas linéaire. Il nous reste encore à montrer qu'il existe des fonctions $f(x)$ ayant la propriété indiquée dans ce même numéro. En effet, d'après le n° 1, où nous avons posé

$$x_1 = \varphi(x) \quad \text{et} \quad x = \psi(x_1)$$

pour la fonction inverse et

$$f(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x},$$

il résulte

$$\frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]},$$

et, comme $f[\psi(x_1)]$ doit être égale à $f(x_1)$, on aura alors

$$\frac{\partial \psi(x_1)}{\partial x_1} = f(x_1);$$

donc les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x_1)$ ne doivent différer que par le changement de x en x_1 . Donc la fonction $f(x)$ cherchée est la dérivée d'une fonction qui a pour inverse la même fonction.

Considérons alors l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)y$$

et supposons $f(x)$ remplissant cette dernière condition, cette équation sera alors transformable en elle-même par le changement de la variable et de la fonction indiquée au n° 2; elle aura alors pour solution la dérivée d'une solution de la même équation, sur laquelle on fera la substitution $x = \varphi(x)$. Un exemple nous est donné par l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y,$$

où $\varphi(x) = x$ et, par conséquent, $f(x) = 1$; cette équation étant en même temps sa réciproque, il s'ensuit qu'elle aura pour solution la dérivée d'une solution, ce que l'on sait d'ailleurs.

Il en est de même de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}y,$$

où

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{x^2};$$

or

$$y = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

est une solution de cette équation; on vérifie, en effet, que la dérivée de cette solution prise par rapport à x , où l'on remplacera ensuite x par $-\frac{1}{x}$, est aussi une solution de la même équation.

D'une manière plus générale, considérons la fonction

$$\varphi(x) = (1-x^m)^{\frac{1}{m}},$$

où m est un nombre quelconque; supposons-nous donnée en outre une des déterminations de cette fonction, on aura alors pour $f(x)$

$$f(x) = -x^{m-1}(1-x^m)^{\frac{1-m}{m}},$$

et pour l'équation qui est transformable en elle-même

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -x^{m-1}(1-x^m)^{\frac{1-m}{m}} y.$$

La dérivée d'une solution de cette équation, où l'on remplacera x par $(1-x^m)^{\frac{1}{m}}$, sera une autre solution de la même équation. On peut aussi généraliser la dernière expression de $\varphi(x)$ en remplaçant x par une certaine fonction $u(x)$, dont l'inverse est $v(x)$. On prendra alors pour $\varphi(x)$ l'expression

$$\varphi(x) = v \left\{ 1 - [u(x)]^m \right\}^{\frac{1}{m}},$$

et la dérivée de cette fonction par rapport à x sera la fonction $f(x)$. On pourra alors former l'équation différentielle qui est en même temps sa réciproque.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe des fonctions $F(x)$, telles que, en prenant la dérivée et en faisant sur x la substitution $x = \varphi(x)$, on aura

$$F'[\varphi(x)] = F(x),$$

et, si $\varphi(x)$ a pour inverse la même fonction, $F(x)$ sera solution

d'une équation différentielle linéaire du second ordre ayant pour réciproque la même équation. On trouve ainsi comme exemples simples les fonctions

$$F(x) = \sin x + \cos x,$$

$$F(x) = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + (-1)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},$$

où $\varphi(x) = -x$ pour la première fonction et $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$ pour la seconde.

9. Nous allons terminer par une dernière remarque en étendant les mêmes considérations aux équations différentielles simultanées linéaires et du second ordre.

Nous nous bornerons à deux équations que nous supposerons de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)(\alpha y + \beta z), \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = f(x)(\gamma y + \delta z). \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro. Si nous répétons le même raisonnement qu'au n° 1 en posant

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x), \quad x_1 = \varphi(x), \quad \text{d'où} \quad x = \psi(x_1),$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \quad z_1 = \frac{dz}{dx},$$

on transformera le système donné en un autre qui lui est réciproque et de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} (\alpha y_1 + \beta z_1), \\ \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} (\gamma y_1 + \delta z_1). \end{cases}$$

On vérifie de la même manière que, si $y = u(x)$, $z = v(x)$

sont des solutions de (1), les dérivées $u'(x)$, $v'(x)$ considérées comme fonctions de x_1 sont solutions de (2); et réciproquement, si $y_1 = u_1(x_1)$, $z_1 = v_1(x_1)$ sont solutions de (2), les dérivées $u'_1(x_1)$, $v'_1(x_1)$ considérées comme fonctions de x sont solutions de (1).

Considérons comme exemple le système

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^4} (\alpha y + \beta z),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{x^4} (\gamma y + \delta z);$$

le système réciproque est

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(3x_1)^{\frac{1}{3}}} (\alpha y_1 + \beta z_1),$$

$$\frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(3x_1)^{\frac{1}{3}}} (\gamma y_1 + \delta z_1).$$

Si l'on sait intégrer un de ces systèmes, on saura intégrer l'autre aussi.

Remarquons que, si dans le premier système on fait le changement des fonctions et de la variable en posant

$$y = ux, \quad z = vx, \quad x = \frac{1}{t},$$

on obtiendra le système à coefficients constants

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \alpha u + \beta v,$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \gamma u + \delta v.$$

SUR CERTAINS GROUPES DE MATHIEU;

Par M. DE SÉGUIER.

1. On trouvera dans le *Journal de M. Jordan* (1902, p. 159) la démonstration du théorème suivant :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence

d'un groupe G_t $t+1$ fois transitif entre les symboles $1, \dots, n, \sigma_1, \dots, \sigma_t$, où A est le groupe fixant $\sigma_1, \dots, \sigma_t$, F le groupe fixant $1 = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_t$, sont qu'il existe des substitutions d'ordre 2, $s_h = (\sigma_0) \dots (\sigma_{h-2}) (\sigma_{h-1}, \sigma_h) (\sigma_{h+1}) \dots (\sigma_t) \dots$, telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} s_h^2 = 1, \quad s_h f s_h = f_h, \quad s_1 r s_1 = a' s_1 a', \\ s_l a s_l = a_l, \quad (s_l s_{l+1})^2 = f_{l1}, \quad (s_j s_{j+k})^2 = f_{jk} \\ (h = 1, \dots, t; i = 1, \dots, t-1; j = 1, \dots, t-2; k = 2, \dots, t-j; \\ l = 2, \dots, t; f \text{ parcourt les générateurs de } F, a \text{ ceux de } A \text{ qui sont} \\ \text{hors de } F; r \text{ un système de restes } \not\equiv 1 \text{ de } A \bmod F; a', a'', a_l \text{ sont} \\ \text{dans } A \text{ hors de } F; f_h, f_{l1}, f_{jk} \text{ dans } F), \end{array} \right.$$

et ces équations jointes à celles de A définissent G_t .

2. Prenons pour A le groupe $\{(z, iz), (z, 1-z)\}$, z parcourant un corps de Galois $C_\pi = C$ d'ordre $p^\pi = \pi$ (p premier, $\pi > 2$) dont i est racine primitive. Posons $(z, iz) = a$, $(z, 1-z) = b$ et cherchons à adjoindre à A une $s_2^{(1)} c = (0\infty) \dots$ telle que A soit le diviseur fixant un symbole dans $\{A, c\} = G$. On devra avoir $cac = a^\alpha$, $\alpha^2 = 1$. Si $\alpha = 1$, comme $a = (i^0, i^1, i^2, \dots)$, il faut que $c = (0\infty)(i^2, i^{x+2p})$ avec $i^{x+2p} = i^x$, $2p = \pi - 1$, ou $c = (0\infty)a^{\frac{\pi-1}{2}}$, et G contiendrait (0∞) , ce qui ne se peut, la classe étant $\pi - 1$. Soit donc $\alpha = -1$. Alors $c = (0\infty)(i^x, i^{p-x})$ est de la forme $(r z^{-1})$ et la condition $(cb)^2 = 1$ donne $r = 1$. Donc G coïncide avec le $g_{\pi(\pi-1)} \mathcal{L} = \sum \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$, les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parcourant $C(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$, z parcourant C et ∞ (2). On voit immédiatement par le même procédé que $\mathcal{L}$ ne peut être le diviseur fixant un symbole dans un $g^{\pi+2}$. Les équations de $\mathcal{L}$ s'obtiennent en adjoignant à celles de $\{a, b\}$ $c^2 = (cb)^2 = (ca)^2 = 1$.

Le diviseur fixant un symbole dans un $g_{p(p^2-1)}^{p+1}$ transitif étant métacyclique, il résulte de ce qui précède que le seul $g_{p(p^2-1)}^{p+1}$ transitif est $\mathcal{L}(2, p)$.

3. Prenons maintenant pour A le $g_{\frac{\pi(\pi-1)}{2}} (\pi \text{ impair})$ engendré

(1) Je me servirai des mêmes notations que dans le Mémoire cité.

(2) Cf. MILLER, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXVI, 1903, p. 294.

par $a = (i^2 z) = (i^0, i^2, \dots, i^{\pi-2}) (i, i^3, \dots, i^{\pi-1})$ et le g_π^* abélien principal B formé des substitutions $b_\beta = (z + \beta)$, β parcourant C (je poserai $b_1 = b$; si $\pi = p$, $b_\beta = b^\beta$). A est défini ⁽¹⁾ par $a^{\frac{\pi-1}{2}} = b_\lambda^p = 1$, $b_\lambda b_k = b_k b_\lambda$, $a^{-1} b_\lambda a = b_{\lambda h}$, h, k parcourant $1, i, \dots, i^{m-1}$ (si $i^p = \sum_{j=0}^{m-1} x_{pj} i^j$, $b_{i^p} = \prod_{j=0}^{m-1} b_{i^j}^{x_{pj}}$). Cherchons à adjoindre à A une s_2 $c = (o\infty) \dots$ telle que, dans $\mathfrak{G} = \langle A, c \rangle$, A soit le groupe fixant ∞ .

Par les mêmes raisonnements que dans le Mémoire cité ⁽²⁾ où l'on changera en indices les exposants de b , on trouve que $c = (rz^{-1})$, r étant un carré ou un non-carré suivant que $\pi \equiv 1$ ou $\equiv 3 \pmod{4}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{G} = \mathfrak{O}(2, \pi)$, *sauf que, si $\pi = 7$, $\mathfrak{G}$ peut encore être le $g_{1,68}^*$ composé; et l'on obtient ainsi les équations de $\mathfrak{O}$.*

$\mathfrak{O}(2, \pi)$ ne peut être le diviseur fixant un symbole σ dans un $g^{\pi+2}$. Soit en effet d la s_2 à adjoindre à $\mathfrak{O}$ pour engendrer ce $g^{\pi+2}$ et supposons d'abord $\pi \equiv 1 \pmod{4}$. On voit, comme dans la recherche précédente, que $d = (\sigma\infty)(z, \xi'_z z^{-1}) (z \neq 0)$, $\xi'_z = r'^i = i^{2p'}$ ou $\xi'_z = s' = i^{2\sigma'}$ selon que z est carré ou non. On a $c = (rz^{-1})$, $dc = (\sigma o\infty)(z, r\xi'_z z^{-1}) (z \neq 0)$, et $(dc)^2$, qui fixe 0, doit être dans $\langle A \rangle$, ce qui exige $r' = s'$. De plus d doit être permutable à A, donc à B, seul g_π de A; or $cb_\lambda c = \left(\frac{r'z}{hz+r'}\right)$ n'est pas de la forme $(z+k)$. Si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, on a de suite $r' = s'$.

Au contraire, le $g_{1,68}^*$ composé est le diviseur fixant un symbole dans un $g_{1,5,12}^0$ trois fois transitif; on le verra bientôt dans un théorème plus général.

4. Tout $g_{\frac{1}{2}p(p-1)} X$ qui a plus d'un g_p en a $p+1$. Si donc X est simple, il est représentable en $g^{p+1} = \mathfrak{O}(2, p)$.

Si $p = 2q+1$ (q premier), X est encore représentable en g^{p+1} [donc isomorphe à $\mathfrak{O}(2, p)$ ou au $g_{1,68}^*$ composé] sauf s'il a un g_q

⁽¹⁾ Cf., loc. cit., p. 264.

⁽²⁾ Je reprendrai seulement ici un point de détail. Si $\alpha = -1$ et si c échange les cycles de a (dont $\pi \equiv 3 \pmod{4}$), $c = (o\infty)(i^{2x}, i^{2q+1-2x}) = (z, rz^{-1}) (r = i^{2q+1})$. Or $cbc = \left(\infty, r, \frac{r}{2}, \frac{r}{3}, \dots, -r\right)$, et $cb_\lambda c$ devant être de la forme $b_z cb_{\lambda'} b_{-\lambda'} a' b_\lambda$, où λ est arbitraire, il faut, pour $\lambda = r$, que l'on ait $x = x' = r$, $cbc = b_z c a' b_r$; le second membre devant fixer 0, i^{2y} doit être égal à $-r$, ce qui exige que l'on ait $\pi \equiv 3 \pmod{4}$; alors y se trouve déterminé.

normal Q dont chaque élément est permutable à chaque e_p . Dans ce cas d'exception, $X|Q$ est représentable en g^{p+1} 2 fois transitif de classe p , et $p+1=2^\omega$. Or, pour que $2^\omega-1=p$ et $2^{\omega-1}-1=q$ soient premiers, il faut que ω et $\omega-1$ le soient; donc $q=3$. Mais alors, $X|Q$ ayant un g_8 abélien normal, X a un $g_{3,8}$ abélien Y . Si Y n'a qu'un g_8 A , il est le produit direct de Q par A , et X est le produit direct de Q par un $g_{3,6}$ de Mathieu. Si Y a $3g_8$, ils ont un g_4 non cyclique commun Δ , caractéristique dans Y , donc normal dans X , et ΔQ est le produit direct de $\Delta=\{b, c\}$ par $Q=\{a\}$. Y est défini par les équations de Δ , Q jointes à $d^2=1$, $db=bd$, $dc=cd$, $dad=a^2$. D'ailleurs $X|\Delta Q$, d'ordre 14, n'a qu'un g_7 auquel répond dans X un $g_{7,12}$ contenant un seul g_7 $S=\{s\}$. Ainsi $sa=as$, $dsd=s^{-1}$, et (en prenant au besoin bd pour b , cd pour c) $sb=bs$, $sc=cs$.

Pour le cas $\pi \neq p$, je prouverai seulement que $\psi(2, 3^2)$ est le seul g_{360} simple, le théorème précédent fournissant une démonstration plus simple que celle donnée par M. Cole (¹). Un g_{360} simple G a 10 ou 40 g_9 . Supposons-en 40. Comme 40 est $\not\equiv 1 \pmod{9}$, les g_9 ne sont pas premiers entre eux deux à deux. Soit $\{a\}$ un g_3 divisant deux g_9 . Il en divisera $v \equiv 1 \pmod{3}$ et le groupe A des éléments permutables à $\{a\}$ est d'ordre kvg . G , n'étant pas représentable en moins de six symboles, n'a aucun diviseur d'indice < 6 . Donc $v=4$, $k=1$. Considérons G comme représenté en g^{10} relativement à A . a , n'entrant que dans 4 g_9 qui sont ceux de A , ne divise aucun conjugué de A et est par suite de degré 9. $A|\{a\}$ est un $g_{1,2}$ ayant 4 g_3 (il est donc tétraédral) et un g_4 non cyclique. Donc A a un g_{12}^9 $B > \{a\}$ qui est abélien ou contient 3 g_4 non cycliques ayant un e_2 normal dans B . Cela étant, B ne peut avoir 3 systèmes d'intransitivité de degré 3; il devrait donc en avoir 1 de degré 6 et 1 de degré 3 et serait impair, ce qui ne se peut, G étant simple. Donc G a 10 g_9 . Considérons G comme représenté en g^{10} relativement au $g_{3,6}A$ formé des éléments permutables au g_9 B . B , étant premier à tous ses conjugués (le raisonnement fait dans le cas précédent le montre), est de classe 9 et, par suite, transitif. B n'est pas cyclique, car le groupe des substitutions permutables à B dans le champ

(¹) A. J., t. XV, 1893, p. 307.

de B serait d'ordre 54 non divisible par 36. Donc $A = BC$, C étant un g_1 du groupe linéaire à 2 variables mod p , et, comme G est simple, donc pair, C est cyclique. Dès lors le g^{10} deux fois transitif où A est le g^0 fixant un symbole est $\mathcal{O}(2, 3^2)$.

5. Cherchons à construire un $g_{\pi(\pi-1)}$ (π impair > 3) G dont un groupe facteur soit $\mathcal{O}(2, \pi)$. Le groupe des isomorphismes I de $\mathcal{O}$ est $\{\mathcal{O}, (iz), (z^p)\}$ en sorte que $I | \mathcal{O}$ est un groupe abélien engendré par deux générateurs indépendants d'ordres respectifs 2 et m . $\mathcal{O}$ est donc unique de son type dans I, car si I contenait un groupe $\mathcal{O}' \neq \mathcal{O}$ et isomorphe à $\mathcal{O}$, il contiendrait $\mathcal{O}\mathcal{O}'$ et $I | \mathcal{O}$ n'aurait pas le type indiqué. Il résulte dès lors d'un théorème de M. Hölder (*M. A.*, t. XLVI, p. 331) que, si m est pair, I a exactement trois $g_{\pi(\pi-1)}$ distincts non isomorphes qui sont $\mathcal{L}(2, \pi)$, $\{\mathcal{O}, (z^{p^{\frac{\pi}{2}}})\} = \mathcal{L}'$, $\{\mathcal{O}, (iz^{p^{\frac{\pi}{2}}})\} = \mathcal{L}''$. Si m est impair, I n'a qu'un $g_{\pi(\pi-1)}$ qui est $\mathcal{L}(2, \pi)$. G n'a pas d'autre type si sa seule suite de composition est G, $\mathcal{O}$, 1.

Supposons que G admette la suite G, D, 1 ($D = \{d\}$, $d^2 = 1$; je supposerai les exposants de d réduits à 0 ou à 1). h, k, β parcourant les mêmes valeurs que précédemment et $\gamma\beta = \gamma$ étant défini par $\beta i\gamma \equiv x$, G aura pour équations

$$\begin{aligned} a^{\frac{\pi-1}{2}} &= d^x, & b_k^h &= d^{\delta_k}, & c^2 &= d^\gamma, & d^2 &= 1, & b_k^{-1} b_h b_k &= b_k d^{\mu_{hk}}, \\ a^{-1} b_h a &= b_{i^h} d^{\varphi_h}, & c^{-1} a c &= a^{-1} d^\delta, & c^{-1} b_\beta d^{\theta_\beta} c &= b_{-\frac{x}{\beta}} c a \gamma_\beta b_{-\frac{x}{\beta}}, \\ da &= ad, & db_h &= b_h d, & dc &= cd. \end{aligned}$$

En prenant $b_h d^{\delta_h}$ pour b_h , on peut supposer ($b_k^{-1} b_h b_k$ et $a^{-1} b_h a$ étant alors, comme b_h , d'ordre p) que $\delta_h = \mu_{hk} = \varphi_h = 0$.

Si $\gamma = 0$, on a nécessairement $\delta = 0$. Cela est clair si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, car, a et $a^{-1} d$ n'étant pas alors du même ordre, on ne peut avoir $c^{-1} a c = a^{-1} d$. Soit donc $\pi \equiv 1 \pmod{4}$: Dc, dans la représentation de G | D donnée au n° 3, sera représenté par $(r z^{-1})$, r étant un carré. La transformée de $(r z^{-1})$ par $\omega = \left(i r \frac{\xi z + \gamma}{\gamma z + \xi r} \right)$ où $\xi^2 r - \gamma^2 \equiv -ir$ est $(r z^{-1}) (i^2 z)$ qui correspond ici à Dca de G | D. ω étant dans $\mathcal{O}(2, \pi)$, on voit que Dc et Dca sont conjugués dans G | D. Donc c est conjugué de ca ou de cad dans G, et, dans les deux cas, $(ca)^2 = 1$.

Si $\gamma = \delta = 1$, en posant $ca = c'$, on obtient $c'^2 = 1$, $c'^{-1}ac' = a^{-1}d$, $c'^{-1}b_{\beta}d^{\theta_{\beta}}c' = b_{\frac{-x^1}{\beta}}c'ar^{+1}b_{\frac{x^1}{\beta}}$, et l'on a bien $\beta v^{+1} = ix$, de sorte qu'en changeant x en ix on est ramené au cas impossible $\gamma = 0$, $\delta = 1$. Donc $\delta = 0$. On aura

$$a^{-1}c^{-1}b_{\beta}d^{\theta_{\beta}}ca = b_{\frac{-x^1}{\beta}}ca\gamma^{+2}b_{\frac{-x^1}{\beta}} = c^{-1}b_{\beta i^{-1}}d^{\theta_{\beta i^{-1}}}c,$$

et, puisque $b_{\beta}d^{\theta_{\beta}}$ et $b_{\beta i^{-1}}d^{\theta_{\beta i^{-1}}}$ sont du même ordre, il faut que $\theta_{\beta} = \theta_{\beta i^{-1}}$. Mais alors, changeant c en $cd^{\theta_{\beta}}$, on aura, pour β carré, $c^{-1}b_{\beta}c = b_{\frac{-x^1}{\beta}}ca\gamma b_{\frac{-x^1}{\beta}}$.

Soit d'abord $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. On peut toujours, en prenant au besoin ad pour a , supposer $\alpha = 0$. La formule précédente donne alors $c^{-1}b_{\frac{-x^1}{\beta}}c = d\gamma b_{\beta}ca^{-\gamma}b_{\beta}$. Donc on n'aura que deux types :

l'un répondant à $\gamma = 0$ est le produit direct de $\mathfrak{V}(2, \pi)$ par D , l'autre répondant à $\gamma = 1$ coïncide avec le groupe $U(2, \pi)$ des substitutions linéaires homogènes à deux variables de déterminant 1. Ce groupe U n'est pas un produit direct et l'on en a ainsi les équations $\pi \equiv 3 \pmod{4}$.

Soit $\pi \equiv 1 \pmod{4}$. Prenons x carré; γ sera pair pour β carré et impair pour β non carré. En prenant donc $ad^{\theta_{\beta}}$ pour a , on aura, quel que soit β , $c^{-1}b_{\beta}c = b_{\frac{-x^1}{\beta}}ca^{\beta}b_{\frac{-x^1}{\beta}}$. On peut donc supposer $\theta_{\beta} = 0$. Or, dans la représentation de $G|D$ en $g^{\pi+1}$ deux fois transitif du n° 3, $Dc = (rz^{-1})$, qui fixe les deux symboles $\pm r^{\frac{1}{2}}$, est une $s_2^{\pi-1}$. Comme $\{Da\}$ est le diviseur fixant 0, ∞ , toutes les $s_2^{\pi-1}$ sont conjuguées de $Da^{\frac{\pi-1}{4}}$.

Donc, dans G , c est conjuguée de $a^{\frac{\pi-1}{4}}$ ou de $a^{\frac{\pi-1}{4}}d$ et, ces deux éléments étant d'ordre $2^{\alpha+1}$, il faut que $\gamma = \delta = \alpha$. On a donc encore deux types : l'un, répondant à $\gamma = \alpha = 0$, est produit direct de $\mathfrak{V}(2, \pi)$ par D ; l'autre, répondant à $\gamma = \alpha = 1$, est $U(2, \pi)$ dont on a ainsi les équations pour $\pi \equiv 1 \pmod{4}$.

6. Prenons maintenant pour le groupe A du n° 1 le $g_{\pi q}$ engendré par $a = (i\gamma z)$ ($\gamma q = \pi - 1$) et par le même $g_{\pi}^{\pi} B$ que précédemment. A est défini par les équations de B jointes à $a^{\gamma} = 1$, $a^{-1}b_{\alpha}a = b_{i\alpha}$. Cherchons à adjoindre à A une s_2 $c = (0\infty)...$

telle que, dans $G = \{A, c\}$, A soit le diviseur fixant ∞ . On aura $cac = a^2$, $a^2 = 1$.

Soit d'abord $\alpha = 1$. Si alors q est pair, A contient une seule s_2 $a^{\frac{q}{2}}$ fixant 0 et ∞ , en sorte que G a $\frac{1}{2}\pi(\pi+1)$ $s_2^{\pi-1}$ contenant $\frac{1}{4}\pi(\pi^2-1)$ cycles binaires. Or soient c et c' deux substitutions ayant le cycle (0∞) ; cc' sera dans $\{a\}$, soit $c' = ca^x$; et inversement ca^x a le cycle (0∞) . Chaque cycle binaire figurant ainsi dans q substitutions de G , les substitutions de G présentent $\frac{1}{2}\pi(\pi+1)q$ cycles binaires. Donc $\frac{1}{2}\pi(\pi+1)q$ est $\geq \frac{1}{4}\pi(\pi^2-1)$ et $q = \pi-1$ ou $\frac{1}{2}(\pi-1)$, ce qu'on a reconnu impossible.

Soit donc q impair. Alors, c , ne pouvant transformer en lui-même aucun cycle de a (la classe est $\pi-1$), les échange deux à deux et est de degré $\pi+1$. D'ailleurs c doit être paire, sans quoi les substitutions paires de G formeraient un diviseur G' dont le p. g. c. d. avec A serait d'indice 2 dans A , tandis que A est pair et divise G' . Donc $\frac{1}{2}(\pi+1)$ est pair et $\pi \equiv 3 \pmod{4}$. Ici encore toute substitution de G ayant le cycle (0∞) est de la forme ca^x , et parmi elles c est la seule s_2 [$c = (ca^x)^q$ étant de degré $\pi+1$, il en est de même de ca^x]. Donc, G étant deux fois transitif, toutes ses s_2 sont conjuguées et au nombre de π [il y a $\frac{1}{2}\pi(\pi+1)$ cycles binaires possibles, et chaque s_2 en a $\frac{1}{2}(\pi+1)$]. Donc c , par exemple, est normale dans un $g_{(\pi+1)q} \in \mathcal{E}'$. D'ailleurs, G a π^2-1 s_p^{π} du type de b fixant un seul symbole, $\frac{1}{2}\pi(\pi+1)(q-1)s_q^{\pi-1}$ (q' divisant q) conjuguées de a^x ($a^x \neq 1$) fixant deux symboles, $\frac{1}{2}\pi(\pi+1)(q-1)s_{iq'}^{\pi-1}$ conjuguées de ca^x . Les $\pi+1$ substitutions restantes qui sont les s_2 doivent être contenues dans $\mathcal{E}'$ et de même dans chaque conjugué de $\mathcal{E}'$. Donc les s_2 sont permutable entre elles et forment avec l'unité un $g_{\pi+1} \in \mathcal{E} = \{c_0, \dots, c_{\pi-1}\}$ ($c_0 = c$) normal dans G (c'est le p. p. c. m. de $e_{(\pi+1)}$). Donc $\pi+1$ est de la forme 2^n . Le procédé de démonstration précédent est emprunté à Frobenius (*S. A. B.*, 1902, p. 364), qui s'en est servi pour le cas $\pi = p$.

Je dis maintenant que $\pi = p$. Soit en effet ν l'exposant auquel appartient $2 \pmod{p}$. On aura $n = k\nu$ et, $2^{k\nu} - 1$ étant divisible par $2^\nu - 1$, $2^\nu - 1$ a la forme p^t et $p^m = \sum_i \binom{k}{i} p^{ri}$. Soit $k = p^s l$, $r = p^s s$ (l, s premiers à p) : pour $r < p^s$, $\binom{k}{r} p^{ri}$ est divisible par $p^{r(\mu+1-x-p)}$ (voir JORDAN, *Traité*, p. 127) qui est $> p^{\mu+x}$ si r

est > 1 ; pour $r \geq p^x$, $p^{r\mu}$ est $> p^{\mu+x}$ si $x > 0$. Donc $\Sigma_1^k \binom{k}{r} p^{r\mu}$ et, par suite, p^m est congru à $p^{\mu+x} l \bmod p^{\mu+x+1}$. Donc $k=1$, $v=n$, $\mu=m$. De plus, m est impair, sans quoi p^m+1 serait $\equiv 2 \bmod 8$. Enfin $m=1$, sans quoi $p+1$, divisant p^m+1 , serait de la forme $2^{n'} (n' < n)$ et 2 appartiendrait à l'exposant n' . Donc $\pi=p=2^n-1$. Donc n est premier et q divise $2^{n-1}-1$.

Ces conditions sont suffisantes. En effet, $\mathcal{Q}$ étant normal dans $\mathcal{G} = A\mathcal{Q}$, A divise le groupe linéaire $L(n, 2)$ à n variables mod 2 qui est d'ordre Kpq (K premier à p); donc, $B = \{b\}$ étant un g_p quelconque de L et a une s_q d'ordre impair permutable à $B^{(1)}$, on peut prendre $\{a, b\}$ pour A , et, une fois A choisi, $\mathcal{G}$ n'a qu'une détermination qui est $A\mathcal{Q}$. Les équations de $\mathcal{G}$ s'obtiennent en adjoignant à celles de $\{a, b\} = \{b, c\}$ sous la forme donnée (avec d'autres notations) au n° 3 ou sous la forme donnée dans le Mémoire déjà cité ⁽²⁾ [j étant une racine primitive du corps galoisien C_{2^n} d'ordre 2^n et t parcourant C_{2^n} , on peut écrire $b = (jt) = (j^x, j^{x+1})$, $a = (j^x, j^{j^x})$, $c = (1-t)$] les équations $a^2=1$, $a^{-1}ba = b^{j^x}$, $ac = ca$ (d'où $a^{-1}c_x a = c_{xj^x}$ en posant $c_x = b^{-x}cb^x$).

On va voir que $q=1$ ou n , en sorte que, si l'on fait abstraction du cas $q=1$, $\mathcal{G}$ est complètement déterminé pour tous les nombres premiers de la forme 2^n-1 . Comme $q=n$ divise $2^{n-1}-1$, on retrouve ce résultat que, si $q=\frac{1}{2}(p-1)$, on a $p=7$.

Représentons désormais $\mathcal{G}$ par les symboles de C_{2^n} , $A = \{a, b\}$ fixant 0, $\{a\}$ fixant 0, 1 et cherchons à adjoindre à $\mathcal{G}$ une s_2 , $d = (t, \varphi t) = (1)(0\infty) \dots$, telle que, dans $\{\mathcal{G}, d\} = \mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ soit le diviseur fixant ∞ . Il faudra que $dbd = b^{-1}$, $da = ad$ (dad doit transformer dbd en $db^{j^x}d$) et que $(cd)^3$ soit dans $\{a\}$. La première condition donne $\varphi t = j\varphi(jt) (t \not\equiv 0)$, d'où, en multipliant les équations répondant à $t=1, j, \dots, j^x=\zeta$, $\varphi\zeta \equiv h\zeta^{-1} \bmod 2$ ($h \equiv i^{-1}\varphi 1$). La troisième, en écrivant que $(cd)^3$ fixe 0 et 1, donne

(¹) L a toujours hors de B des éléments $\neq 1$ permutables à B , et il y en a d'ordre impair, sans quoi $\frac{1}{2}(p-1)$ étant impair, L serait impair et aurait un diviseur normal d'indice 2, tandis que ses facteurs de composition sont p et $(U, 1)$.

(²) *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 263.

$h \equiv 1$ et devient $(cd)^3 = 1$. La deuxième donne $\varphi(j^{i^2}) = \varphi(j^2)^i$, d'où $h^{i^{q-1}} \equiv 1$ qui est une identité si $q = 1$ et qui redonne $h \equiv 1$ (puisque $h^{2^{n-1}} \equiv h^p \equiv 1$) si $q > 1$. Les substitutions b, c, d sont les générateurs de $\mathcal{L}(2, 2^n) = \mathcal{O}(2, 2^n)$ dont elles vérifient les équations, et, comme les équations de $\mathcal{K}$ s'obtiennent en adjoignant à celles de $\{b, c, d\}$ $a^q = 1, a^{-1}ba = b^i, ca = ac, da = ad$, $\mathcal{K}$ contient normalement $\mathcal{L}$. Or $\mathcal{K}$ divise le groupe J des isomorphismes de $\mathcal{L}$ qui est d'ordre $2^n(2^{2n} - 1)n$ et n est premier. Donc $q = 1$ ou n et $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ ou J .

Soit maintenant $\alpha = -1$. On a certainement une solution pour $\mathcal{G}$ en prenant $c = (rs^{-1})$, car on obtient alors, comme au n° 3 (voir le Mémoire cité), $cb_\beta c = b_r c a^r b_r (\alpha^r \beta^2 = -r)$, et ces équations jointes à celles de A définissent $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ est toujours d'indice γ dans $\mathcal{L}(2, \pi)$. Si donc γ est impair, $\gamma = 1$, sans quoi le p. g. c. d. de $\mathcal{G}, \mathcal{O}(2, \pi)$ serait d'indice γ dans $\mathcal{O}$, et γ , qui divise $\pi - 1$, devrait être égal à $\pi + 1$ ou à π (ou à 6 si $\pi = 9$; mais 6 ne divise pas 8). Si γ est pair (donc π impair), $\mathcal{G}$ est d'indice $\frac{\gamma}{2}$ dans $\mathcal{O}(2, \pi)$ et l'on voit de même que $\gamma = 2$.

Les résultats précédents complètent et étendent au cas où m est > 1 les résultats partiels obtenus par M. Frobenius (*loc. cit.*) pour $m = 1$. On en déduit aisément aussi une nouvelle démonstration du théorème suivant, établi par le même géomètre à l'aide de la théorie des caractères :

Un $g_{pq(1+q)}^p$ G ayant exactement $1 + p$ g_p est nécessairement un des groupes $\mathcal{L}(2, 5), \mathcal{O}(2, 5), \mathcal{O}(2, 7), \mathcal{O}(2, 11)$.

En effet, le p. p. c. m. M d'ordre $pq'(1+p)$ des g_p de G est simple ⁽¹⁾. Il est donc représentable en g^{p+1} et coïncide avec $\mathcal{O}(2, p)$. Donc $q' = \frac{1}{2}(p-1)$ ou $p-1$ et de même q . Si donc G est $\neq \mathcal{O}$ et n'est pas le produit direct de $\mathcal{O}$ par un g_2 , il coïncide avec $\mathcal{L}(2, p)$. Mais $\mathcal{O}(2, p)$ n'est représentable en g^p que pour $p = 5, 7, 11$ et $\mathcal{L}(2, p)$ ne l'est que pour $p = 5$, ce qui démontre le théorème.

(1) MILLER, *P. L. M. S.*, t. XXXI, 1899, p. 148.

SUR LES SÉRIES A TERMES CONTINUS ET TOUS DE MÊME SIGNE;

Par M. RENÉ BAIRE.

1. Je me propose de démontrer le théorème suivant, qui, à cause de la simplicité de son énoncé, me paraît présenter un certain intérêt.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit représentable par une série dont les termes sont des fonctions continues et sont, à partir d'un certain rang, tous de même signe, est qu'elle soit semi-continue, supérieurement dans le cas des termes négatifs, inférieurement dans le cas des termes positifs (').

Je me bornerai, pour simplifier, au cas d'une seule variable, et j'étudierai le cas où les termes de la série finissent par être tous *négatifs* (ou nuls). En réunissant au besoin en un seul terme un certain nombre de termes au commencement de la série, on peut supposer que tous les termes sont négatifs ou nuls à *partir du second*. Cela étant, si f_v est la somme des v premiers termes, la suite de fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_v, \dots$ ne va jamais en croissant, c'est-à-dire qu'on a, quel que soit x ,

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq f_v(x) \geq \dots \geq f(x),$$

f étant la somme de la série.

2. Le fait que la condition de l'énoncé est nécessaire est un cas particulier du théorème suivant :

Si une suite de fonctions semi-continues supérieurement $f_1, f_2, \dots, f_v, \dots$ a une limite f , avec la condition qu'on ait, quels que soient x et v ,

$$f_v(x) \geq f(x),$$

f est aussi semi-continue supérieurement.

(') $f(x)$ est dite *semi-continue supérieurement* si, quel que soit x , et quel que soit $\epsilon > 0$, pour toutes les valeurs d'un certain intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, on a

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

En effet, soit x_0 une valeur de x , et soit $\varepsilon > 0$. Comme on a

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f_v(x_0) = f(x_0),$$

on peut trouver p entier tel que

$$f_p(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Comme f_p est semi-continue ^{supérieurement}, on a, quand x est dans un certain intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$,

$$f_p(x) < f_p(x_0) + \varepsilon$$

et, par suite,

$$f(x) \leq f_p(x) < f_p(x_0) + \varepsilon < f(x_0) + 2\varepsilon.$$

La condition

$$f(x) < f(x_0) + 2\varepsilon$$

exprime que f est semi-continue ^{supérieurement}.

Les conditions de cet énoncé sont évidemment vérifiées dans le cas où les f_v sont continues et ne vont pas en croissant, ce qui démontre que la condition du théorème du § 1 est nécessaire.

3. Reste à démontrer la réciproque. Soit f une fonction semi-continue ^{supérieurement}. J'ai donné, dans une Note parue dans ce Bulletin en 1900 (*Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues*, § 1 et § 4), un moyen de former simplement une suite de fonctions continues tendant vers f . Je reprends l'exposé de cette méthode dans le cas d'une variable.

Soit f définie dans l'intervalle $(0, 1)$. Je définis f_v comme il suit : pour chaque nombre de la forme $\frac{\alpha}{2^v}$ (α entier), f_v est égale au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha-1}{2^v}, \frac{\alpha+1}{2^v}\right)$. Dans l'intervalle qui a pour extrémités deux nombres consécutifs de cette forme, f_v varie linéairement.

La suite de fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_v, \dots$ tend vers f . Car, soit x_0 une valeur de x , et soit $\varepsilon > 0$; f étant semi-continue ^{supérieurement}, il y a un intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ dans lequel on a

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

ν étant donné, soit α l'entier tel que

$$\frac{\alpha}{2^\nu} \leq x_0 < \frac{\alpha+1}{2^\nu};$$

$f_\nu(x_0)$ est compris entre $f_\nu\left(\frac{\alpha}{2^\nu}\right)$ et $f_\nu\left(\frac{\alpha+1}{2^\nu}\right)$, qui sont respectivement égaux aux maxima de f dans les intervalles $\left(\frac{\alpha-1}{2^\nu}, \frac{\alpha+1}{2^\nu}\right)$, $\left(\frac{\alpha}{2^\nu}, \frac{\alpha+2}{2^\nu}\right)$; ces intervalles, qui contiennent tous deux x_0 , sont, dès que ν dépasse une certaine valeur, contenus en entier dans $(x_0 - h, x_0 + h)$. A partir de ce moment, les maxima en question sont compris entre $f(x_0)$ et $f(x_0) + \epsilon$; il en est donc de même pour $f_\nu(x_0)$.

Ainsi l'on a, quel que soit x ,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$$

et de plus, quel que soit ν ,

$$f_\nu(x) \geq f(x).$$

Mais je dis qu'on a, en outre,

$$f_\nu(x) \geq f_{\nu+1}(x).$$

Pour que cette inégalité soit démontrée pour toutes les valeurs de x , il suffit, si l'on tient compte de ce fait que f_ν et $f_{\nu+1}$ sont linéaires dans tout intervalle $\left(\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{\nu+1}}\right)$ (α entier), de la vérifier lorsque x est de la forme $\frac{\alpha}{2^{\nu+1}}$.

Plaçons-nous dans ce cas, qui se subdivise en deux :

$$1^\circ \alpha \text{ est pair} = 2\beta; x = \frac{\alpha}{2^{\nu+1}} = \frac{\beta}{2^\nu}.$$

$f_\nu(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\beta-1}{2^\nu}, \frac{\beta+1}{2^\nu}\right)$
ou $\left(\frac{\alpha-2}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+2}{2^{\nu+1}}\right)$.

$f_{\nu+1}(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha-1}{2^{\nu+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{\nu+1}}\right)$ qui est contenu dans le précédent.

On a donc bien

$$f_{\nu+1}(x) \leq f_\nu(x).$$

2° α est impair $= 2\beta + 1$; $x = \frac{\alpha}{2^{\beta+1}} = \frac{2\beta+1}{2^{\beta+1}}$.

$f_v(x)$ est égal à la demi-somme des nombres $f_v\left(\frac{\beta}{2^v}\right)$ et $f_v\left(\frac{\beta+1}{2^v}\right)$, respectivement égaux aux maxima de f dans les intervalles $\left(\frac{\beta-1}{2^v}, \frac{\beta+1}{2^v}\right)$ et $\left(\frac{\beta}{2^v}, \frac{\beta+2}{2^v}\right)$.

$f_{v+1}(x)$ est égal au maximum de f dans l'intervalle $\left(\frac{\alpha-1}{2^{v+1}}, \frac{\alpha+1}{2^{v+1}}\right)$ ou $\left(\frac{\beta}{2^v}, \frac{\beta+1}{2^v}\right)$ qui est contenu dans chacun des deux précédents.

Donc $f_{v+1}(x)$ est inférieur ou égal aux nombres $f_v\left(\frac{\beta}{2^v}\right)$ et $f_v\left(\frac{\beta+1}{2^v}\right)$ et aussi à leur demi-somme $f_v(x)$, ce qui vérifie la condition indiquée.

Il est ainsi établi qu'une fonction semi-continue supérieurement peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions continues allant en décroissant, ou encore comme la somme d'une série de fonctions continues à termes tous négatifs à partir du second. De même une fonction semi-continue inférieurement est la somme d'une série à termes continus et tous positifs à partir du second.

Ces résultats s'étendent au cas de n variables, en utilisant les méthodes indiquées aux § 1 et 4 de la Note citée, et introduisant dans les démonstrations qui précèdent des modifications évidentes.

On a ainsi un procédé de représentation *qui est spécial aux fonctions semi-continues*.

LES SIX ÉQUATIONS DISTINCTES DU TRIANGLE EN MÉTRIQUE ANINVOLUTIVE;

Par M. G. FONTENÉ.

1. Les principes de la Métrique aninvolutive ont été exposés en 1892 dans un Ouvrage ayant pour titre : *L'hyperespace*; un résumé de ces principes a paru dans ce *Bulletin*, t. XXVI, p. 176, en ce qui concerne l'espace ordinaire.

En se bornant à la Géométrie plane, les éléments métriques que considère la Métrique aninvolutive sont relatifs à deux coniques F et φ doublement tangentes. Étant donnés deux points A

et B, la droite AB coupe la conique F en deux points F', F'', et, si l'on désigne par R le rapport anharmonique (A, B, F', F''), on appelle *pseudo-distance* des deux points A et B la quantité

$$\overline{AB} = \frac{1}{2i} \log R;$$

la *pseudo-angle* de deux droites α et β se définit d'une manière corrélatrice, en considérant cette fois la conique φ . Si l'on suppose que F et φ sont deux ellipses imaginaires, dont les équations ont des coefficients réels, les quantités R et ρ sont des imaginaires de module 1, et l'on a, par exemple, avec $\overline{AB}$ réel,

$$\begin{cases} \cos \overline{AB} + i \sin \overline{AB} = e^{i \overline{AB}} = \sqrt{R}, \\ \cos \overline{AB} - i \sin \overline{AB} = e^{-i \overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \end{cases}$$

ou

$$\frac{i \sin \overline{AB}}{R - 1} = \frac{\cos \overline{AB}}{R + 1} = \frac{1}{2\sqrt{R}}.$$

On définit alors pour chaque droite un paramètre spécial T, pour chaque point un paramètre spécial θ , et l'on pose par exemple

$$\sigma(A, B) = \frac{\sin \overline{AB}}{\sin T},$$

$$\gamma(A, B) = \frac{\sin(T - \overline{AB})}{\sin T}, \quad \gamma(B, A) = \frac{\sin(T + \overline{AB})}{\sin T},$$

d'où il suit que l'on a

$$\sigma^2(A, B) = 1 - \gamma(A, B) \times \gamma(B, A);$$

on pose encore

$$\frac{1}{\tau}(A, B) = \frac{\gamma(A, B)}{\sigma(A, B)}, \quad \frac{1}{\tau}(B, A) = \frac{\gamma(B, A)}{\sigma(B, A)},$$

les deux σ étant de signes contraires. On définit de même les quantités $\sigma(\alpha, \beta)$, ...

Le caractère essentiel de la Métrique aninvolutive est de considérer les figures en position. La Métrique de Cayley et Klein n'est

qu'une transformation homographique de la Métrique de Lobatchefsky, et le fait que les éléments métriques des figures dépendent de leur position disparaît par réduction à la Métrique aneuclidienne; une réduction analogue n'a pas lieu par la Métrique aninvolutive, fondée sur la considération de *deux* coniques F et φ . L'existence d'un paramètre spécial T pour chaque droite, d'un paramètre spécial θ pour chaque point, fait d'ailleurs du plan dans lequel on opère un être géométrique non homogène. En Métrique ordinaire, tous les paramètres ont la valeur commune $\frac{\pi}{2}$; les σ sont alors des sinus de pseudo-distances ou de pseudo-angles, les γ sont des cosinus, les $\frac{1}{\tau}$ sont des cotangentes.

2. Il existe une simple infinité de figures ayant les mêmes éléments métriques relativement aux deux coniques F et φ ; une transformation homographique permet en effet de réduire ces deux coniques à un système de deux cercles concentriques. Voyons quelles sont les conséquences de ce fait pour un triangle.

Soit un triangle ABC , dont les côtés sont portés par les axes α , β , γ ; les éléments métriques fondamentaux sont au nombre de douze : trois pseudo-distances, trois pseudo-angles, trois paramètres T , trois paramètres θ ; ou encore : six comoments tels que $\gamma(B, C)$, $\gamma(C, B)$, auxquels se rattachent trois quantités $\sigma(B, C)$, et, d'autre part, six comoments tels que $\gamma(\beta, \gamma)$, $\gamma(\gamma, \beta)$, ... Comme un triangle dépend de six paramètres, il suit de ce qu'on a vu plus haut que cinq éléments métriques d'un triangle suffisent à déterminer tous les autres; il existe donc sept relations distinctes entre les douze éléments fondamentaux d'un triangle. Je ne puis démontrer ici que l'une de ces relations contient une constante remarquable, que l'on doit regarder comme étant le paramètre spécial du plan dans lequel on opère; cette relation est d'une forme assez compliquée quand on la considère comme ayant lieu entre les six paramètres relatifs au triangle et la constante du plan; je n'ai pas essayé de l'écrire avec les γ et la constante. Je la laisserai entièrement de côté, et *je donnerai quatre groupes équivalents de six relations entre les douze éléments γ .*

En écrivant pour chaque groupe une seule des six relations qui

le composent, on a d'abord

$$(I) \quad \gamma(B, C) = \gamma(B, A) \times \gamma(A, C) - \sigma(B, A) \sigma(A, C) \times \gamma(\gamma, \beta),$$

$$(II) \quad \gamma(\beta, \gamma) = \gamma(\beta, \alpha) \times \gamma(\alpha, \gamma) - \sigma(\beta, \alpha) \sigma(\alpha, \gamma) \times \gamma(C, B);$$

comme extension de la formule de Trigonométrie sphérique

$$\sin b \cot \alpha - \sin C \cot A = \cos b \cos C,$$

où l'on considère les éléments α, A, b, C (avec les angles extérieurs), on a encore

$$(III) \quad \sigma(C, A) \frac{1}{\tau}(C, B) + (\sigma\beta, \alpha) \frac{1}{\tau}(\beta, \gamma) = \gamma(C, A) \gamma(\beta, \alpha),$$

$$(IV) \quad \sigma(A, C) \frac{1}{\tau}(B, C) + \sigma(\alpha, \beta) \frac{1}{\tau}(\gamma, \beta) = \gamma(A, C) \gamma(\alpha, \beta).$$

On a aussi

$$(V) \quad \frac{\sigma(B, C)}{\sigma(\beta, \gamma)} = \frac{\sigma(C, A)}{\sigma(\gamma, \alpha)} = \frac{\sigma(A, B)}{\sigma(\alpha, \beta)},$$

les trois rapports étant de même signe par hypothèse.

3. Nous adopterons ici les notations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma(B, C) = a, \\ \sigma(C, A) = b, \\ \sigma(A, B) = c, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma(B, C) = a', \\ \gamma(C, A) = b', \\ \gamma(A, B) = c', \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma(C, B) = a'', \\ \gamma(A, C) = b'', \\ \gamma(B, A) = c'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma(\beta, \gamma) = A, \\ \sigma(\gamma, \alpha) = B, \\ \sigma(\alpha, \beta) = C, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma(\beta, \gamma) = A', \\ \gamma(\gamma, \alpha) = B', \\ \gamma(\alpha, \beta) = C', \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma(\gamma, \beta) = A'', \\ \gamma(\alpha, \gamma) = B'', \\ \gamma(\beta, \alpha) = C'', \end{cases}$$

on a donc

$$\begin{cases} a^2 = 1 - a' a'', \\ b^2 = 1 - b' b'', \\ c^2 = 1 - c' c'', \end{cases} \quad \begin{cases} A^2 = 1 - A' A'', \\ B^2 = 1 - B' B'', \\ C^2 = 1 - C' C'', \end{cases}$$

et, par hypothèse, les trois rapports $\frac{a}{A}, \frac{b}{B}, \frac{c}{C}$ sont de même signe.

On a alors les quatre groupes de formules

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} (1) & a'' = b'c' - bcA', \\ (2) & b'' = c'a' - caB', \\ (3) & c'' = a'b' - abC', \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{ll} (1') & a' = b''c'' - bcA'', \\ (2') & b' = c''a'' - caB'', \\ (3') & c' = a''b'' - abC'', \end{array} \right. \\
 \text{(II)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} (1) & A'' = B'C' - BCa', \\ (2) & B'' = C'A' - CA b', \\ (3) & C'' = A'B' - AB c', \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{ll} (1') & A' = B''C'' - BCa'', \\ (2') & B' = C''A'' - CA b'', \\ (3') & C' = A''B'' - AB c'', \end{array} \right. \\
 \text{(III)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} (1) & b \frac{a''}{a} + C \frac{A'}{A} = -b'C'', \\ (2) & c \frac{b''}{b} + A \frac{B'}{B} = -c'A'', \\ (3) & a \frac{c''}{c} + B \frac{C'}{C} = -a'B'', \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{ll} (1') & c \frac{a'}{a} + B \frac{A''}{A} = -c''B', \\ (2') & a \frac{b'}{b} + C \frac{B''}{B} = -a''C', \\ (3') & b \frac{c'}{c} + A \frac{C''}{C} = -b''A', \end{array} \right. \\
 \text{(IV)} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} (1) & b \frac{a'}{a} + C \frac{A''}{A} = -b''C', \\ (2) & c \frac{b'}{b} + A \frac{B''}{B} = -c''A', \\ (3) & a \frac{c'}{c} + B \frac{C''}{C} = -a''B', \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{ll} (1') & c \frac{a''}{a} + B \frac{A'}{A} = -c'B'', \\ (2') & a \frac{b''}{b} + C \frac{B'}{B} = -a'C'', \\ (3') & b \frac{c''}{c} + A \frac{C'}{C} = -b'A'', \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

On passe des formules de gauche à celles de droite en permutant par exemple b et c , B et C , et échangeant les accents (') et (''); le groupe (III) est son propre corrélatif, les formules (1) et (1') se correspondent.

On a encore

$$\text{(V)} \quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{abc}{\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{ABC} = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}},$$

en posant

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & c' & b'' \\ c'' & 1 & a' \\ b' & a'' & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & C' & B'' \\ C'' & 1 & A' \\ B' & A'' & 1 \end{vmatrix},$$

et en disposant des signes des deux radicaux; ces formules sont analogues aux formules de Trigonométrie euclidienne

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} = \frac{\left(\frac{S}{R}\right)}{\sin A \dots} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{R}\right)}.$$

4. Pour établir l'équivalence des groupes de formules (I) et (II), montrons par exemple que les formules (I) donnent les formules (II). En vertu des formules (1), le déterminant adjoint au déterminant δ est

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab C' & ac B' \\ ba C'' & b^2 & bc A' \\ ca B' & cb A'' & 1 \end{vmatrix}.$$

La considération des trois mineurs relatifs aux éléments a^2 , b^2 , c^2 donne d'abord l'égalité des quatre premiers rapports (V); le mineur relatif à l'élément $bc A'$ donne ensuite

$$a^2 bc (B' C' - A'') = a' \times \delta$$

ou

$$B' C' - A'' = a' \times \frac{\sqrt{\delta}}{ac} \times \frac{\sqrt{\delta}}{ab} = a' \times BC.$$

On peut encore faire la démonstration en se limitant aux trois premiers des rapports (V). Les formules (1) et (1'), (2) et (2') du groupe (I) donnent

$$c^2 (b^2 A' A'' - a^2 B' B'') = (a' a'' - b' b'') (1 - c' c'') = (b^2 + a^2) c^2$$

ou

$$a^2 B^2 = b^2 A^2;$$

les trois premiers rapports (V) sont donc égaux, étant donnée l'hypothèse faite sur les signes. Si l'on élimine alors c' entre les formules (1) et (3') du groupe (I), on a

$$bc A' = b' (a' b'' - ab C'') - a' = -b' ab C'' - a'' b^2,$$

ou

$$c A' = -ab' C'' - a'' b,$$

ou encore

$$CA' = -A b' C'' - a'' B;$$

l'élimination de c'' entre (1') et (3) donne de même

$$CB'' = -B a' C' - b' A;$$

si l'on élimine b' entre ces deux formules, ce qui se fait en les ajoutant après avoir multiplié la seconde par $-C''$, on obtient

$$C(A' - B' C'') = -a'' B(1 - C' C'') = -a'' BC^2,$$

ce qui donne la formule (1') du groupe (II). Ce dernier calcul n'est

que l'extension d'un calcul bien connu de Trigonométrie sphérique. (Cf. par exemple Briot et Bouquet.)

5. Pour passer du groupe (I) au groupe (III), reprenons la formule

$$c A' = ab' C' - a' b,$$

fournie par l'élimination de c' entre (1) et (3') de (I); si l'on divise par a , et si l'on remplace $\frac{c}{a}$ par $\frac{C}{A}$, on obtient la première des formules (III).

Inversement, pour passer du groupe (III) au groupe (I), éliminons C'' entre les formules (1) et (3') du groupe (III) écrites ainsi :

$$\frac{b}{a} a' = -\frac{C}{A} A' - b' C', \quad \frac{b}{c} c' = -b' A' - \frac{A}{C} C';$$

si l'on ajoute ces formules, après avoir multiplié la première par $\frac{A}{C}$, la seconde par $-b'$, on obtient

$$\frac{b}{a} \frac{A}{C} a' - \frac{b}{c} b' c' = -A' b^2,$$

ou, en multipliant par $\frac{c}{b}$,

$$\frac{c}{a} \frac{A}{C} a' - b' c' = -A' bc;$$

ce sera la première formule du groupe (I), si l'on peut remplacer $\frac{c}{a}$ par $\frac{C}{A}$. Il resterait donc à déduire des formules (III) l'égalité des trois premiers rapports (V); je n'ai pas réussi à faire ce calcul d'une manière simple.

Si l'équivalence des groupes (III) et (IV) était établie directement, on déduirait facilement de l'ensemble de ces deux groupes les égalités en question. En divisant par C la formule (1) du groupe (III) et la formule (2') du groupe (IV), et en éliminant $\frac{1}{C}$, on a facilement

$$a^2 b' \frac{A'}{A} - b^2 a' \frac{B'}{B} + (a^2 - b^2) \frac{C'}{C} = 0$$

ou

$$a^2 \left(b' \frac{A'}{A} + \frac{C'}{C} \right) = b^2 \left(a' \frac{B'}{B} + \frac{C'}{C} \right);$$

les formules (3') du groupe (III) et (3) du groupe (IV) donnent alors

$$a^2 \frac{bc'}{CA} = b^2 \frac{ac'}{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B}.$$

SUR LES TÉTRAÈDRES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A DES QUADRIQUES;

Par M. G. HUMBERT.

1. On se propose, dans ce travail, d'examiner s'il existe un théorème analogue à celui de Poncelet pour les tétraèdres inscrits à une quadrique par leurs sommets et circonscrits à une ou deux autres par leurs faces.

2. Tout d'abord on reconnaît aisément qu'il y a toujours une infinité quadruple de tétraèdres inscrits à une quadrique, A, et circonscrits à une autre, B, choisie au hasard; et ce résultat concorde avec celui que donne *a priori* la comparaison du nombre des paramètres avec celui des équations.

Mais en ce cas le tétraèdre *ne se ferme pas* toujours, c'est-à-dire que, si l'on se donne au hasard trois faces d'un tétraèdre, pourvu qu'elles touchent B et que leur point commun soit sur A, la quatrième face, qui est évidemment déterminée, ne touche pas nécessairement B. Pour qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire pour que le tétraèdre se ferme toujours, il est évidemment nécessaire et suffisant que les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B soient en nombre *cinq fois infini*. D'ailleurs ils ne peuvent, en aucun cas, être en nombre six fois infini.

Dès lors, pour généraliser le théorème de Poncelet, il faudra rechercher à quelles conditions les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B formeront une série quintuplement infinie.

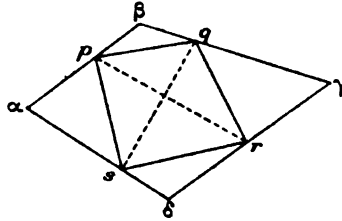
Avant d'énoncer le théorème qui donne la solution de ce problème, nous établirons un lemme préliminaire :

3. **LEMME I.** — *Soient A et B deux surfaces du second ordre quadritangentes; désignons par m un point quelconque de A, par C le cône de sommet m circonscrit à B, par Π un plan quelconque tangent à B : je dis que Π coupe A et C suivant deux coniques telles qu'on puisse inscrire à la première un triangle circonscrit à la seconde.*

Soient en effet (*fig. 1*) $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère qui est la perspective sur le plan Π , à partir du point m , du quadrilatère gauche que forment dans l'espace les quatre génératrices communes à A et à B; le plan Π coupe les quatre faces de ce quadrilatère gauche suivant les droites pq , qr , rs , sp , qui forment évidemment un quadrilatère inscrit au quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (¹).

Cela posé, observons que le cône C (de sommet m) coupe Π suivant une conique, qui touche les côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ et

Fig. 1.



les deux droites pr et qs ; car : 1° les côtés de $\alpha\beta\gamma\delta$ sont la perspective sur Π , à partir de m , de quatre génératrices de la quadrique B à laquelle C est circonscrit; 2° les droites pr et qs sont les deux génératrices suivant lesquelles le plan Π coupe la quadrique B à laquelle il est tangent.

D'un autre côté, la quadrique A coupe Π suivant une conique qui passe par les points p , q , r , s , et aussi par le point de rencontre de $\alpha\beta$ avec $\delta\gamma$: car une des génératrices de la quadrique A issues du point m s'appuie sur les deux génératrices qui ont pour perspective, à partir de ce point, les droites $\alpha\beta$ et $\delta\gamma$; elle coupe donc le plan Π au point d'intersection de ces deux droites.

Dès lors, le triangle dont les côtés sont $\alpha\beta$, pr et $\delta\gamma$ est inscrit à la conique section de A par Π ; et il est circonscrit à la conique section de C par Π , ce qui établit le lemme.

4. THÉORÈME I. — *Étant données deux surfaces du second ordre, A et B, quadritangentes, il existe un infinié quintuple*

(¹) Il est clair, de plus, que les droites pq et sr se coupent sur la diagonale $\alpha\gamma$, et les droites ps et qr sur la diagonale $\beta\delta$; mais cette remarque nous sera inutile.

de tétraèdres inscrits à l'une par leurs sommets et circonscrits à l'autre par leurs faces.

Sous une autre forme :

De quelque façon qu'on commence et qu'on poursuive la construction d'un tétraèdre, inscrit à A et circonscrit à B, la construction aboutira toujours.

Réciproquement, cette propriété n'appartient à deux quadriques que si elles sont quadritangentes.

5. Démontrons d'abord la proposition directe.

En vertu du lemme I et du théorème de Poncelet, il existe une infinité simple de triangles dans le plan Π , inscrits à la section de A et circonscrits à la section de C par ce plan; sous une autre forme, il existe une infinité simple de trièdres circonscrits au cône C et dont les arêtes s'appuient sur la conique section de A par Π . Observons maintenant que les faces de ces trièdres touchent la quadrique B, à laquelle le cône C est circonscrit à partir de m : nous pouvons dire, en considérant le tétraèdre formé par un des trièdres et par le plan Π , qu'il y a une infinité *simple* de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B, ayant pour sommet un point *quelconque*, m , de A et pour face opposée un plan tangent *quelconque*, Π , de B; donc une infinité *quintuple* de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B.

De quelque façon qu'on choisisse trois faces d'un tétraèdre, pourvu, bien entendu, qu'elles touchent B et qu'elles se coupent sur A (en un point m), le tétraèdre pourra s'achever : car, d'après ce qui précède, il y a une *triple* infinité de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B ayant m pour sommet, c'est-à-dire qu'on peut choisir arbitrairement les trois faces qui passent par m , pourvu qu'elles touchent B; ces trois faces se coupent deux à deux suivant trois arêtes, lesquelles rencontrent de nouveau A en des points m_1, m_2, m_3 , et le plan de ces trois points est nécessairement tangent à B.

6. COROLLAIRE I. — *De même, si m_1, m_2, m_3 sont trois points quelconques de A situés dans un même plan tangent de B, les*

nouveaux plans tangents menés à B par les trois droites m_1, m_2, m_3 , se coupent en un point situé sur A.

7. COROLLAIRE II. — *Soit m un point d'une quadrique A; les arêtes d'un trièdre quelconque de sommet m coupent de nouveau A en m_1, m_2, m_3 : toute quadrique, B, tangente aux trois faces du trièdre et quadritangente à A, touche le plan des trois points m_1, m_2, m_3 .*

8. Cela posé, pour démontrer la réciproque de notre théorème général, établissons un second lemme.

9. LEMME II. — *Soit toujours m un point de la quadrique A; désignons par C un cône quadrique quelconque de sommet m : je dis qu'il existe une quadrique, B, inscrite à C et quadritangente à A.*

En effet, σ étant la biquadratique (de genre zéro) commune à C et à A, on sait qu'il y a quatre génératrices de A (p_1, p_2, p_3, p_4) tangentes à σ , respectivement en des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, lesquels sont situés dans un même plan Π_0 ⁽¹⁾: les quatre génératrices p_i forment un quadrilatère gauche. Soit θ la conique section de C par Π_0 : il existe une quadrique, B, passant par les quatre génératrices p_i et par un point, α , choisi arbitrairement sur θ ; cette quadrique est quadritangente à A, puisqu'elle en contient quatre génératrices, je dis qu'elle est circonscrite à C. En effet, 1° elle contient la conique θ , puisqu'elle en contient cinq points, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α ; 2° son intersection avec le cône C touche évidemment les génératrices p_1, p_2, p_3, p_4 , aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, ce qui exige, puisqu'elle comprend déjà la conique θ , qu'elle se compose de cette conique comptée deux fois.

C. Q. F. D.

10. Supposons maintenant qu'il existe une infinité triple de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à une quadrique B', ayant pour un de leurs sommets un point m de A. Je dis que B' est quadritangente à A.

En effet, soit C le cône de sommet m circonscrit à B'; en vertu

⁽¹⁾ On vérifie ce résultat sans difficulté en partant de la représentation de la quadrique A sur un plan, à l'aide de projetantes issues de m .

de l'hypothèse, trois plans tangents quelconques de C déterminent un trièdre dont les arêtes percent de nouveau A en m_1, m_2, m_3 , et le plan m_1, m_2, m_3 , qui dépend évidemment de deux paramètres au moins, enveloppe la quadrique B' . D'un autre côté, en vertu du théorème direct et du lemme II, ce plan enveloppe une quadrique B inscrite au cône C et quadritangente à A ; B' coïncide donc avec B , ce qui établit la proposition, et la réciproque cherchée.

11. COROLLAIRE I. — *C étant un cône quadrique dont le sommet m est sur une quadrique A , il n'existe qu'une surface du second ordre quadritangente à A et inscrite à C .*

12. COROLLAIRE II. — Soient A et D deux quadriques quelconques. Considérons les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à D dont un sommet est le point m de A , et soit C le cône de sommet m circonscrit à D .

En vertu de ce qui précède, les faces des tétraèdres considérés qui sont opposées au sommet m touchent la quadrique B qui est inscrite à C et quadritangente à A ; par hypothèse elles touchent aussi la quadrique D . Or les quadriques B et D sont inscrites toutes deux au cône C ; leurs plans tangents communs forment donc deux séries : ceux de la première enveloppent le cône C et ceux de la seconde un autre cône Σ , dont je désigne le sommet par μ . En d'autres termes :

Les tétraèdres inscrits à une quadrique A , circonscrits à une quadrique D prise au hasard, et dont un sommet est un point m de A , forment évidemment un système doublement infini; les faces opposées au sommet m sont en nombre simplement infini, et passent toutes par un point fixe μ .

Réciproquement, tout plan passant par μ et tangent à D appartient, comme face, à une infinité simple des tétraèdres considérés.

13. Cherchons maintenant une extension analogue du théorème de Poncelet pour les tétraèdres inscrits à une quadrique et dont les faces touchent chacune deux autres quadriques : il nous sera plus commode d'étudier le problème réciproque, à savoir celui des tétraèdres inscrits à une biquadratique gauche et dont les faces

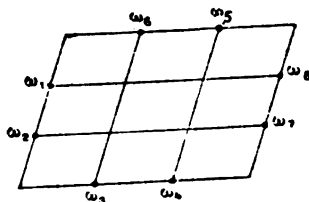
touchent une quadrique. *A priori*, il n'y a, en général, qu'un nombre limité de tels tétraèdres; et, en aucun cas, il ne peut en exister une triple infinité. Le cas intéressant et donc celui où les tétraèdres considérés seraient en nombre doublement infini; et voici, à ce sujet, le théorème fondamental que nous compléterons plus loin par une étude géométrique détaillée.

14. THÉORÈME. — *Pour qu'il existe une infinité double de tétraèdres inscrits à une biquadratique gauche, ω , et circonscrits à une quadrique, B, il suffit et il faut que huit génératrices de la quadrique soient des cordes de la biquadratique.*

Démontrons d'abord que la condition est suffisante.

15. En vertu de l'hypothèse, les huit points $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ où la biquadratique ω coupe B sont, deux à deux, sur huit génératrices de B, comme l'indique la figure schématique suivante (fig. 2).

Fig. 2.



Il en résulte que la quadrique A menée par ω et la corde $\omega_1\omega_2$ contiendra les cordes $\omega_3\omega_4$ et $\omega_5\omega_6$ qui s'appuient sur $\omega_1\omega_2$, et aussi la corde $\omega_7\omega_8$ qui s'appuie sur $\omega_3\omega_4$: cette quadrique A, contenant ainsi quatre génératrices de B, lui sera quadritangente.

De même la quadrique A', menée par ω et la corde $\omega_1\omega_8$, sera quadritangente à B, de sorte que la biquadratique ω sera l'intersection de deux quadriques, A et A', quadritangentes à B.

Cela posé, soit Π un plan tangent *quelconque* de B, coupant ω aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$: menons par les droites $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3$ les trois plans, autres que Π , qui touchent B: ces plans, en vertu d'un corollaire précédent (n° 6) se coupent à la fois sur A et sur A', c'est-à-dire sur ω . Désignons par α'_4 leur point d'intersection: le tétraèdre $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha'_4$ est inscrit à ω et circonscrit à B, et, comme le

plan $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, est un plan tangent quelconque, Π , de B, on obtient ainsi une infinité *double* de pareils tétraèdres. c. q. f. d.

16. Étudions de plus près ces tétraèdres. D'abord, en groupant trois à trois les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, on obtient, par la méthode précédente, quatre nouveaux points, $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$, de la biquadratique ω , et les quatre tétraèdres $\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha'_l$ (les indices i, j, k, l étant différents) sont inscrits à ω et circonscrits à B.

Dès lors les plans $\alpha_i \alpha_j \alpha_k, \alpha_i \alpha_j \alpha'_k, \alpha_i \alpha_j \alpha'_l, \alpha_i \alpha_j \alpha'_i$, sont tangents à B: comme il ne passe que deux tels plans par la droite $\alpha_i \alpha_j$, et que l'un d'eux est, par hypothèse, le plan des quatre points $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \alpha'_l$, on en conclut que les quatre points $\alpha_i, \alpha_j, \alpha'_k, \alpha'_l$ sont dans un même plan, tangent à B.

Soient maintenant α_i et α'_i les arguments elliptiques, sur la biquadratique ω , des points α_i et α'_i , la représentation paramétrique étant supposée telle que les arguments de quatre points de ω , situés dans un même plan, aient une somme nulle. On aura entre les α_i et α'_i les sept relations

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l = 0, \quad \alpha_i + \alpha_j + \alpha'_k + \alpha'_l = 0,$$

i, j, k, l étant différents et désignant les chiffres 1, 2, 3, 4 dans un ordre quelconque. On en déduit sans difficulté les relations

$$\alpha_i + \alpha'_j + \alpha'_k + \alpha'_l = 0, \quad 2(\alpha'_i - \alpha_i) = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha'_i = \alpha_i + \omega_\alpha,$$

ω_α étant une des trois demi-périodes des fonctions elliptiques introduites.

Donc le point α'_i est fixe lorsque le point α_i est donné, et le tétraèdre $\alpha_i \alpha'_j \alpha'_k \alpha'_l$ est aussi circonscrit à B. Ainsi :

Si une biquadratique ω admet pour cordes huit génératrices d'une quadrique B, il existe une double infinité de tétraèdres inscrits à ω et circonscrits à B. Parmi ces tétraèdres, il en est une infinité simple qui ont pour sommet un point, α , de ω , et les faces opposées au sommet α passent toutes par un même point, α' , de la biquadratique : les points α et α' sont conjugués dans une des trois involutions linéaires qui transforment la biquadratique en elle-même.

Les faces d'un quelconque des tétraèdres coupent respectivement la biquadratique en un nouveau point : les quatre points ainsi obtenus sont encore les sommets d'un second tétraèdre circonscrit à B; et, réciproquement, le premier tétraèdre se déduit du second par la même construction.

Les huit sommets et les huit faces des deux tétraèdres peuvent se grouper quatre à quatre de trois nouvelles manières pour former deux tétraèdres analogues.

17. Passons maintenant à la proposition réciproque, en supposant qu'il y ait une double infinité de tétraèdres inscrits à une biquadratique ω et circonscrits à une quadrique B, et cherchons la relation qui doit exister entre B et ω .

Tout d'abord, en vertu de l'hypothèse, un plan *quelconque* Π , tangent à B, sera face d'un ou de plusieurs des tétraèdres, et l'un de ceux-ci aura pour sommets trois des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, communs à Π et à ω . Or je dis qu'aucune distinction n'est possible entre ces quatre points, c'est-à-dire que l'équation du quatrième ordre qui donne les points d'intersection de ω avec un plan *quelconque*, Π , tangent à la quadrique B, ne peut se décomposer *rationnellement* en deux équations d'ordre inférieur.

Car, si elle se décomposait en deux équations du second ordre, à chaque plan Π correspondraient *rationnellement* deux des points, α_1 et α_2 , où Π coupe ω . A chacun des plans, Π , menés par α_1 tangentiellement à B correspondrait donc un seul point, α_2 , de ω ; or les plans Π considérés enveloppant un cône unicursal et ω étant de genre un, la correspondance n'est possible que si α_2 est fixe quand α_1 est donné. En ce cas, tout plan tangent à B mené par α_1 passerait par α_2 , ce qui exige que B contienne la droite $\alpha_1 \alpha_2$, et, comme α_1 est un point quelconque de ω , il faut que B passe par la biquadratique ω , cas à écarter comme sans intérêt.

Le même raisonnement prouverait que l'équation du quatrième ordre ne peut se décomposer rationnellement en deux équations, respectivement du premier et du troisième ordre.

Il résulte de là que, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les quatre points communs à ω et à un plan quelconque, Π , tangent à B, il y aura *quatre* tétraèdres, inscrits à ω et circonscrits à B, ayant pour une de leurs faces le plan Π , et que leurs trois sommets dans cette face

seront respectivement

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4; \quad \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4; \quad \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4.$$

Soient alors $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$ les quatrièmes sommets respectifs de ces tétraèdres; on reconnaît, comme au n° 16, qu'on a entre les arguments elliptiques des points considérés les relations

$$\alpha'_i = \alpha_i + \omega_{\alpha},$$

qui, jointes à

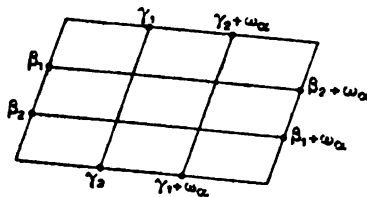
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

donnent toutes les propriétés géométriques trouvées plus haut (n° 16).

Cela posé, soit β_1 l'un des huit points communs à ω et à la quadrique B; désignons par d_1 et d'_1 les deux génératrices de B qui passent par β_1 ; je dis que ce sont des cordes de ω .

En effet, un plan quelconque mené par d_1 est un plan, Π' , tangent à B; et, si $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ sont ses nouveaux points d'intersection avec ω , il existe, en vertu des propriétés générales des tétraèdres étudiés, un tétraèdre, inscrit à ω et circonscrit à B, admettant pour trois de ses sommets β_1, β_3 et β_4 . Les deux faces, autres que Π' ,

Fig. 3.



qui passent par β_1 , étant tangentes à B et distinctes de la face Π' , passent nécessairement par la génératrice d'_1 , qui dès lors contient le quatrième sommet, β'_1 . La droite d'_1 est donc une corde de ω , et il en est de même de d_1 : de plus, en vertu de ce qui précède, si β_2 est le second point de rencontre de d_1 avec ω , le second point de rencontre de d'_1 avec ω sera le point β'_2 , tel que

$$\beta'_2 = \beta_2 + \omega_{\alpha}.$$

Il résulte de là sans difficulté que les huit points de rencontre de ω avec B sont situés deux à deux sur huit génératrices de B comme l'indique le schéma ci-dessus (fig. 3).

Par suite, huit génératrices de B sont des cordes de ω , ou encore (n° 15) on peut faire passer par ω deux quadriques, A et A' , quadritangentes à B .

Ce résultat est précisément la proposition qu'il s'agissait d'établir sur la liaison entre ω et B . C. Q. F. D.

Transformons maintenant les propositions précédentes par polaires réciproques, nous obtenons ce qui suit :

18. THÉOREME. — *Soient A , A' et B trois quadriques. Il n'y a en général qu'un nombre limité de tétraèdres inscrits à B par leurs sommets et dont les faces touchent à la fois A et A' ; en aucun cas il ne peut exister un nombre triplement infini de tels tétraèdres.*

Pour que les tétraèdres considérés soient en nombre doublement infini, il faut et il suffit que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par A et A' , il y en ait deux qui soient quadritangentes à B .

En ce cas, chaque point, ω , de B est le sommet de quatre tétraèdres de la famille; trois quelconques des quatre plans menés par ω tangentielllement à A et à A' sont trois faces d'un même tétraèdre.

Soit T un quelconque des tétraèdres considérés; par chacun de ses sommets passe un nouveau plan touchant à la fois A et A' : les quatre plans ainsi déterminés forment un tétraèdre, T' , de la famille. Le tétraèdre T se déduit de T' par la même construction.

Les huit faces et les huit sommets de T et de T' peuvent se grouper de trois autres manières pour former deux tétraèdres analogues.

19. On peut compléter ces résultats par la proposition suivante, moins intéressante que la précédente, et qu'on établirait par des considérations de même nature.

Pour qu'il existe une série *simplement infinie* de tétraèdres inscrits à la quadrique B et circonscrits à la fois aux quadriques A et A' , il *suffit* que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par A et A' , il y en ait une qui soit quadritangente

à B. Le lieu des sommets de ces tétraèdres est une biquadratique tracée sur B.

Il existe alors une seconde série de tétraèdres inscrits à B et circonscrits à A et à A', dont les sommets décrivent, sur B, une seconde biquadratique.

Les faces d'un tétraèdre quelconque de la première série et celles d'un tétraèdre quelconque de la seconde forment un système de huit plans, tangents à une double infinité de quadriques.

Tout plan tangent à la fois à A et à A' est face d'un tétraèdre de chaque série.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 MARS 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Félix Lucas : *Sur les dérivées modulaires des polynomes.*

M. G. Fontené : *Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive.*

SÉANCE DU 16 MARS 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Suchar : *Sur les mouvements réciproques.*

M. de Polignac : *Sur la recherche du facteur intégrant.*

M. Lévy : *Sur une construction de statique graphique.*

SÉANCE DU 13 AVRIL 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Élections :

Sont élus membres de la Société à la majorité des membres présents :

MM. Sundman, présenté par MM. Painlevé et Borel;	
Curtiss,	» J. Tannery et Hadamard ;
Bernstein,	» Picard et Estanave;
Metzler,	» Picard et Perott.

Communications :

M. Bernstein : *Sur les équations différentielles du second ordre.*

M. d'Ocagne : *Sur la résolution nomographique des triangles sphériques.*

MM. Andoyer, Carvallo et Lévy : *Observations à ce sujet.*

M. Humbert : *Sur une extension du théorème de Poncelet à l'espace.*

M. Suchar : *Sur l'équilibre d'un fil.*

SÉANCE DU 27 AVRIL 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communication :

M. Bricard : *Sur une propriété des parties entières des racines carrées.*

SÉANCE DU 4 MAI 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Raffy : *Sur un théorème de Minding relatif aux équations différentielles du premier ordre.*

M. Bricard : *Sur certaines identités arithmétiques.*

SÉANCE DU 18 MAI 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Zervos : *Démonstration de l'impossibilité d'une certaine identité entre fonctions entières.*

M. Touche : *Sur le vol par orbes.*

M. Carvallo fait hommage à la Société d'un travail intitulé : *Conférence sur les notions de calcul géométrique utilisées en Mécanique et en Physique.*

M. Touche : *Sur la théorie des vecteurs.*

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Lecornu : *Sur la déviation des projectiles.*

M. Bioche : *Sur une réciproque d'un théorème d'Halphen*

relativement à des propriétés des courbes gauches du quatrième ordre comportant un cas d'exception.

M. Félix Lucas : *Sur les dérivés modulaires des polynomes; identités qui en résultent.*

SÉANCE DU 15 JUIN 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

M. P. Boutroux, présenté par MM. Poincaré et Borel, est élu membre de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Remoundos : *Sur les fonctions entières de genre fini.*

M. Raffy : *Sur les surfaces isothermiques.*

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — *Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal*. 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément (OUVRAGE COMPLET) :

I^{re} PARTIE : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*; 1887..... 15 fr.

II^e PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889..... 15 fr.

III^e PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces*; 1894..... 15 fr.

IV^e PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique*; 1896..... 15 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 2).

Mémoires et Communications.

	Pages
[D4b] PETROVITCH (M.). — Remarques sur les zéros des fonctions entières.	65
[E5] PETROVITCH (M.). — Sur les fonctions représentées par une classe étendue d'intégrales définies.	67
[H5jα] SUCHAR (P.-J.). — Sur les équations différentielles réciproques du second ordre.	103
[J4aα] DE SÉGUIER (J.). — Sur certains groupes de Mathieu.	116
[D1b] BAIRE (R.). — Sur les séries à termes continus et tous de même signe.	125
[Q1a] FONTENÉ (G.). — Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive.	128
[L ¹ 47eα, L ¹ 48b] HUMBERT (G.). — Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques.	135
 Comptes rendus des séances (mars, avril, mai, juin 1904)	 145

MODIFICATION A LA LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ.

Date de
l'admission.

1897. FONTENÉ, Inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, Paris (5°).

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

GOURSAT (Edouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique.** (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

TOME I. Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques. Grand in-8 de vi-620 pages, avec 52 figures; 1902. 20 fr.

TOME II. Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles. Equations aux dérivées partielles. Eléments de calcul des variations. Un premier fascicule (304 pages) a paru. Prix du Tome II complet pour les souscripteurs. 20 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES

S'adresser, pour la rédaction, à M. BRIGARD, boulevard Raspail, 295, Paris, 14^e;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXII. — FASCICULE III.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1904

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du *Bulletin* qui doit être adressé de préférence à M. Bricard.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le *Bulletin* et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages de texte imprimé.**

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. CLAIRIN.

Pour intégrer par la méthode de M. Darboux une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, il faut chercher si les deux systèmes de caractéristiques (C) et (Γ), que nous supposons distincts, possèdent des invariants. M. Goursat a étudié ⁽¹⁾ les équations qui définissent ces invariants et il a obtenu des résultats importants; ceux de ces résultats qui sont relatifs aux invariants du second ordre peuvent être énoncés ainsi :

S'il existe un invariant du premier ordre pour le système (C) de caractéristiques, il y a au plus un invariant du second ordre pour le même système;

Si l'équation donnée est une équation de Monge-Ampère, il y a au plus un invariant du second ordre pour chaque système de caractéristiques.

Dire qu'il n'y a qu'un invariant du second ordre signifie qu'il est toujours possible d'exprimer tous les invariants de cet ordre en fonction de l'un d'entre eux et des invariants du premier ordre.

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers de la proposition suivante :

Si le système (C) se compose de caractéristiques du premier ordre, ce système possède au plus un invariant du second ordre.

Soit

$$(1) \quad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

une équation de l'espèce indiquée; soient en outre m et μ les

⁽¹⁾ *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Ch. VII. Les notations dont je me sers sont les mêmes que celles qui ont été employées par M. Goursat dans cet Ouvrage.

racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial s} \lambda + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

la racine m correspondant au système (C) de caractéristiques, c'est-à-dire au système composé de caractéristiques du premier ordre. L'équation (1) peut être regardée comme le résultat de l'élimination de m entre les équations

$$(2) \quad \begin{cases} r + ms + g(x, y, z, p, q, m) = 0, \\ s + mt + k(x, y, z, p, q, m) = 0; \end{cases}$$

autrement dit l'on a

$$f(x, y, z, p, q, s, t) = ms + g(x, y, z, p, q, m),$$

m étant une fonction de x, y, z, p, q, s, t définie par la seconde équation (2).

Pour trouver tous les invariants du second ordre du système (C), il faut intégrer les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + mq) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (ms - f) \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ &+ (s + mt) \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + s \frac{\partial f}{\partial p} + t \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0; \end{aligned}$$

en remplaçant $ms - f$ et $s + mt$ par leurs valeurs, cette dernière équation devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + mq) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - g(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ - k(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + s \frac{\partial f}{\partial p} + t \frac{\partial f}{\partial q} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une intégrale $u(x, y, z, p, q, s, t)$ et prenons comme variables x, y, z, p, q, u, t ; une fonction φ de x, y, z, p, q, s, t devient une fonction Φ des nouvelles variables; on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x},$$

et l'on peut substituer dans cette égalité y, z, p, q, t à x , tandis

que l'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s}.$$

En remplaçant par leurs expressions les dérivées de φ dans les équations qui définissent les invariants et en remarquant que u satisfait à ces équations il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (p + mq) \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ &- g(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - k(x, y, z, p, q, m) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0; \end{aligned}$$

t ne figure dans les coefficients que par l'intermédiaire de m ; d'ailleurs, m et u étant deux fonctions indépendantes de s et t , t figure effectivement dans ces coefficients.

Toute intégrale de ce système satisfait également aux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial m} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial k}{\partial m} \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial m^2} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial^2 k}{\partial m^2} \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

D'après cette dernière équation, si la fonction Φ existe on devra avoir entre g et k une relation de la forme

$$(3) \quad \alpha g + \beta k + \gamma + \delta m = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des fonctions de x, y, z, p, q .

Admettons qu'il en soit ainsi, Φ est une fonction de x, y, z, p, q, u définie par les trois équations

$$\begin{aligned} \beta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0, \\ \beta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \delta \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0, \\ \beta \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

Une intégrale de ce système d'équations est une intégrale du

système suivant d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned}dz - p \, dx - q \, dy &= 0, \\ \alpha \, dp + \beta \, dq - \gamma \, dx - \delta \, dy &= 0;\end{aligned}$$

or une intégrale de ce système est une intégrale des équations

$$\begin{aligned}dz - p \, dx - q \, dy &= 0, \\ dp + g \left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx} \right) dx &= 0, \\ dq + k \left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx} \right) dx &= 0,\end{aligned}$$

qui définissent le système (C) de caractéristiques du premier ordre, comme on le vérifie immédiatement en multipliant les deux membres des deux dernières équations respectivement par α et β et en ajoutant, à condition de tenir compte de (3).

Le théorème est donc démontré : Φ ne peut être qu'une fonction de u et des invariants du premier ordre du système (C).

Nous n'avons pas restreint la généralité en supposant l'équation (1) remplacée par le système (2) : il n'y aurait, si la chose était impossible, qu'à effectuer au préalable une transformation de contact convenable pour substituer à l'équation donnée une équation équivalente à un système tel que (2).

SÉPARATION ANALYTIQUE D'UN SYSTÈME DE RAYONS INCIDENTS ET RÉFLÉCHIS (suite);

Par M. M. DE MONTCEUIL.

Dans un article précédent ⁽¹⁾, nous avons considéré le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation, d'ailleurs quelconque; et nous avons vu comment les quatre plans isotropes, tangents en un même point, aux deux courbes du réseau qui s'y rencontrent, déterminent par leurs intersections quatre congruences de droites normales à autant de familles de surfaces. Ces congruences, avons-nous dit, se répartissent en deux couples formant chacun un système de rayons incidents et réfléchis analy-

(¹) T. XXXI, fascicule 4, p. 233.

tiquement séparable. Nous avons montré comment cette propriété appartient encore aux nappes des enveloppes de sphères dont le centre décrit la surface dirimante, ces nappes étant d'ailleurs formées par les quatre familles de surfaces normales aux congruences.

Nous nous proposons aujourd'hui de déterminer sur une surface absolument quelconque une catégorie de réseaux jouissant de propriétés analogues au réseau des courbes génératrices d'une surface de translation.

Il serait aisé, comme nous le montrerons dans la suite, de déterminer les réseaux que nous avons en vue, sans passer par l'intermédiaire des surfaces de translation. Toutefois, deux motifs nous engagent à les faire intervenir.

Nous y gagnerons d'abord de pouvoir mettre en relief une correspondance intéressante, qui relie une surface arbitrairement donnée à un ensemble de surfaces de translation dépendant de deux paramètres.

Cette façon de procéder nous permettra encore de définir une catégorie, d'ailleurs illimitée, de formules qui, établies dans l'hypothèse d'une surface de translation, s'étendent au cas de surfaces quelconques.

Surfaces de translation. — Avant d'aborder l'objet propre de ce travail, nous allons rappeler brièvement et compléter quelques résultats que nous avons exposés ailleurs concernant les surfaces de translation ⁽¹⁾.

Nous avons défini les coordonnées de ces surfaces au moyen du système suivant ⁽²⁾ :

$$(1) \quad \begin{cases} y = \int \frac{1-u^2}{4} C'' du + \frac{1-u^2}{4} D' + \int \frac{1-u_1^2}{4} C_1'' du_1 + \frac{1-u_1^2}{4} D_1', \\ x = i \int \frac{1+u^2}{4} C'' du + i \frac{1+u^2}{4} D' - i \int \frac{1+u_1^2}{4} C_1'' du_1 - i \frac{1+u_1^2}{4} D_1', \\ z = \int \frac{u}{2} C'' du + \frac{u}{2} D' + \int \frac{u_1}{2} C_1'' du_1 + \frac{u_1}{2} D_1'. \end{cases}$$

D', C'' représentent ici les dérivées premières et troisièmes de

⁽¹⁾ Thèse de doctorat.

⁽²⁾ *Ibid.*, p. 55.

deux fonctions arbitraires de la variable u ; D'_1 , C''_1 les dérivées correspondantes de la variable u_1 . On vérifie, en outre, que les fonctions D , D_1 représentent les longueurs des arcs des deux courbes, lieux des extrémités du segment dont le point milieu décrit la surface de translation.

L'interprétation géométrique du système (1) peut être formulée comme il suit :

Sur les tangentes à deux courbes minima quelconques prenons deux points eux aussi quelconques; le milieu du segment qui relie les deux points décrira la surface de translation dont les coordonnées sont définies par les relations précédentes.

Interpréter les formules du système (1), comme nous venons de le faire, revient à considérer les surfaces de translation comme le lieu d'un point du plan tangent à une surface minima quelconque. Cela équivaut à appliquer le mode de construction de Ribaucour à ces surfaces. La surface minima est ici la surface de référence.

Poursuivant nos investigations, considérons le point du plan tangent à la surface de référence qui engendre la surface de translation précédemment définie et, par ce point, menons une parallèle à la normale de la surface minima. Nous obtenons ainsi une congruence de droites normale à une famille de surfaces. Ces surfaces, que nous avons appelées ailleurs *surfaces* Ξ (1), donnent la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0,$$

ξ , u , u_1 désignant les coordonnées d'O. Bonnet. Nous avons montré que la surface de translation correspondante en constituait la développée moyenne ponctuelle. Il suit de là que la surface minima est l'enveloppe d'un plan perpendiculaire au segment focal de Ξ et le coupant en son milieu. De là, nous tirons cette conséquence :

Si l'on associe à une surface minima quelconque une des

(1) Thèse de doctorat.

surfaces de translation, lieu du point du plan tangent à celle-là, précédemment défini, ces deux surfaces seront les développées moyennes tangentielles et ponctuelles de la famille de surfaces Ξ normales à la congruence des droites menées par chaque point de la surface de translation parallèlement aux normales de la surface minima.

Le segment focal de la famille de surfaces Ξ est donné, à une constante près, par la relation

$$(2) \quad \rho = - \frac{D + D_1}{2}.$$

La surface Ξ correspondante a pour équation

$$(3) \quad \xi = u C_1 + u_1 C - \frac{1 + uu_1}{2} (C' + C'_1 + D + D_1).$$

Il suffira de supprimer les fonctions D et D_1 dans cette équation pour obtenir celle de la surface minima développée tangentielle de Ξ .

Il resterait à indiquer comment, des surfaces trouvées, on déduit les deux systèmes de rayons incidents et réfléchis normaux à quatre familles de surfaces Ξ dont font partie celles que nous avons déterminées. Nous renvoyons, pour ces développements, à l'article précédemment cité.

Extension des formules (1) à des surfaces quelconques. — Exprimer les coordonnées d'une surface de translation au moyen du système (1) revient à la considérer comme la développée moyenne (1) d'une surface Ξ définie par l'équation (3), ξ , u , u_1 désignant toujours les coordonnées d'O. Bonnet.

Étendons ce mode de représentation à une surface quelconque. Soient donc x , y , z les coordonnées d'une surface développée moyenne d'une seconde surface définie par une fonction ξ de u , u_1 . Nous désignerons par la lettre ξ cette surface.

(1) Par développée moyenne nous entendrons toujours la développée moyenne ponctuelle.

ρ désignant le segment focal de ξ , on trouve

$$(4) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left[(u + u_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \right], \\ y = \frac{i}{2} \left[(u_1 - u) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \right], \\ z = \frac{1}{2} \left[(uu_1 - 1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi \right], \\ \rho = \frac{1}{2} \left[(uu_1 + 1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi \right]. \end{cases}$$

C'est ce système (4) qui, dans le cas des surfaces de translation, se confond avec le système (1).

Or nous allons définir quatre nouvelles fonctions, que nous désignerons, comme les précédentes, par les lettres C, D, C₁, D₁ et qui entraîneront l'identification des systèmes (1) et (4) *quelles que soient les surfaces de coordonnées x, y, z.*

Il est évident que, dans le cas général, les nouvelles fonctions dépendent chacune des deux variables u, u₁. Du reste, il suffit, pour les obtenir, d'écrire que les deux systèmes de valeurs des expressions de x, y, z, ρ , définies par les équations (1) et (2) d'une part et (4) de l'autre, sont identiques.

Cette identification conduit aux relations

$$(5) \quad \begin{cases} C = \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial \xi}{\partial u_1} - u \xi \right], \\ C_1 = \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \xi \right], \\ D = D_1 = -\frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - u \frac{\partial \xi}{\partial u} - u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi \right]. \end{cases}$$

De ce système on déduit l'identité

$$(6) \quad \xi = u_1 C + u C_1 - \frac{1 + uu_1}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial C_1}{\partial u_1} + D + D_1 \right).$$

Ainsi donc, sous le bénéfice du système (5), l'équation d'une surface quelconque ξ prend la forme de l'équation (3) que vérifient les surfaces Ξ .

Il ne serait pas sans intérêt de prendre pour point de départ cette équation de la surface ξ et d'en déduire [toujours en tenant

compte du système (5)] les éléments géométriques qui s'y rattachent : développée moyenne, etc. Sans entreprendre cette étude en détail, nous signalerons les résultats suivants :

Les dérivées $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ de la fonction ξ définie par l'équation (6) peuvent s'obtenir en opérant comme si C , D étaient des fonctions de u seulement; C_1 , D_1 des fonctions de u_1 seulement.

La même remarque s'applique aux dérivées $\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n}$, $\frac{\partial^n \xi}{\partial u_1^n}$, $\frac{\partial^{n+1} \xi}{\partial u^n \partial u_1}$, $\frac{\partial^{n+1} \xi}{\partial u_1^n \partial u}$, où l'on suppose $n \geq 2$, avec cette restriction que les expressions trouvées doivent être multipliées par le facteur 2.

Il suit de là que toute expression où figurent les seules quantités u , u_1 , ξ , $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ prend la même forme, qu'on y remplace ξ et ses dérivées par les expressions déduites de l'équation (3) particulières aux surfaces Ξ ou par celles que l'on déduit de l'équation (6) qui convient à toutes les surfaces.

La même remarque s'applique, au facteur près 2^n , à toute expression homogène et de degré n en $\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n}$, ...

Nous avons ainsi défini la catégorie illimitée de formules dont nous avons parlé au début qui, établies dans l'hypothèse des surfaces Ξ ou, ce qui revient au même, des surfaces de translation, leurs développées moyennes, conviennent à des surfaces quelconques.

Comme application des remarques précédentes, considérons les coordonnées de la développée moyenne d'une surface Ξ , définie par le système (1) où C , D , C_1 , D_1 sont fonctions respectives d'une seule variable. Le système (4) montre que les expressions des coordonnées de la développée moyenne d'une surface quelconque ne contiennent que les seules quantités u , u_1 , ... Nous pouvons donc affirmer sans calcul que le système (1), où l'on considère les fonctions C , D , ... comme définies par le système (5), donnera les coordonnées de la développée moyenne d'une surface quelconque.

Les lignes de courbure de ξ nous fourniront une autre application de notre proposition.

Ces lignes sont définies par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} du^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du_1^2,$$

équation homogène en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$.

D'ailleurs, dans le cas des surfaces Ξ , cette équation prend la forme

$$\begin{aligned} & \left[2 u_1 \frac{\partial D}{\partial u} + (1 + uu_1) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial u^2} \right) \right] du^2 \\ &= \left[2 u \frac{\partial D_1}{\partial u_1} + (1 + uu_1) \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 D_1}{\partial u_1^2} \right) \right] du_1^2. \end{aligned}$$

Cette équation sera donc celle des lignes de courbure d'une surface quelconque; C, D, C_1, D_1 et leurs dérivées désignent alors les fonctions définies par le système (5).

Nous venons de voir comment, C, D, C_1, D_1 désignant les fonctions à deux variables, les formules du système (1) représentent les coordonnées d'une surface quelconque. Or, de ces formules, on peut en déduire de beaucoup plus simples.

On vérifie en effet que, si dans l'un quelconque des seconds membres du système (1) on groupe d'une part les termes en C, D , de l'autre les termes en C_1, D_1 , ces deux groupes représentent des valeurs égales. Il suit de là que les quantités x, y, z, ρ peuvent s'exprimer au moyen d'un seul de ces groupes à la condition de le multiplier par 2.

Ainsi donc les coordonnées d'une surface et le segment focal ρ correspondant pourront être exprimées par le système

$$(7) \quad \begin{cases} x = \frac{1-u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) + u \frac{\partial C}{\partial u} - C, \\ y = i \left[\frac{1+u^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) - u \frac{\partial C}{\partial u} + C \right], \\ z = u \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) - \frac{\partial C}{\partial u}, \\ \rho = -D. \end{cases}$$

On déduirait le second système de celui-ci en changeant C, D en C_1, D_1 et i en $-i$.

Ces formules sont celles que nous avons établies ailleurs (1),

(1) *Bulletin de la Soc. math.*, t. XXXI, fascicule 4, p. 235.

dans le but d'obtenir des expressions rationnelles et sans signe de quadrature des coordonnées et de l'arc d'une courbe.

Ici, seulement, les deux systèmes définissent deux familles de courbes de paramètres u , et u qui engendrent chacun la même surface. Nous reviendrons sur le réseau de ces courbes.

Les coordonnées de la développée moyenne tangentielle de ξ se déduisent de celles de la développée moyenne ponctuelle de la façon la plus simple.

On passe de cette seconde surface à la première par un simple changement de signe devant les termes en D' , D'_1 qui figurent dans les formules du système (1).

Nous supposons toujours les fonctions C , D , C_1 , D_1 définies par le système (5).

Enveloppes et enveloppées. — Rappelons les surfaces définies respectivement par les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = u_1 C(u, u_1) + u C_1(u, u_1) \\ - \frac{1 + uu_1}{2} \left[\frac{\partial C(u, u_1)}{\partial u} + \frac{\partial C_1(u, u_1)}{\partial u_1} + D(u, u_1) + D_1(u, u_1) \right], \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = u_1 C(u, \alpha_1) + u C_1(\alpha, u_1) \\ - \frac{1 + uu_1}{2} \left[\frac{\partial C(u, \alpha_1)}{\partial u} + \frac{\partial C_1(\alpha, u_1)}{\partial u_1} + D(u, \alpha_1) + D_1(\alpha, u_1) \right]. \end{array} \right.$$

Les fonctions C , D , C_1 , D_1 qui figurent dans la première équation sont celles que définit le système (5). Les fonctions qui rentrent dans l'expression de ζ se déduisent des précédentes par le changement de u_1 en α_1 dans C , D , de u en α dans C_1 , D_1 , α , α_1 désignant des paramètres quelconques.

L'équation (8) définit une surface quelconque, dont la développée moyenne ponctuelle est représentée par le système (7).

L'équation (9) définit un ensemble de surfaces Ξ à deux paramètres qui auront pour développées moyennes des surfaces de translation.

Avant d'étudier les rapports qui existent soit entre les surfaces ξ et les surfaces ζ , soit entre leurs développées moyennes, nous devons déterminer la nature de ces surfaces.

La surface ξ et sa développée moyenne sont absolument quel-

conques. La surface définie par la fonction ζ est une surface Ξ et sa développée moyenne une surface de translation. Mais cette dernière surface n'est pas la plus générale de cette catégorie. Nous devons donc préciser sa nature.

Pour y arriver nous pourrions procéder comme il suit :

Supposons l'une des familles des courbes lieux des extrémités du segment mobile, dont le milieu décrit la surface de translation, définie par le système (7), où C , D désignent des fonctions quelconques de la variable u et d'un paramètre arbitraire α_1 . Supposons la seconde famille définie par un système analogue que nous appellerons le système (7)' et qu'on déduira du précédent en changeant C , u , α_1 , i en C_1 , u_1 , α , $-i$.

Assujettissons maintenant deux courbes quelconques de famille différente à se rencontrer. Écrivant seulement la première équation de condition, nous aurons

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1-u^2}{2} \left[\frac{\partial^2 C(u, \alpha_1)}{\partial u^2} + \frac{\partial D(u, \alpha_1)}{\partial u} \right] + u \frac{\partial C(u, \alpha_1)}{\partial u} - C(u, \alpha_1) \\ & = \frac{1-u_1^2}{2} \left[\frac{\partial^2 C_1(u_1, \alpha)}{\partial u_1^2} + \frac{\partial D_1(u_1, \alpha)}{\partial u_1} \right] + u_1 \frac{\partial C_1(u_1, \alpha)}{\partial u_1} - C_1(u_1, \alpha). \end{aligned} \right.$$

Nous allons imposer à ces courbes une nouvelle condition et exiger que toutes celles d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentielllement à une famille de plans isotropes parallèles. Si nous remarquons que les variables u , u_1 désignent deux paramètres directeurs de plans isotropes tangents aux courbes de chaque famille, nous nous rendons compte aisément que, au point de rencontre de deux courbes, u sera fonction de α seulement et u_1 de α_1 . On peut d'ailleurs, sans restreindre la généralité du problème, supposer qu'on a précisément en ce point $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1$.

Mais, alors, le système (10) sera vérifié pour $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1$, ou, ce qui revient au même, pour $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$. Dès lors, les trois relations (10) expriment trois conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $C(u, u_1)$, $D(u, u_1)$, ... définies par le système (5). Cela résulte de ce fait que les coordonnées des surfaces définies par ces fonctions doivent pouvoir être représentées indifféremment par les systèmes (7) ou (7)'.

D'ailleurs, le système (5) montre que, entre les fonctions

$C(u, u_1), \dots$, il ne saurait y avoir plus de trois relations distinctes. Ainsi donc, les conditions que nous nous sommes imposées nous ont conduit à déterminer *précisément* les quatre fonctions $C, D, \dots$ définies par le système (5), c'est-à-dire les quatre fonctions qui figurent dans l'expression de ξ donnée par la relation (8). D'ailleurs, les fonctions $C(u, \alpha_1), \dots$ sont bien déduites des fonctions précédentes par le changement de u_1 en α_1 dans la première, de u en α dans la seconde. Ce sont donc bien les fonctions qui figurent dans l'expression de ζ définie par l'équation (9). Nous pourrons donc maintenant exprimer comme il suit le caractère des surfaces, développées moyennes des surfaces ζ .

L'ensemble des surfaces de translation, développées moyennes des surfaces ζ , s'obtient en prenant pour courbes lieux des extrémités du segment mobile, deux familles de courbes telles que toutes celles d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles.

Nous allons étudier maintenant quelques-unes des relations qui existent entre les surfaces ξ et ζ , ou encore entre leurs développées moyennes.

Si l'on forme les dérivées de ξ et ζ au moyen des relations (8) et (9), on vérifie que, pour les points des deux surfaces définis par les relations

$$u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1,$$

on a

$$\begin{aligned} \xi &= \zeta, & \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{\partial \zeta}{\partial u}, & \frac{\partial \xi}{\partial u_1} &= \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial u_1}, \\ & & \frac{\partial^n \xi}{\partial u^n} &= 2 \frac{\partial^n \zeta}{\partial u^n}, & \frac{\partial^n \xi}{\partial u_1^n} &= 2 \frac{\partial^n \zeta}{\partial u_1^n}, \\ & & \frac{\partial^{(n+1)} \xi}{\partial u^n \partial u_1} &= 2 \frac{\partial^{(n+1)} \zeta}{\partial u^n \partial u_1}, & \frac{\partial^{(n+1)} \xi}{\partial u_1^n \partial u} &= 2 \frac{\partial^{(n+1)} \zeta}{\partial u_1^n \partial u}. \end{aligned}$$

Nous supposons $n \geq 2$.

De ces relations nous déduisons la conclusion suivante :

Une expression en $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ ne change pas de valeur quand on y remplace ces quantités par les quantités correspondantes $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \dots$ et qu'on y fait $\alpha = u, \alpha_1 = u_1$.

Par cette substitution une expression homogène en $\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n}$, ... de degré p se trouve divisée par $2p$.

Tirons quelques conséquences de ces propositions.

Les coordonnées de la surface ξ sont fonctions des seules quantités $u, u_1, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}$ (1). D'ailleurs, les coordonnées de ζ se déduisent des premières par la substitution de la fonction ζ à la fonction ξ . Nous en concluons que les points correspondants des deux surfaces se confondent. D'autre part, les variables u, u_1 définissent la direction commune des normales à ces mêmes surfaces; elles sont donc tangentes au point considéré.

Ainsi donc la surface ξ est l'enveloppe de la surface ζ .

Considérons maintenant les développées moyennes.

Pour le même motif que tout à l'heure, les points correspondants sont confondus.

Il est facile de prouver qu'ici encore les deux surfaces sont tangentes en ces points. En effet, on vérifie que les différentielles dx, dy, dz de ces surfaces sont des fonctions linéaires des seules dérivées $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}, \dots$. Elles sont donc proportionnelles. Les deux surfaces ont donc leurs normales confondues aux points correspondants.

Ainsi donc la développée moyenne de ξ est l'enveloppe de l'ensemble des surfaces de translation, développées moyennes de ζ .

La même remarque s'applique aux lignes de courbure dont les équations sont homogènes en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$.

Par conséquent, les lignes de courbure de ξ sont les enveloppes des lignes de courbure de ζ .

Faisons encore une application des résultats précédents.

On vérifie que l'élément linéaire d'une développée moyenne

(1) Voir DARBOUX, *Théorie de surfaces*, t. I, p. 246.

quelconque est définie par la relation

$$(11) \quad ds^2 = d\rho^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u_1^2} du du_1,$$

ρ désignant toujours le segment focal de ξ et ayant sa différentielle définie par la relation

$$\begin{aligned} d\rho = & \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2 \partial u_1} - u \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \right] du \\ & + \frac{1}{2} \left[(1 + uu_1) \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1^2} - u \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} \right] du_1. \end{aligned}$$

On voit par là que ds^2 est homogène et du second degré en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$, ... Si donc nous désignons par dS^2 l'élément linéaire relatif à la développée moyenne de ζ , on aura la relation

$$ds^2 = 4 dS^2$$

au point où l'enveloppe touche l'enveloppée.

Cette relation nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Supposons qu'on ait réussi par un procédé quelconque à déterminer deux ensembles de surfaces de translation à deux paramètres, définies comme précédemment et telles que, aux points de contact avec leurs enveloppes, leur élément linéaire ait la même valeur : ces enveloppes seront applicables.

Remarquons, en terminant, que les courbes lieux des extrémités du segment mobile dont le point milieu décrit les surfaces de translation, développées moyennes de ζ , décrivent l'enveloppe de ces mêmes surfaces.

Cela résulte de ce fait que deux courbes quelconques de famille différente se rencontrent.

Réseaux (u, u_1) . — Nous désignerons ainsi la catégorie de réseaux dont nous avons parlé au début et qui, tracés sur une surface quelconque, jouissent de propriétés analogues au réseau des courbes génératrices d'une surface de translation.

Pour nous rendre compte de cette analogie, remarquons que ce dernier réseau peut être considéré comme formé de deux familles

de courbes telles que toutes les courbes d'une même famille rencontrent chacune des courbes de l'autre tangentiellement à une famille de droites parallèles. D'après la définition même des surfaces de translation, de pareils réseaux ne se rencontrent que sur ces surfaces. Mais nous pouvons élargir la définition donnée en substituant à la famille des droites parallèles tangentes aux courbes d'une même famille une famille de plans parallèles tangents à ces mêmes courbes. Prenons par exemple des plans isotropes. Dès lors, la définition précédente caractérisera les réseaux composés de deux familles de courbes telles que toutes les courbes d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles. Cette définition comprendra encore, comme cas particulier, le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation, mais, dans le cas général, elle caractérisera une catégorie de réseaux susceptibles d'être tracés sur une surface quelconque.

Tels sont les réseaux (u, u_1) dont nous nous proposons d'indiquer sommairement quelques propriétés.

Nous remarquerons d'abord que, sur une surface donnée, ils forment une catégorie caractérisée par deux fonctions arbitraires.

En effet, considérons la surface proposée comme la développée moyenne d'une surface ξ . Cette surface pourra être considérée comme définie par le système (4). Or, si l'on porte les valeurs x, y, z ainsi déterminées dans l'équation de cette même surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

on obtiendra une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1}, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \xi, u, u_1\right) = 0,$$

dont l'intégrale générale ξ renferme deux fonctions arbitraires.

D'ailleurs, chacune des valeurs de ξ donnera un réseau (u, u_1) . En effet, les deux familles de ces réseaux (on s'en rend compte aisément) sont données séparément par les systèmes (7) et (7)' où l'on fait respectivement $u_1 = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ Or, à chaque valeur de ξ correspond, en vertu des relations (5), un système de valeurs des fonctions C, D, C_1, D_1 . La proposition est ainsi démontrée.

L'élément linéaire de la surface étant donné par la relation (11), on voit que, pour toutes les courbes du réseau, on aura

$$ds^2 = d\rho^2.$$

Cette relation entraîne la propriété suivante :

Les arcs des courbes de tout réseau (u, u_1) sont, à une constante près, égaux au segment focal de la surface ξ , qui admet la proposée pour développée moyenne.

Cette propriété du réseau (u, u_1) tracé sur la développée moyenne de ξ le rapproche des réseaux des deux nappes de la surface des centres correspondant au réseau des lignes de courbure de cette même surface ξ . On sait qu'au réseau de ces lignes correspond, sur chaque nappe de la développée, une famille de courbes dont les arcs, en chaque point, sont égaux à la distance de ces points à la surface ξ . C'est bien la propriété que nous venons de constater pour les courbes du réseau (u, u_1) . Si nous désignons par R, R' les rayons de courbure de ξ , les longueurs respectives des arcs de courbe considérées seront R, R' pour les nappes de la développée, $\frac{R + R'}{2}$ pour la développée moyenne.

Indiquons encore les propriétés suivantes :

Les paramètres des courbes du réseau (u, u_1) sont ceux des génératrices rectilignes de la sphère de rayon 1 sur laquelle on effectue la représentation sphérique de ξ .

Les réseaux (u, u_1) sont les seuls dont les coordonnées et les arcs des courbes qui les composent puissent s'exprimer rationnellement et sans signe de quadrature en fonction des quantités u, u_1, ξ et des dérivées de ξ , quelles que soient les surfaces proposées.

Cette propriété résulte de ce fait que les coordonnées de ces courbes sont définies par les systèmes (7) ou (7)', où D, D_1 représentent les arcs de courbes.

Pour tout autre réseau, les arcs de courbes sont définis par la relation

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du du_1},$$

où l'on a

$$du\,du_1 \neq 0,$$

expression qui ne saurait être rationnelle quelle que soit la fonction ξ ⁽¹⁾.

On voit, par ce que nous venons de dire, quelles relations étroites établit le réseau précédemment défini entre une surface donnée quelconque et un ensemble à deux paramètres de surfaces de translation.

Pour mieux nous rendre compte de ces relations, considérons le système géométrique formé de l'ensemble des surfaces ζ , précédemment défini, des surfaces de translation leurs développées moyennes, des deux familles de développables de chacune des surfaces ζ . Des remarques précédentes on déduit aisément que l'enveloppe de ce système à deux paramètres constitue un système de même nature dont chaque élément est l'enveloppe de l'élément correspondant dans le premier système.

Pour obtenir les équations du système enveloppe, il suffit de faire $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ dans les équations du système enveloppé.

Les deux plans isotropes de chaque courbe du réseau sont analytiquement séparables.

Les quatre plans isotropes tangents en un même point de la surface, aux deux courbes d'un réseau (u, u_1) qui s'y rencontrent, forment quatre congruences de droites, divisées en deux couples de rayons incidents et réfléchis. Ces deux couples sont formés de congruences analytiquement séparables. Les congruences de l'un des systèmes sont normales à deux familles de surfaces dont l'une admet la surface dirimante pour développée moyenne.

Cette dernière propriété, que nous avons exposée dans l'hypothèse des surfaces de translation ⁽²⁾, va faire l'objet d'un paragraphe spécial.

⁽¹⁾ Nous ne considérons pas le cas où l'on a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = 0$. Cette équation définit les surfaces de Monge, dont la développée moyenne, sur laquelle est supposé tracé le réseau, se réduit à une courbe.

⁽²⁾ *Bull. de la Soc. math.*, t. XXI, fasc. 4, p. 247.

Systèmes de rayons et nappes d'enveloppes analytiquement séparables. — Nous avons établi ailleurs ⁽¹⁾ une série de formules relatives aux quatre plans isotropes, tangents à deux courbes en leurs points de rencontre. Or, les calculs effectués alors se réduisent à de simples opérations d'algèbre et de dérivation portant sur les quantités définies par les systèmes (7) et (7)' qui déterminent les deux courbes. Nous supposons alors le système (7) indépendant de u_1 et le système (7)' indépendant de u . Du reste, les dérivées en u_1 ne figurant pas dans le premier système, et les dérivées en u ne figurant pas dans le second, les quantités u_1 et u y jouent respectivement le rôle de simples paramètres sans influence sur la nature des précédents calculs.

Nous en concluons que toutes les formules établies alors peuvent être transcrites ici sans modification, et qu'elles s'appliquent exactement au réseau (u, u_1) défini par les systèmes (7) et (7)'. En d'autres termes, nous pouvons appliquer au cas d'une surface quelconque toute une série de formules établies pour les seules surfaces de translation. Ici seulement, les fonctions C, D, C_1, D_1 ne seront plus les fonctions d'une seule variable qui figurent dans le système (1), mais plutôt les fonctions à deux variables que définit le système (5).

D'après cela, les quatre équations des plans tangents au point de rencontre de deux courbes du réseau (u, u_1) seront données par le système

$$(12) \quad \begin{cases} (1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 2C = 0, \\ (1-v^2)X + i(1+v^2)Y + 2vZ + 2G = 0, \\ (1-u_1^2)X - i(1+u_1^2)Y + 2u_1Z + 2C_1 = 0, \\ (1-v_1^2)X - i(1+v_1^2)Y + 2v_1Z + 2G_1 = 0, \end{cases}$$

où v et G représentent des fonctions de u, u_1 définies par les relations

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= u + \frac{2 \frac{\partial D}{\partial u}}{\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial u^2}}, \\ G &= C + \frac{v-u}{2} \left[2 \frac{\partial C}{\partial u} + (v-u) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

(1) *Ibid.* p. 247 et suivantes.

On obtient les relations de v_1 , G_1 en affectant d'indices les lettres qui figurent dans les formules précédentes.

Les deux premières équations du système (12) sont celles des deux plans isotropes tangents aux courbes de paramètre u_1 , les deux dernières se rapportent aux courbes de paramètre u .

Le système (13), rapproché du système (5) qui définit les fonctions C, D, C_1, D_1 , montre que les quatre équations des plans isotropes sont rationnelles en u, u_1, ξ et les dérivées de ξ .

Ainsi donc, les deux plans isotropes, tangents en un même point d'une courbe quelconque du réseau (u, u_1) , sont analytiquement séparables.

Les quatre congruences formées des intersections de ces plans isotropes sont données par le système

$$\frac{X-x}{u+u_1} = \frac{Y-y}{i(u_1-u)} = \frac{Z-z}{uu_1-1},$$

et par les trois autres systèmes qu'on déduit de celui-ci en remplaçant d'abord u par v , puis u_1 par v_1 , et enfin simultanément u, u_1 par v, v_1 .

Nous renvoyons, pour les calculs, à l'article précédemment indiqué.

Il nous reste à examiner lesquelles de ces congruences sont normales à des familles de surface. Or, nous aurons, dans les cas des surfaces de translation,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(u+u_1)dx + i(u_1-u)dz + (uu_1-1)dz}{1+uu_1} = \frac{\partial \rho}{\partial u} du + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1 = d\rho, \\ \frac{(v+u_1)dx + i(u_1-v)dy + (v_1u-1)dz}{1+u_1v} = -\frac{\partial \rho}{\partial u} du + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1, \\ \frac{(u+v_1)dx + i(v_1-u)dy + (v_1u-1)dz}{1+uv_1} = \frac{\partial \rho}{\partial u} du - \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1, \\ \frac{(v+v_1)dx + i(v_1-v)dy + (vv_1-1)dz}{1+vv_1} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} du + \frac{\partial \rho}{\partial u_1} du_1\right) = -d\rho \end{array} \right.$$

ρ désigne toujours le segment focal de ξ .

Bien que ces formules soient de même forme que celles relatives aux surfaces de translation, elles ne doivent pas être interprétées de la même manière. Dans le cas des surfaces de translation, ρ est la somme de deux fonctions respectives de u et de u_1 . Il suit de là

que les quatre seconds membres du système précédent sont autant de différentielles exactes. D'où nous devons conclure que les quatre congruences étaient normales à autant de familles de surfaces.

Dans le cas général, il n'en est plus ainsi. Des formules précédentes, seules la première et la dernière jouissent de la propriété indiquée.

Nous avons donc ici deux systèmes de rayons incidents et réfléchis analytiquement séparables, mais dont l'un seulement se compose de congruences normales à deux familles de surfaces.

D'après ce que nous venons de voir, la détermination : des plans isotropes tangents aux courbes génératrices d'une surface de translation ; des congruences de droites intersections de ces plans, et, par suite, des systèmes de rayons incidents et réfléchis formés avec ces convergences, dépendent de calculs qui s'appliquent sans restriction au cas de surfaces quelconques. Pour les adapter au cas général, il nous a suffi de substituer dans les formules les fonctions C , D , etc., définies par le système (5) aux fonctions d'une seule variable désignées par les mêmes lettres.

C'est seulement quand nous avons voulu considérer les surfaces normales aux congruences de droites que nous avons vu se manifester une différence dans les résultats. Au lieu de quatre familles de surfaces normales aux congruences, nous n'en avons trouvé que deux.

Nous constatons une seconde différence. Dans le cas des surfaces Ξ , les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile admettent la surface dirimante pour développée moyenne. Dans le cas général, une seule de ces nappes jouit de cette propriété. On en peut conclure que les surfaces Ξ donnent la solution complète du problème suivant :

Déterminer les surfaces telles que la congruence de leurs normales se réfléchisse sur la développée moyenne ponctuelle, normalement à une famille de surfaces admettant au même titre la surface dirimante.

Du reste, comme nous allons le voir, les coordonnées des deux

nappes s'expriment rationnellement en fonction de u , u_1 , ξ et des dérivées de ξ .

Nous pouvons donc affirmer ici encore que les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la surface dirimante sont analytiquement séparables.

Série de systèmes de rayons analytiquement séparables. — Nous allons maintenant, comme nous l'avons annoncé au début, prendre une méthode plus directe qui nous fera retrouver, en les complétant, les résultats précédents. Nous montrerons, en particulier, comment des normales à une surface quelconque on peut déduire une série illimitée de systèmes de rayons incidents et réfléchis dont les équations s'expriment toutes rationnellement en fonction des coordonnées u , u_1 , ξ relatives à la surface donnée et des dérivées de ξ .

Soit donnée une surface quelconque définie par le système (4), que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(15) \quad \begin{cases} x - iy = u_1 s - p, \\ x + iy = us - q, \\ z = \frac{1}{2}(uu_1 - 1)s - up - u_1 q + \xi. \end{cases}$$

Nous désignons par p , q , r , s , t les dérivées premières et secondes de ξ par rapport aux variables u , u_1 .

Calculons les quatre paramètres directeurs des plans isotropes tangents aux courbes de paramètres u , u_1 tracées sur la surface.

Si nous désignons par w et w_1 deux quantités absolument quelconques, nous vérifions les deux identités

$$(16) \quad \begin{cases} (1 - w^2) dx + i(1 + w^2) dy + 2w dz \\ \quad = \frac{w - u}{2} \left[w \left(r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) - \frac{\partial s}{\partial u} \right] du + \frac{1 + wu_1}{2} \left(u \frac{\partial s}{\partial u_1} - t - w \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) du_1, \\ (1 - w_1^2) dx - i(1 + w_1^2) dy + 2w_1 dz \\ \quad = \frac{1 + uw_1}{2} \left(u_1 \frac{\partial s}{\partial u} - r - w_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) du + \frac{w_1 - u_1}{2} \left[w_1 \left(t - u \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) - \frac{\partial s}{\partial u_1} \right] du_1, \end{cases}$$

Supposons maintenant que les différentielles dx , dy , dz se rapportent aux courbes de paramètre u_1 dans la première des relations (16) et aux courbes de paramètre u dans la seconde. Supposons encore que les quantités w , w_1 désignent les paramètres

directeurs respectifs des plans isotropes tangents à ces courbes.

On aura alors

$$2 \left[(1 - w^2) \frac{\partial x}{\partial u} + i(1 + w^2) \frac{\partial y}{\partial u} + 2w \frac{\partial z}{\partial u} \right] \\ = (w - u) \left[w \left(r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) - \frac{\partial s}{\partial u} \right] = 0.$$

$$2 \left[(1 - w_1^2) \frac{\partial x}{\partial u_1} - i(1 + w_1^2) \frac{\partial y}{\partial u_1} + 2w_1 \frac{\partial z}{\partial u_1} \right] \\ = (w_1 - u_1) \left[w_1 \left(t - u \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) - \frac{\partial s}{\partial u_1} \right] = 0.$$

On obtient donc les quatre systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} w = u, \\ w_1 = u_1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w = v = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ w_1 = v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u_1}}{t - u \frac{\partial s}{\partial u_1}}, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w = u, \\ w_1 = u_1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w = v = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ w_1 = v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u_1}}{t - u \frac{\partial s}{\partial u_1}}, \end{array} \right\}$$

qui définissent les directions des quatre congruences formées par les intersections des quatre plans isotropes.

Pour que ces congruences soient normales à une famille de surfaces, il faut que l'expression

$$\frac{(w + w_1) dx + i(w_1 - w) dy + (w w_1 - 1) dz}{1 + w w_1}$$

soit une différentielle exacte.

Or, on trouve

$$\frac{(w + w_1) dx + i(w_1 - w) dy + (w w_1 - 1) dz}{1 + w w_1} \\ = \frac{(w - u) \left(u_1 \frac{\partial s}{\partial u} - r - w_1 \frac{\partial s}{\partial u} \right) + (1 + u w_1) \left[\left(u_1 \frac{\partial s}{\partial u} - r \right) w + \frac{\partial s}{\partial u} \right]}{2(1 + w w_1)} du \\ + \frac{(w_1 - u_1) \left(u \frac{\partial s}{\partial u} - t - w \frac{\partial s}{\partial u_1} \right) + (1 + u_1 w) \left[\left(u \frac{\partial s}{\partial u_1} - t \right) w_1 + \frac{\partial s}{\partial u_1} \right]}{2(1 + w w_1)} du_1$$

Pour

$$w = u, \quad w_1 = u_1,$$

il vient

$$\frac{(u + u_1) dx + i(u_1 - u) dy + (uu_1 - 1) dz}{1 + uu_1} = \frac{(1 + uu_1) \frac{\partial s}{\partial u} - ur}{2} du + \frac{(1 + uu_1) \frac{\partial s}{\partial u_1} - u_1 t}{2} du_1 = d\rho,$$

ρ désignant toujours le segment focal de ξ , segment défini par la relation

$$(17) \quad \rho = \frac{1}{2} [(uu_1 + 1)s - up - u_1q + \xi].$$

Prenons

$$w = v, \quad w_1 = v_1,$$

v, v_1 ayant les valeurs définies plus haut.

Il vient

$$(18) \quad \left\{ \frac{(v + v_1)dx + i(v_1 - v)dy + (vv_1 - 1)dz}{1 + vv_1} = \frac{u - v}{2v} \frac{\partial s}{\partial u} du + \frac{u_1 - v_1}{2v_1} \frac{\partial s}{\partial u_1} du_1 = -d\rho. \right.$$

On obtient donc encore ici une différentielle exacte. D'ailleurs, le calcul montre qu'il n'en sera pas ainsi pour les deux autres congruences. Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons trouvés, en établissant les formules (14).

Il nous reste à déterminer les équations de la surface normale à la seconde congruence qui forme avec ξ les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile.

Soient X, Y, Z les coordonnées de cette surface, x, y, z désignant toujours les coordonnées de la surface dirimante définie par le système (15) et ρ le segment focal de ξ ; il viendra, en tenant compte de (18),

$$(19) \quad \begin{cases} X = x + \frac{v + v_1}{1 + vv_1} \rho, \\ Y = y + i \frac{v_1 - v}{1 + vv_1} \rho, \\ Z = z + \frac{vv_1 - 1}{1 + vv_1} \rho. \end{cases}$$

Cela posé, imaginons le plan tangent à la surface cherchée défini par la relation

$$(20) \quad (v + v_1)X + i(v_1 - v)Y + (vv_1 - 1)Z + \xi_0 = 0,$$

ξ_0 désignant une fonction de v, v_1 qu'il s'agit de déterminer.

Portant dans l'équation (20) les valeurs des quantités X, Y, Z , définies par le système (19), et tenant compte des valeurs des quantités x, y, z, ρ , on obtient le système

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = -(1 + v_1 u)(1 + v u)s + v(1 + v_1 u)p + v_1(1 + v u_1)q - vv_1 \xi, \\ v = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - u_1 \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u_1}}{t - u \frac{\partial s}{\partial u_1}}, \end{array} \right.$$

qui détermine les coordonnées de la seconde nappe en fonction de u, u_1, ξ et des dérivées de ξ . D'ailleurs, ces expressions sont toutes trois rationnelles par rapport à u, u_1, ξ et ses dérivées.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Une surface quelconque étant donnée, le système formé des rayons normaux à cette surface et des rayons réfléchis par la développée moyenne sont analytiquement séparables. Il en est de même des surfaces normales à ces congruences qui forment les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la surface dirimante.

Nous avons pris pour point de départ la surface ξ et nous en avons déduit la surface ξ_0 normale aux rayons réfléchis sur la développée moyenne de la première. Cette surface ξ_0 est d'ailleurs l'enveloppe d'un plan défini par l'équation

$$(v + v_1)x + i(v_1 - v)y + (vv_1 - 1)z + \xi_0 = 0.$$

Si nous opérons sur cette équation comme nous avons fait sur celle qui définit ξ , nous en déduirons la développée moyenne de ξ_0 , puis la congruence des rayons réfléchis une seconde fois, sur la nouvelle développée et ainsi de suite indéfiniment. D'ailleurs, les éléments de ces congruences de rayons réfléchis, ainsi que de leurs surfaces dirimantes et des surfaces qui leur sont normales seront toutes définies par des expressions rationnelles des

coordonnées u, u_1, ξ de la surface primitive et des dérivées de ξ .

Nous allons établir les formules qui permettent de déduire les uns des autres ces divers systèmes de rayons. Nous allons modifier légèrement les notations précédentes. Nous désignerons par u, v les variables relatives à la première surface ξ , par $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ celles relatives aux surfaces successives $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ que nous déduirons de la première ξ .

Nous aurons donc, pour coordonnées de la surface ξ_1 normale aux rayons réfléchis sur la développée moyenne de ξ ,

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_1 = -(1 + v_1 u)(1 + v u_1)s + u_1(1 + uv_1)p + v_1(1 + vu_1)q - u_1 v_1 \xi, \\ u_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{r - v \frac{\partial s}{\partial u}}, \\ v_1 = \frac{\frac{\partial s}{\partial v}}{t - u \frac{\partial s}{\partial v}}. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} du_1 &= r \left(\frac{u_1}{\frac{\partial s}{\partial u}} \right)^2 \left(r \frac{\partial^2 \log r}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} dv \right), \\ dv_1 &= t \left(\frac{v_1}{\frac{\partial s}{\partial v}} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} du + t \frac{\partial^2 \log t}{\partial u \partial v} dv \right). \end{aligned}$$

Si l'on considère u_1, v_1 comme des fonctions de u, v déterminées par les relations précédentes, la première des équations du système (22) définit la surface qui, associée à ξ , donne les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la développée moyenne de la proposée. Si, au contraire, nous considérons u, v comme des paramètres indépendants de u_1, v_1 , nous avons l'équation de la sphère mobile elle-même.

Calculons les dérivées premières et secondes de ξ_1 . Mais, auparavant, remarquons que, en vertu du système (22),

$$(1 + v_1 u) \left(r - v \frac{\partial s}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial v_1} = (1 + v u_1) \left(t - u \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial u_1} = \frac{r t \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial(u_1 v_1)}{\partial(uv)}}.$$

Cette relation établie, nous trouvons

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 + uv_1)(p - vs) + v_1(vq - \xi), \\ q_1 &= (1 + vu_1)(q - us) + u_1(up - \xi), \\ r_1 &= (1 + v_1u) \left(r - v \frac{\partial s}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial u_1} = \frac{1 + v_1u}{u_1} \frac{\partial s}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_1}, \\ t_1 &= (1 + u_1v) \left(t - u \frac{\partial s}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial v_1} = \frac{1 + vu_1}{v_1} \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v_1}, \\ s_1 &= -uv s + up + vq - \xi + \frac{rt \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial(u_1 v_1)}{\partial(uv)}}. \end{aligned}$$

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de la développée moyenne de ξ_1 , par ρ_1 le segment focal de cette même surface.

Posons encore

$$\lambda = \frac{rt \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial(u_1 v_1)}{\partial(uv)}}.$$

Il viendra

$$23) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - iy_1 &= v_1 s_1 - p_1 = vs - p + v\lambda, \\ x_1 + iy_1 &= u_1 s_1 - q_1 = us - q + u\lambda, \\ z_1 &= \frac{1}{2} \left[(u_1 v_1 - 1)s_1 - u_1 p_1 - v_1 q_1 + \xi_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(uv - 1)s - up - vq + \xi \right] + \frac{uv - 1}{2} \lambda, \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} \left[(u_1 v_1 + 1)s_1 - u_1 p_1 - v_1 q_1 + \xi_1 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[(uv + 1)s - up - vq + \xi \right] + \frac{uv + 1}{2} \lambda. \end{aligned} \right.$$

La développée moyenne de ξ_1 , nouvelle surface dirimante des rayons une première fois réfléchis par la développée moyenne de ξ , étant ainsi déterminée, il nous reste à déterminer les paramètres directeurs u_2, v_2 des rayons réfléchis une seconde fois. Dans ce but, nous considérerons les plans isotropes tangents aux courbes de paramètres u_1, v_1 tracées sur la développée moyenne de ξ_1 . Nous aurons les relations

$$\begin{aligned} (1 - u_1^2) dx_1 + i(1 + u_1^2) dy_1 + 2u_1 dz_1 &= 0, \\ (1 - v_1^2) dx_1 - i(1 + v_1^2) dy_1 + 2v_1 dz_1 &= 0. \end{aligned}$$

Nous trouverions quatre systèmes de valeurs, comme précédemment, et nous serions amenés à poursuivre les calculs de la manière indiquée plus haut.

Nous pouvons donc résumer les résultats précédents dans la proposition suivante :

Une surface quelconque étant définie au moyen des coordonnées u, v, ξ d'O. Bonnet, on pourra exprimer, au moyen de fonctions rationnelles de u, v, ξ et des dérivées de ξ , la congruence des normales réfléchies sur la développée moyenne; la surface ξ_1 normale aux rayons réfléchis et formant avec ξ les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit la surface dirimante; la congruence des rayons réfléchis sur la développée moyenne de ξ_1 ; la surface ξ_2 normale à ces rayons, et ainsi de suite indéfiniment.

Surfaces particulières. — Dans le cas général, la suite des congruences réfléchies sur les développées moyennes successives est illimitée. Nous nous proposons de déterminer les surfaces spéciales pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

Reprenons les formules du système (23). Si nous les considérons comme définissant la développée moyenne et le segment focal de la surface ξ_{n+1} , nous aurons le système

$$\begin{aligned}x_{n+1} - iy_{n+1} &= x_n - iy_n + \lambda_n v_n = x - iy + \lambda v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \\x_{n+1} + iy_{n+1} &= x_n + iy_n + \lambda_n u_n = x + iy + \lambda u + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, \\z_{n+1} &= z_n + \lambda_n \frac{u_n v_n - 1}{2} = +z + \lambda \frac{uv - 1}{2} + \dots + \lambda_n \frac{u_n v_n - 1}{2}, \\\rho_{n+1} &= -\rho_n + \lambda_n \frac{u_n v_n + 1}{2} = \pm \rho + \lambda \frac{uv + 1}{2} + \dots + \lambda_n \frac{u_n v_n + 1}{2}, \\\lambda_n &= \frac{r_n t_n \frac{\partial^2 s_n}{\partial u_n \partial v_n}}{\frac{\partial(u_{n+1}, v_{n+1})}{\partial(u_n, v_n)}}.\end{aligned}$$

Or, dans l'hypothèse actuelle, on devra avoir

$$x_{n+1} = x, \quad y_{n+1} = y, \quad z_{n+1} = z,$$

relations qui ne seront vérifiées qu'à la condition d'avoir

$$\lambda_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 s_n}{\partial u_n \partial v_n} = 0.$$

Nous retrouvons les surfaces Ξ qui admettent pour développée moyenne les surfaces de translation.

Ainsi donc :

La suite des congruences de rayons réfléchis déduite de la congruence des normales à une surface donnée rencontrant la développée moyenne aura une limite toutes les fois qu'on sera amené à trouver une surface de translation par l'une des surfaces dirimantes.

Nous plaçant à un point de vue un peu différent, nous pouvons encore formuler cette proposition :

Les surfaces de translation, à l'exclusion de toutes les autres, jouent le rôle de surfaces dirimantes à l'égard d'un système de rayons incidents et réfléchis respectivement normaux à deux familles de surfaces, qui admettent celles-ci pour développées moyennes.

Cherchons une seconde catégorie de surfaces : celles dont les deux familles de développables se conservent après réflexion sur la développée moyenne.

On a pour équation des rayons de courbure de la surface proposée

$$(24) \quad r du^2 - t dv^2 = 0.$$

Après réflexion, les rayons seront normaux à la surface ξ_1 dont l'équation des lignes de courbure pourra s'écrire

$$r_1 du_1^2 - t_1 dv_1^2 = 0.$$

Or cette équation, transformée au moyen des formules du système (22), devient

$$r \frac{\partial^2 \log r}{\partial u \partial v} du^2 - t \frac{\partial^2 \log t}{\partial u \partial v} dv^2 = 0.$$

Rapprochant cette équation de l'équation (24), on voit qu'il

faut avoir

$$\frac{\partial^2 \log \left(\frac{r}{t} \right)}{\partial u \partial v} = 0.$$

Si l'on désigne par U, V deux fonctions arbitraires, l'une de u , l'autre de v , l'équation précédente pourra s'écrire

$$(25) \quad Vr = Ut,$$

équation du second degré qui se ramène à l'équation à invariants égaux de Laplace.

L'équation (25) définit donc les surfaces dont les deux familles de développables se conservent après réflexion sur la développée moyenne.

APPLICATION.

Nous allons **prendre** pour point de départ la surface définie par l'équation

$$\xi = 2FF_1,$$

où F, F_1 désignent deux fonctions respectives de u et de u_1 , et en déduire, d'après la méthode exposée, les divers éléments géométriques qui constituent le système d'enveloppes et d'enveloppées précédemment défini.

Équations du système. — Formons d'abord les fonctions $C(u, u_1), D(u, u_1), \dots$ définies par les systèmes (5) et (13).

Il vient

$$(26) \quad \begin{cases} C(u, u_1) = [u(u_1 F'_1 - F_1) + F'_1] F, \\ D(u, u_1) = -(u F' - F)(u_1 F'_1 - F_1) - F' F'_1, \\ v = \frac{F'_1}{F_1 - u_1 F'_1}, \\ G = C + \frac{v - u}{2} \left[2 \frac{\partial C}{\partial u} + (v - u) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u} \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Les autres formules se déduisent des précédentes en affectant d'un indice les lettres qui y figurent.

Désignons par A, A', A_1, A'_1 ce que deviennent les fonctions $F,$

F', F_1, F'_1 quand on y fait

$$u = \alpha, \quad u_1 = \alpha_1.$$

Il vient

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(u, \alpha_1) = [u(\alpha_1 A'_1 - A_1) + A'_1] F, \\ D(u, \alpha_1) = -(u F' - F)(\alpha_1 A'_1 - A_1) - A'_1 F', \\ \nu = \frac{A'_1}{A_1 - \alpha_1 A'_1} = \text{const.}, \\ G = 0. \end{array} \right.$$

On trouvera les autres relations par le procédé indiqué tout à l'heure.

Ces dernières formules montrent que, dans le cas particulier qui nous occupe, les paramètres directeurs relatifs aux rayons réfléchis se réduisent à des constantes.

D'où nous concluons que la congruence des rayons réfléchis se compose de droites parallèles, et la seconde nappe de l'enveloppe de la sphère, dont le centre décrit la surface dirimante, a un plan perpendiculaire à ces droites.

Pour obtenir les coordonnées de la surface dirimante, il nous suffirait de porter les expressions trouvées pour les fonctions $C(u, \alpha_1), \dots$ et leurs dérivées dans les équations des systèmes (7) et (7)'. Toutefois, nous obtiendrons des formules plus simples en effectuant un changement de variables.

Nous poserons donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\varphi_1 - \nu_1 \varphi'_1}, & F_1 &= \frac{1}{\varphi - \nu \varphi'}, \\ u &= \frac{\varphi'_1}{\varphi_1 - \nu_1 \varphi'_1}, & u &= \frac{\varphi'}{\varphi - \nu \varphi'}, \end{aligned}$$

φ, φ_1 désignant deux fonctions quelconques: celle-là de ν , celle-ci de ν_1 , nouvelles variables substituées aux variables u, u_1 ; φ', φ'_1 désignant les dérivées de ces fonctions.

Des deux relations précédentes on déduit le système

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\varphi_1 - \nu_1 \varphi'_1}, & \varphi_1 &= \frac{1}{F - u F'}, \\ u &= \frac{\varphi'_1}{\varphi_1 - \nu_1 \varphi'_1}, & \nu_1 &= \frac{F'}{F - u F'}, \\ F' &= \frac{\nu_1}{\varphi_1}, & \varphi'_1 &= \frac{u}{F}, \\ u F' - F &= -\frac{1}{\varphi_1}, & \nu_1 \varphi'_1 - \varphi_1 &= -\frac{1}{F}, \end{aligned}$$

Les autres formules se déduisent des précédentes par la permutation des indices.

Cela posé, désignons par β, β_1 ce que deviennent les variables v, v_1 pour $u = \alpha, u_1 = \alpha_1$. Le système précédent nous permettra de calculer $C(u, \alpha_1), \dots$ en fonction des nouvelles variables et, par suite, de calculer les coordonnées des surfaces de translation à deux paramètres, développées moyennes des surfaces Ξ , ainsi que l'équation de ces surfaces.

Désignons par x, y, z les coordonnées des surfaces de translation, par ρ le segment des surfaces Ξ .

Il vient

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - iy = -\frac{\beta_1}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \frac{v}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}, \\ x + iy = -\frac{v}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \frac{\beta}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}, \\ z = \frac{1 - \beta_1 v}{2\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} + \frac{1 - \beta v_1}{2\varphi(\beta)\varphi_1} \\ \rho = -\frac{1 + \beta_1 v}{2\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \frac{1 + \beta v_1}{2\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}. \end{array} \right.$$

Cherchons maintenant l'enveloppe de ces dernières surfaces. Nous avons dit qu'on obtient les coordonnées de cette enveloppe et le segment focal correspondant, en faisant $\alpha = u, \alpha_1 = u_1$ (ce qui revient ici à faire $\beta = v, \beta_1 = v_1$) dans les formules correspondantes de l'enveloppée. Faisant donc $\beta = v, \beta_1 = v_1$ dans le système précédent, il viendra

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{v + v_1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ y = -i\frac{v_1 - v}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ z = -\frac{vv_1 - 1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ \rho = \frac{vv_1 + 1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}. \end{array} \right.$$

Les développées moyennes enveloppes et enveloppées étant ainsi déterminées, cherchons les surfaces enveloppes et enveloppées qui admettent ces développées moyennes.

Pour obtenir les surfaces enveloppées qui sont ici des surfaces Ξ ,

il suffit de porter les expressions $C(u, \alpha_1), \dots$ définies par le système (27) dans l'équation (9).

Il vient

$$\xi = [A_1 + (u_1 - \alpha_1)A'_1]F + [A + (u - \alpha)A']F_1.$$

Nous reconnaissons les surfaces Ξ définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe de ces surfaces, nous devons faire $\alpha = u, \alpha_1 = u_1$ dans l'équation de ξ . Nous trouvons immédiatement

$$\xi = 2FF_1,$$

qui est notre équation du point de départ.

Les lignes de courbure de ξ sont données par l'équation

$$[A_1 + (u_1 - \alpha_1)A'_1]F'' du^2 = [A + (u - \alpha)A']F_1'' du_1^2.$$

Pour obtenir les lignes de courbure de ξ enveloppes des lignes de courbure de ζ , nous devons faire encore ici $\alpha = u, \alpha_1 = u_1$ et nous trouvons

$$F_1 F'' du^2 = F F_1'' du_1^2.$$

Nous venons de voir comment, la surface $\xi = 2FF_1$ étant donnée, on en déduit les divers éléments des systèmes géométriques que nous avons étudiés. Il nous reste à étudier séparément les surfaces qui en font partie.

Surfaces de translation. — Désignons comme précédemment par x, y, z les coordonnées de ces surfaces, coordonnées définies par le système (28); par ρ le segment focal correspondant; par $X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1$ les coordonnées respectives des courbes, lieux des extrémités du segment dont le point milieu décrit la surface.

Du système (28) on tire les relations

$$\begin{aligned} (1 - \beta_1^2)X - i(1 + \beta_1^2)Y + 2\beta_1 Z &= 0, \\ (1 - \beta_2^2)X + i(1 + \beta_2^2)Y + 2\beta_2 Z &= 0. \end{aligned}$$

Nous déduisons de ces équations que les courbes, lieux des extrémités du segment mobile, sont deux courbes quelconques, tracées dans deux plans isotropes.

Nous avons montré ⁽¹⁾ que ces surfaces étaient toutes définies en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Les coordonnées des surfaces de translation définies par (28) vérifient les relations

$$(1 - \beta_1^2)x - i(1 + \beta_1^2)y + 2\beta_1 z + \frac{(1 + \beta_1^2)(v_1 - \beta_1)}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)} = 0,$$

$$(1 - \beta^2)x + i(1 + \beta^2)y + 2\beta z + \frac{(1 + \beta^2)(v - \beta)}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} = 0.$$

Si nous remarquons que v , v_1 sont des fonctions respectives de u , et de u , nous nous rendons compte aisément que les équations précédentes définissent deux familles de plans isotropes coupant les surfaces de translation, suivant le réseau (u, u_1) des courbes génératrices.

Nous en concluons que le réseau (u, u_1) , formé par les courbes génératrices des surfaces de translation considérées, se compose de courbes planes, intersections de la surface par deux familles de plans isotropes parallèles.

Si nous considérons maintenant le système de rayons incidents et réfléchis qui admettent ces surfaces de translation pour surfaces dirimantes, nous voyons que l'une des congruences est formée de rayons parallèles.

Pour s'en assurer, il suffit de se rappeler que les quantités v , v_1 ⁽²⁾ sont ici des constantes.

Considérons le système des deux rayons incidents et réfléchis qui se rencontrent en un point de la surface dirimante. Ces rayons, nous l'avons vu, sont les intersections de plans isotropes tangents en un même point, à deux courbes du réseau (u, u_1) . Or l'un de ces rayons sera déterminé par l'intersection des deux plans isotropes qui contiennent les deux courbes passant par le point d'incidence. L'autre rayon sera formé par l'intersection de deux

⁽¹⁾ Thèse de doctorat.

⁽²⁾ Nous parlons ici des quantités v , v_1 définies par le système (27) et non de celles que nous avons désignées ailleurs par les mêmes lettres.

autres plans isotropes tangents aux deux courbes sans les contenir.

On déduit de là un mode de construction des rayons non parallèles :

Soit donnée une surface de translation définie par le système (28) et, sur cette surface, un point arbitraire. Pour obtenir la direction des rayons incidents et réfléchis passant par ce point, on pourra procéder comme il suit. On déterminera les plans des deux courbes génératrices passant par ce point. L'intersection de ces plans donnera le rayon incident. En déterminant les deux autres plans isotropes tangents aux mêmes courbes, on obtiendra le rayon réfléchi qui sera formé par leur intersection.

Nous venons d'étudier la nature d'une surface de translation définie par le système (28). Il nous reste à caractériser la variation de ces surfaces quand varient les paramètres α , α_1 . Il suffit de répéter ici ce que nous avons dit du cas général en remarquant que les deux familles de plans isotropes dont nous parlions alors se composent actuellement de plans parallèles contenant les courbes correspondantes. Nous pouvons donc formuler la proposition suivante :

Soient données deux courbes variables assujetties à se rencontrer constamment, tandis que les plans isotropes qui les contiennent se déplacent parallèlement à eux-mêmes, le point de rencontre de ces courbes décrira l'enveloppe des surfaces de translation, lieux du milieu du segment qui les relie.

Ces surfaces de translation seront celles que définit le système (28).

Enveloppes des surfaces de translation. — Nous avons vu que les coordonnées de ces surfaces sont définies par le système (29), qu'on obtient en faisant $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1$ dans le système (28).

On tire du système (29)

$$(30) \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous voyons par cette équation que le segment focal de la sur-

face ξ , dont la surface de coordonnées x, y, z est la développée moyenne, est égal au rayon vecteur de celle-ci.

D'où nous tirons cette conclusion :

Si l'on assujettit le centre d'une sphère passant par un point fixe à décrire la surface de translation définie par le système (29), l'enveloppe de cette sphère admettra la surface lieu de son centre pour développée moyenne.

La relation (30) caractérise l'ensemble des surfaces, pour lesquelles le système (29) est vérifié.

En effet, ξ désignant une surface quelconque, ρ son segment focal, x, y, z les coordonnées de la développée moyenne, on a l'identité

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \rho^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

La relation (30) est donc équivalente à l'équation

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = 0,$$

dont la fonction

$$\xi = 2FF_1$$

donne la solution générale.

Du système (29) on déduit les relations

$$\begin{aligned} (1 - v^2)x + i(1 + v^2)y + 2vz &= 0, \\ (1 - v_1^2)x + i(1 + v_1^2)y + 2v_1z &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on se rappelle que v, v_1 sont deux fonctions respectives de u_1 et de u , on en conclut que les deux familles de plans isotropes définies par le système précédent découpent la surface définie par le système (29) suivant un réseau (u, u_1) .

Ainsi donc le réseau (u, u_1) relatif à la surface considérée est formé de l'ensemble des courbes planes tracées dans les deux familles de plans isotropes passant par un point fixe.

Considérons maintenant le système des rayons incidents et réfléchis relatifs à la surface proposée.

Ces congruences de rayons étant respectivement normales aux

deux nappes de la sphère passant par un point fixe, l'une de ces congruences passera par ce point.

Ainsi donc la congruence des normales à la surface $\xi = 2FF_1$, se réfléchit suivant des directions convergentes.

D'après ce que nous venons de dire, on voit comment, d'un système à deux paramètres de rayons réfléchis dans des directions parallèles, on déduit immédiatement un système de rayons réfléchis dans des directions convergentes. Les divers éléments géométriques du premier système ont pour enveloppes respectives les éléments correspondants du second, et l'on obtiendra les équations de ceux-ci en égalant les paramètres arbitraires aux variables dans les équations de ceux-là.

Pour

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} = 0,$$

on trouve

$$x = y = z = \rho.$$

Si l'on remarque que le centre de convergence des rayons n'est autre que l'origine, on sera amené à conclure que les normales de la surface ξ convergent après réflexion sur la développée moyenne en un point commun à ξ et à la surface dirimante.

SUR LES DÉRIVÉES MODULAIRES DES POLYNOMES;

Par M. FÉLIX LUCAS.

Soit

$$(1) \quad f(z) = A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \dots + A_{p-1} z + A_p$$

un polynome de degré p , à coefficients réels ou imaginaires.

Formons l'expression

$$(2) \quad \Delta_\alpha f(z) = pf(z) - (z - \alpha)f'(z);$$

c'est un polynome du degré $(p - 1)$ en z et du premier degré en α , que nous appellerons la *dérivée modulaire* (module α) de $f(z)$.

En opérant m fois de suite cette sorte de dérivation, nous ob-

tiendrons la $m^{\text{ième}}$ dérivée modulaire

$$(3) \quad \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^{\theta} C_{p-\theta}^{p-m} \frac{1}{P_{\theta}} (z-\alpha)^{\theta} f^{(\theta)}(z);$$

c'est un polynome du degré $(p-m)$ en z et du degré m en α . On peut considérer ce polynome comme la somme de $(p-m+1)(m+1)$ termes et écrire

$$(4) \quad \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^{k=m} b_{h,k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

Proposons-nous de déterminer la valeur du coefficient $b_{h,k}$.

A cet effet, commençons par développer le second membre de (3), suivant les puissances décroissantes de z , en posant

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{\alpha}^m f(z) = & (-1)^m P_m (B_0 z^{p-m} + B_1 z^{p-m-1} + \dots \\ & + B_h z^{p-m-h} + \dots + B_{p-m-1} z + B_{p-m}), \end{aligned} \right.$$

chacun des coefficients B désignant un polynome en α du degré m .

Nous voyons immédiatement que

$$(6) \quad (-1)^m P_m P_{p-m-h} B_h = [D_z^{p-m-h} \Delta_{\alpha}^m f(z)]_{z=0},$$

D étant le symbole de la dérivation ordinaire.

Or on a identiquement

$$D_z \Delta_{\alpha} f(z) = (p-1) f'(z) - (z-\alpha) f''(z) = \Delta_{\alpha} D_z f(z);$$

d'où, plus généralement,

$$(7) \quad D_z^h \Delta_{\alpha}^m f(z) = \Delta_{\alpha}^m D_z^h f(z) = \Delta_{\alpha}^m f^{(h)}(z);$$

on peut donc transposer les signes D et Δ .

Appliquant cette observation à la formule (6), nous trouvons

$$(8) \quad (-1)^m P_m P_{p-m-h} B_h = [\Delta_{\alpha}^m f^{(p-m-h)}(z)]_{z=0}.$$

Comme $f^{(p-m-h)}(z)$ est un polynome du degré $(m+h)$, nous avons

$$(9) \quad \Delta_{\alpha}^m f^{(p-m-h)}(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^{\theta} C_{m+h-\theta}^h \frac{1}{P_{\theta}} (z-\alpha)^{\theta} f^{(p-m-h+\theta)}(z),$$

et, par conséquent,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & [\Delta_{\alpha}^m f^{(p-m-h)}(z)]_{z=0} \\ & \quad \quad \quad \theta=m \\ & = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^m (-1)^{\theta} C_{m+h-\theta}^h \frac{1}{P_{\theta}} \alpha^{\theta} [f^{(p-m-h+\theta)}(z)]_{z=0}. \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons, dans la formule (8), remplacer B_h par $b_{h,k}$ en réduisant le second membre au terme en α^{m-k} ; or ce terme est, d'après la formule (10), celui qui correspond à $\theta = m - k$, c'est-à-dire

$$(-1)^m P_m C_{h+k}^h \frac{1}{P_{m-k}} \alpha^{m-k} A_{h+k} P_{p-h-k}.$$

Par conséquent,

$$(11) \quad P_{m-k} P_{p-m-h} b_{h,k} = P_{p-h-k} C_{h+k}^h A_{h+k}.$$

On a identiquement

$$\frac{P_{p-h-k}}{P_{m-k} P_{p-m-h}} = \frac{P_{(m-k)+(p-m-h)}}{P_{m-k} P_{p-m-h}} = C_{p-h-k}^{m-k}.$$

Donc, en dernière analyse,

$$(12) \quad b_{h,k} = C_{p-h-k}^{m-k} C_{h+k}^h A_{h+k}.$$

La formule (4) devient, par suite,

$$(13) \quad \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^{h=m} C_{p-h-k}^{m-k} C_{h+k}^h A_{h+k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

L'ensemble des termes du second membre pour lesquels la somme $h + k$ reste constante, de manière que l'on ait

$$(14) \quad h + k = q,$$

est le polynome du degré $p - q$, en z et α ,

$$(-1)^m P_m A_q \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h} z^{p-m-h} \alpha^{m+q-h}.$$

(Il faut remarquer que la limite inférieure de h doit être $q - m$ au lieu de zéro si $m - q$ est négatif, et que la limite supérieure de h

doit être q au lieu de $p - m$ si q est le plus petit de ces deux nombres.)

Par conséquent :

Le coefficient de chaque terme du degré $p - q$ dans une dérivée modulaire de degré quelconque est égal au coefficient du terme du même degré dans $f(z)$ multiplié par un facteur simplement numérique.

Si le terme du degré $(p - q)$ manque dans $f(z)$, le polynôme du même degré manque dans toutes ses dérivées modulaires.

Reportons-nous à la formule (3) et faisons $\alpha = z$; tous les termes du second membre s'annuleront, à l'exception de celui qui correspond à $\theta = 0$; par conséquent,

$$(15) \quad [\Delta_{\alpha}^m f(z)]_{\alpha=z} = (-1)^m P_m C_p^{p-m} f(z);$$

le coefficient de z^{p-q} est donc

$$(-1)^m P_m C_p^{p-m} A_q.$$

D'autre part, en faisant $\alpha = z$ dans le polynôme du degré $p - q$, en α et z , indiqué plus haut, nous trouvons pour coefficient de z^{p-q}

$$(-1)^m P_m A_q \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h}.$$

Égalant ces valeurs d'un même coefficient, nous obtenons cette formule (peu connue, bien qu'elle ne soit pas nouvelle)

$$(16) \quad \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h} = C_p^{p-m},$$

dans laquelle il faut regarder comme nulle la valeur de tout coefficient C dont l'indice supérieur serait négatif.

Nous allons maintenant indiquer une propriété remarquable des dérivées modulaires.

A cet effet, reprenons la formule (13) en l'écrivant sous la forme

$$\frac{\Delta_{\alpha}^m f(z)}{(-1)^m P_m} = \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^m C_{p-h-k}^{m-k} C_{h+k}^k A_{h+k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

Le second membre ne change pas si l'on permute $p-m$ et m , z et α . Par conséquent,

$$\frac{\Delta_{\alpha}^m f(z)}{(-1)^m P_m} = \frac{\Delta_{\alpha}^{p-m} f(\alpha)}{(-1)^{p-m} P_{p-m}}.$$

Soit, sous une forme plus simple, la formule remarquable

$$(17) \quad (-1)^p P_{p-m} \Delta_{\alpha}^m f(z) = P_m \Delta_{\alpha}^{p-m} f(\alpha).$$

Remplaçons dans le second membre $\Delta_{\alpha}^{p-m} f(\alpha)$ par le second membre de l'équation (3), dans lequel nous permuterons z et α , m et $p-m$. Nous obtiendrons pour $\Delta_{\alpha}^m f(z)$ l'expression nouvelle

$$(18) \quad \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=p-m} (-1)^{\theta} C_{p-\theta}^m \frac{1}{P_{\theta}} (\alpha-z)^{\theta} f^{(\theta)}(\alpha).$$

SUR LES DÉRIVÉES MODULAIRES DES POLYNOMES;

Par M. FÉLIX LUCAS.

Dans une précédente Communication, nous avons donné le nom de *dérivée modulaire* (module α) du polynome $f(z)$, du degré p , à la fonction

$$(1) \quad \Delta_{\alpha} f(z) = pf(z) - (z-\alpha)f'(z),$$

et nous avons étudié les dérivations modulaires successives faites avec conservation du module.

Nous allons étudier aujourd'hui les dérivations modulaires successives faites avec changement du module.

On a identiquement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{\beta} \Delta_{\alpha} f(z) &= \Delta_{\alpha}^2 f(z) = p(p-1)f(z) - (p-1) \left\{ \begin{aligned} &(\alpha-z) \\ &+ (z-\beta) \end{aligned} \right\} f'(z) \\ &\quad + (z-\alpha)(z-\beta)f''(z); \end{aligned} \right.$$

cette fonction étant symétrique relativement à α et β , on voit que l'on peut intervertir l'ordre des dérivations.

On a ensuite

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{\gamma}^2 \Delta_{\alpha} f(z) &= p(p-1)(p-2)f(z) - (p-1)(p-2) \left\{ \begin{aligned} &(\alpha-z) \\ &+ (z-\beta) \\ &+ (z-\gamma) \end{aligned} \right\} f'(z) \\ &\quad + (p-2) \left\{ \begin{aligned} &(z-\alpha)(z-\beta) \\ &+ (z-\beta)(z-\gamma) \\ &+ (z-\gamma)(z-\alpha) \end{aligned} \right\} f''(z) - (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)f'''(z). \end{aligned} \right.$$

La loi de formation est simple; le résultat des dérivations successives pour une série de m modules $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ est

$$(4) \quad \Delta_{\alpha, \beta, \dots, \lambda}^m f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^\theta A_{p-\theta}^{m-\theta} S_\theta f^{(\theta)}(z);$$

dans cette formule S_θ désigne la somme des produits θ à θ des m binomes $(z - \alpha), (z - \beta), \dots, (z - \lambda)$; $A_{p-\theta}^{m-\theta}$ désigne le nombre des arrangements de $(p - \theta)$ objets $(m - \theta)$ à $(m - \theta)$. Conventionnellement $S_0 = 1$.

Nous pouvons poser

$$(5) \quad (z - \alpha)(z - \beta) \dots (z - \lambda) = \varpi(z);$$

$\varpi(z)$ sera un polynome du degré m dont le terme du degré le plus élevé a pour coefficient l'unité. Nous écrirons alors symboliquement

$$(6) \quad \Delta_{\alpha, \beta, \dots, \lambda}^m f(z) = \Delta_{(\varpi)}^m f(z)$$

pour désigner le résultat des m dérivations modulaires successives faites avec les m racines de l'équation $\varpi(z) = 0$.

On a identiquement

$$\begin{aligned} S_m &= \varpi(z), \\ S_{m-1} &= \varpi'(z); \end{aligned}$$

pour obtenir S_{m-2} , nous remarquons que cette somme des produits $(n - 2)$ à $(n - 2)$ des m binomes $(z - \alpha), (z - \beta), \dots, (z - \lambda)$ contient $\frac{n(n-1)}{2}$ termes, tandis que $\varpi''(z)$ contient deux fois ce nombre de termes; par conséquent

$$S_{m-2} = \frac{1}{1.2} \varpi''(z);$$

on trouve ensuite

$$S_{m-3} = \frac{1}{1.2.3} \varpi'''(z),$$

et généralement

$$(7) \quad S_\theta = S_{m-(m-\theta)} = \frac{1}{P_{m-\theta}} \varpi^{(m-\theta)}(z),$$

en désignant, suivant l'usage, par $P_{m-\theta}$ la factorielle

$$1.2.3 \dots (m - \theta).$$

Avec ces notations nouvelles, la formule (4) devient

$$(8) \quad \Delta_{(\varpi)}^m f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^{\theta} C_{p-\theta}^{m-\theta} \varpi^{(m-\theta)}(z) f^{(\theta)}(z),$$

$C_{p-\theta}^{m-\theta}$ désignant le nombre des combinaisons de $(p-\theta)$ objets $(m-\theta)$ à $(m-\theta)$.

Il est intéressant de considérer le cas où $\varpi(z)$ est du même degré que $f(z)$, c'est-à-dire le cas où m est égal à p . La formule précédente devient alors

$$(9) \quad \Delta_{(\varpi)}^p f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^{\theta} \varpi^{(p-\theta)}(z) f^{(\theta)}(z).$$

Nous avons, d'ailleurs, par la formule (7), dans laquelle nous remplaçons m par p ,

$$(10) \quad \varpi^{p-\theta}(z) = P_{p-\theta} S_{\theta}.$$

De même, en admettant que le polynome $f(z)$ ait l'unité pour coefficient de son terme du plus haut degré et en désignant par $T_{p-\theta}$ la somme des produits $(p-\theta)$ à $(p-\theta)$ des p facteurs binomes de ce polynome, on a

$$(11) \quad f^{(\theta)}(z) = P_{\theta} T_{p-\theta}.$$

La formule (9) peut, par conséquent, s'écrire sous la forme

$$(12) \quad \Delta_{(\varpi)}^p f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^{\theta} P_{p-\theta} P_{\theta} S_{\theta} T_{p-\theta}.$$

Comme chaque dérivation modulaire abaisse d'une unité le degré du polynome $f(z)$, le second membre de cette formule (12) doit être du degré *zéro*; en d'autres termes, ce second membre doit se réduire à une constante. Par conséquent, les coefficients de toutes les puissances de z doivent être identiquement nuls.

Pour déterminer ces coefficients, désignons par

$$s_1, \quad s_2, \quad \dots, \quad s_p$$

les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, ..., p à p des p racines de

l'équation $\varpi(z) = 0$, et, de même, par

$$t_1, t_2, \dots, t_p$$

les sommes de produits analogues pour les racines de l'équation $f(z) = 0$. Nous aurons alors

$$(13) \quad \begin{cases} S_0 = C_p^0 \left[z_0 - \frac{\theta}{p} s_1 z_0^{\theta-1} + \frac{\theta(\theta-1)}{p(p-1)} s_2 z_0^{\theta-2} \dots \right], \\ T_{p-\theta} = C_p^{p-\theta} \left[z^{p-\theta} - \frac{p-\theta}{p} t_1 z^{p-\theta-1} + \frac{(p-\theta)(p-\theta-1)}{p(p-1)} t_2 z^{p-\theta-2} \dots \right], \end{cases}$$

et, par suite,

$$(14) \quad S_0 T_{p-\theta} = C_p^0 C_p^{p-\theta} \left\{ \begin{aligned} & z^p - \left(\frac{\theta}{p} s_1 + \frac{p-\theta}{p} t_1 \right) z^{p-1} \\ & + \left[\frac{\theta(\theta-1)}{p(p-1)} s_2 + \frac{\theta}{p} \frac{p-\theta}{p} s_1 t_1 + \frac{(p-\theta)(p-\theta-1)}{p(p-1)} t_2 \right] z^{p-2} \\ & + \dots \end{aligned} \right.$$

En portant cette valeur de $S_0 T_{p-\theta}$ dans la formule (12) et exprimant ensuite que les coefficients des diverses puissances de z sont nuls, nous obtiendrons les équations

$$(15) \quad \begin{cases} \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta^2 A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

que nous pouvons réunir dans l'équation générale

$$(16) \quad \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta^m A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0,$$

l'exposant m désignant n'importe lequel des nombres entiers 0, 1, 2, ..., $(p-1)$.

Divisons le premier membre de cette équation par la constante P_p et posons pour simplifier les écritures

$$(17) \quad (-1)^\theta \frac{A_p^\theta A_p^{p-\theta}}{P_p} = x_\theta:$$

modulaire

$$\Delta_{(\varpi)}^p f(z).$$

Le second membre de cette formule se réduit à son terme constant, que l'on obtient en faisant $z = 0$; on trouve, par conséquent,

$$(20) \quad \Delta_{(\varpi)}^p f(z) = (-1)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta P_{p-\theta} P_\theta s_\theta t_{p-\theta}.$$

Il est intéressant d'examiner le cas où le polynôme $\varpi(z)$ ne diffère pas de $f(z)$. Nous obtenons ainsi la $p^{\text{ième}}$ dérivée modulaire de $f(z)$ relativement à ses p racines

$$(21) \quad \Delta_{(f)}^p f(z) = (-1)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta P_{p-\theta} P_\theta t_\theta t_{p-\theta},$$

t_m désignant la somme des produits m à m des p racines de $f(z)$.

Dans le cas particulier où

$$f(z) = z^p - 1,$$

la dérivée modulaire prise relativement à toutes les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité se réduit à zéro si p est impair et à -2 si p est pair.

Dans le cas particulier où

$$f(z) = (z - \alpha)^p,$$

la dérivée modulaire considérée est toujours nulle, car on a

$$\Delta_{(f)}^p = \Delta_{\alpha}^p (z - \alpha)^p = (-1)^p (z - \alpha)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0.$$

Ce dernier exemple concerne les dérivées modulaires sans changement de module dont nous avons parlé dans notre précédente Communication. Voici une remarque nouvelle au sujet de ces dérivées.

Posons

$$(22) \quad \frac{f(z)}{(z - \alpha)^p} = \varphi(z),$$

$f(z)$ désignant un polynome du degré p . On a identiquement

$$(23) \quad \begin{cases} \Delta_{\alpha} f(z) = (-1)(z - \alpha)^{p+1} \varphi'(z), \\ \Delta_{\alpha}^2 f(z) = (-1)^2 (z - \alpha)^{p+1} [2\varphi'(z) + (z - \alpha)\varphi''(z)], \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

et généralement

$$(24) \quad \Delta_{\alpha}^m f(z) = (-1)^m (z - \alpha)^{p+1} \left\{ \begin{array}{l} b_{m,1} \varphi'(z) + b_{m,2} (z - \alpha) \varphi''(z) + \dots \\ + \dots\dots\dots + b_{m,h} (z - \alpha)^{h-1} \varphi^{(h)}(z) + \dots \\ + \dots\dots\dots + b_{m,m} (z - \alpha)^{m-1} \varphi^{(m)}(z) \end{array} \right\},$$

les $b_{m,h}$ désignant des coefficients numériques. La loi de formation de ces nombres est représentée par la formule

$$(25) \quad b_{m,h} = (m + h - 1) b_{m-1,h} + b_{m-1,h-1};$$

on a d'ailleurs

$$b_{m,1} = P_m \quad \text{et} \quad b_{m,m} = 1.$$

On peut former ainsi avec ces nombres le triangle suivant :

	1	2	3	4	5	6	h
1	1						
2	2	1					
3	6	6	1				
4	24	36	12	1			
5	120	240	120	20	1		
6	720	1800	1200	300	30	1	
m	...			...	..	.	

Un nombre quelconque de ce triangle est égal au produit du nombre placé au-dessus de lui par la somme des rangs de la ligne et de la colonne de ce terme, augmenté du nombre qui précède celui-ci dans la même ligne.

C'est une loi de formation beaucoup moins simple que celle des nombres du triangle arithmétique de Pascal.

SUR LA RÉOLUTION NOMOGRAPHIQUE GÉNÉRALE DES TRIANGLES SPHÉRIQUES;

Par M. Maurice D'OCAGNE.

Nous avons naguère fait remarquer ⁽¹⁾ que tous les cas de résolution des triangles sphériques (désignés par ABC) pouvaient se ramener à l'usage de la formule unique

$$\cos t = \cos u \cos v + \sin u \sin v \cos T,$$

où t, u, v sont remplacés soit par les diverses permutations de a, b, c (T prenant l'une des valeurs A, B, C), soit par les diverses permutations de $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ (T prenant l'une des valeurs $\pi - a, \pi - b, \pi - c$). Si donc la formule précédente est traduite par un nomogramme sur lequel on puisse prendre à volonté pour inconnue l'une des quatre variables t, u, v, T , ce nomogramme unique pourra servir à la résolution des triangles sphériques dans tous les cas possibles. Un tel nomogramme nous a été fourni par la méthode des points alignés ⁽²⁾. L'équation ci-dessus mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos t & 1 \\ 1 & -\cos T & 1 \\ \sin u \sin v - 1 & \cos u \cos v & \sin u \sin v + 1 \end{vmatrix} = 0$$

exprime l'alignement des trois points

$$\begin{array}{ll} (t) & x = -1, \quad y = \cos t, \\ (T) & x = 1, \quad y = -\cos T, \\ (u, v) & x = \frac{\sin u \sin v - 1}{\sin u \sin v + 1}, \quad y = \frac{\cos u \cos v}{\sin u \sin v + 1}, \end{array}$$

ce dernier point étant fourni par la rencontre des deux ellipses

⁽¹⁾ *Bulletin astronomique*, t. XI, 1894, p. 5.

⁽²⁾ Voir la Note citée du *Bulletin astronomique* et notre *Traité de Nomographie* (p. 329). On trouvera là tous les détails relatifs à la construction du nomogramme, ainsi que l'indication de la règle précise qui permet de discerner parmi les points communs aux ellipses (u) et (v) celui qui doit être pris sur l'alignement.

correspondant aux cotes $w = u$ et $w = v$ dans le système unique

$$(w) \quad \frac{(1+x)^2}{\sin^2 w} + \frac{4y^2}{\cos^2 w} = (1-x)^2,$$

inscrit dans le quadrilatère formé par les quatre droites

$$y = \pm 1, \quad y = \pm x.$$

Cette solution est évidemment, au point de vue théorique, la plus satisfaisante. Mais, pratiquement, on lui préférera, lorsque le choix sera possible, celle que nous avons fait connaître précédemment ⁽¹⁾ en vue d'un problème particulier (celui de la distance sphérique de deux points de la mappemonde, définis par leurs coordonnées géographiques). On obtient cette autre solution en mettant, ainsi que l'a proposé M. Collignon, l'équation ci-dessus sous la forme

$$2 \cos t = (1 + \cos T) \cos(u - v) + (1 - \cos T) \cos(u + v).$$

Si on l'écrit

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(u + v) & 1 \\ 1 & \cos(u - v) & 1 \\ \cos T & \cos t & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

on voit qu'elle exprime l'alignement des points

$$\begin{aligned} (u + v) \quad x = -1, \quad y &= \cos(u + v), \\ (u - v) \quad x = 1, \quad y &= \cos(u - v), \\ (t, T) \quad x = \cos T, \quad y &= \cos t. \end{aligned}$$

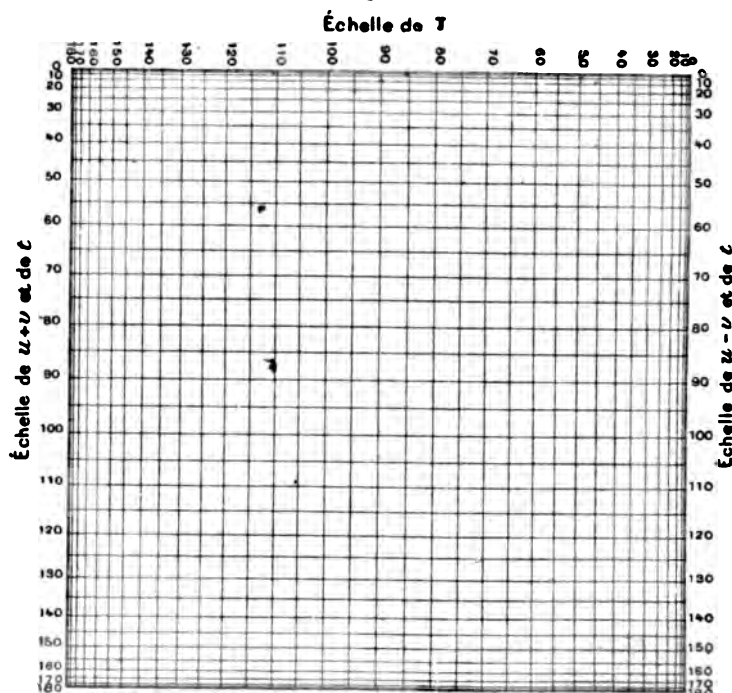
Ces formules définissent l'abaque ici représenté (*fig. 1*) (à une échelle réduite pour se plier aux nécessités du format) dont la construction est des plus simples : il s'obtient en joignant deux à deux par des parallèles à Ox et à Oy les points d'égale division d'un cercle ayant son centre à l'origine. Son emploi résulte de l'énoncé : *la droite joignant le point $(u + v)$ au point $(u - v)$ passe par*

⁽¹⁾ *Nomographie*, 1891, p. 84, et *Traité de Nomographie*, p. 327. Une erreur s'est glissée à cet endroit, provenant d'une confusion entre les latitudes λ et λ' de la première formule du n° 123 et les colatitudes correspondantes. Toutes les valeurs de λ et λ' données à la page 329 doivent donc être remplacées par leurs compléments.

le point de rencontre de la parallèle (t) à Ox et de la parallèle (T) à Oy .

Il est inutile d'insister sur la simplicité de construction de cet abaque comparé au précédent. Son infériorité tient à ce que u et v n'y entrant pas directement, mais seulement dans les graduations ($u + v$) et ($u - v$), ni l'une ni l'autre de ces variables n'y peut être prise pour inconnue. L'abaque ne peut fournir que la valeur de t ou de T ; par suite, il ne peut servir *directement* à la résolu-

Fig. 1.



tion d'un triangle sphérique que si les données comprennent trois éléments de même espèce (les trois côtés ou les trois angles) ou trois éléments consécutifs (deux côtés et l'angle compris ou deux angles et le côté contigu). Les cas où les données comprennent deux éléments de même espèce et l'élément opposé à l'un d'eux échappent à l'usage de cet abaque.

Or, telle est sa simplicité, que nous avons cherché s'il n'y aurait pas moyen, à l'aide de quelque artifice, de le faire encore servir en pareil cas.

Nous avons, en effet, fait connaître dernièrement un tel procédé ⁽¹⁾ sur lequel nous allons revenir ici avec plus de détail.

Ce procédé repose sur la considération de ce que nous proposerons d'appeler les *triangles annexes* du triangle sphérique envisagé.

Si $A'B'C'$ est le triangle supplémentaire de ABC , nous appelons *éléments homologues* de ces deux triangles ceux qui, à l'accentuation près, sont désignés par les mêmes lettres. Par exemple, le sommet A est l'homologue de A' , le côté AB l'homologue de $A'B'$, ... Ceci posé, *tout triangle annexe du triangle ABC sera un triangle formé par deux éléments de même espèce de ABC et l'homologue de l'un d'eux dans $A'B'C'$* . En associant ainsi deux à deux les sommets de ABC , on obtient six triangles annexes, et de même six autres au moyen des côtés ⁽²⁾.

La considération de trois de ces triangles annexes permet, dans chaque cas, d'obtenir trois angles auxiliaires déterminables par l'abaque ci-dessus et qui ramènent la résolution du triangle à un cas où l'on connaît trois éléments consécutifs, par conséquent à un de ceux où l'emploi de l'abaque fournit immédiatement la solution.

Soient donnés, par exemple, pour rendre les idées plus claires, les côtés $BC = a$, $CA = b$ et l'angle A (*fig. 2*). Considérons le triangle annexe formé par les côtés AB et AC de l'angle donné avec l'homologue $A'B'$ de celui de ces côtés dont la grandeur n'est pas connue. Pour cela, prolongeons les grands cercles AC et AB jusqu'en leurs rencontres C_1 et B_1 avec le grand cercle $A'B'$. Dans le triangle AB_1C_1 , l'angle A est égal à l'angle A de ABC , le côté AC_1 , à $\frac{\pi}{2} - b$, l'angle C_1 à $\frac{\pi}{2}$, puisque C est le pôle de $A'B'$. Donc, en prenant

$$t = \pi - B_1, \quad u = \pi - A, \quad v = \frac{\pi}{2}, \quad T = \frac{\pi}{2} + b,$$

on aura, par l'abaque, la valeur de B_1 .

⁽¹⁾ *Comptes rendus* du 11 janvier 1904, p. 70.

⁽²⁾ Il y a douze manières de donner dans un triangle deux éléments de même espèce et l'élément de l'autre espèce opposé à l'un d'eux, d'où, par permutation, l'emploi, dans les conditions indiquées ici sur un exemple particulier, des douze triangles annexes.

Nous avons supposé l'angle B inconnu obtus. Si H est le point où le grand cercle CC' rencontre AB, le point B tombe entre A et H, et l'on a bien

$$C = BCC' - ACC'.$$

Mais il y a une seconde solution correspondant à l'hypothèse de B aigu. Dans ce cas, la disposition est celle que définit le point B₀; l'angle B₀CC' a bien la même valeur que l'angle BCC', mais on a alors

$$C = 2\pi - (ACC' + B_0CC').$$

En pratique, on a généralement le moyen de savoir d'avance si l'angle en B est aigu ou obtus, et, par suite, de décider laquelle de ces deux solutions il convient d'adopter.

Remarquons en terminant que la solution générale ci-dessus, qu'il était important de mettre en évidence au point de vue théorique, ne supprime pas l'intérêt que peuvent offrir des abaques visant tel ou tel problème particulier réductible à une résolution de triangle sphérique.

Quand nous disons que l'abaque général résout tous les cas, nous entendons par là qu'il permet, pour n'importe quel cas, d'obtenir, dans un certain ordre, les trois éléments inconnus. Or; dans la plupart des problèmes d'application, on n'a besoin que d'un seul de ces trois éléments et, si ce n'est pas le premier de ceux que donnerait l'abaque général, il y a intérêt à construire un abaque particulier qui le donne directement. Nous avons déjà, pour notre part, fait connaître un certain nombre de tels abaques. Nous tenons à signaler aujourd'hui celui que, toujours par application de la méthode des points alignés, vient de construire M. le lieutenant de vaisseau Perret pour le calcul de l'azimut en mer. Le tableau ainsi obtenu, de quelques décimètres carrés, renferme des solutions beaucoup plus étendues que les volumineuses Tables employées pour cet objet jusqu'à ce jour, et dont la meilleure, celle de Decante, ne comprend pas moins de sept Volumes, tout en ne convenant qu'aux astres compris entre -48° et $+48^\circ$ de déclinaison.

M. Perret est d'ailleurs l'auteur de nombreuses applications de la Nomographie à l'Astronomie pratique, parmi lesquelles celles qui visent la prédiction des occultations et la préparation des

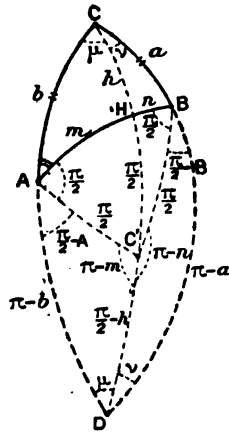
observations à l'astrolabe à prisme méritent aussi une mention spéciale.

Addendum.

Depuis la communication de cette Note, M. G. Pesci, Professeur à l'Académie navale de Livourne, après avoir pris connaissance de notre Note des *Comptes rendus*, nous a adressé une autre solution du même problème que nous tenons à joindre à la nôtre.

Soient D le point diamétralement opposé au sommet C sur la sphère et CHD le grand cercle orthogonal à AB. Le pôle C' de AB

Fig. 3.



se trouve sur CD et les grands cercles C'A et C'B sont orthogonaux sur AB.

Dans l'hypothèse de $B < \frac{\pi}{2}$, appelons m et n les segments déterminés par le grand cercle CHD sur AB, μ et ν les angles qu'il fait avec CA et CB.

Dans le triangle DAC' on connaît trois éléments consécutifs, savoir l'angle en A, égal à $\frac{\pi}{2} - A$, et les deux côtés qui le comprennent, $AD = \pi - b$, $AC' = \frac{\pi}{2}$. L'abaque permet alors de calculer les trois autres éléments du triangle, savoir : le côté C'D, l'angle en C' égal à $\pi - m$ (d'où m) et l'angle en D égal à μ .

C'D venant d'être calculé, on connaît les trois côtés du triangle DBC'. L'abaque permet alors d'en calculer les trois angles, savoir $\frac{\pi}{2} - B$ (d'où B), $\pi - n$ (d'où n) et v .

On a enfin

$$AB = m + n \quad \text{et} \quad C = \mu + v.$$

Si B est obtus il faut prendre

$$AB = m - n, \quad C = \mu - v.$$

**SUR LES DÉPLACEMENTS D'UNE FIGURE INVARIABLE DANS LESQUELS
LES DIFFÉRENTS POINTS DE LA FIGURE DÉCRIVENT
DES COURBES SPHÉRIQUES;**

Par M. LUCIEN LÉVY.

1. On doit à M. Darboux un beau théorème sur le mouvement d'une figure dont tous les points décrivent des lignes *planes* ⁽¹⁾. M. Mannheim a en outre démontré que *tous les points d'une droite décrivent des lignes SPHÉRIQUES dont les centres sont dans un même plan si quatre points de la droite jouissent de cette propriété. Le lieu des centres des sphères qui contiennent les lignes sphériques est une conique* (*Principes de Géométrie cinématique*, p. 180). Il en résulte immédiatement que, dans le cas général, si tous les points d'une droite décrivent des lignes sphériques, le lieu des centres des sphères est une cubique gauche, puisque ce lieu ne peut pas être coupé par un plan en quatre points sans en faire entièrement partie.

Duporcq (*Journal de mathématiques pures*, 1898) a donné un élégant théorème sur le mouvement d'une droite : *s'il existe sur une droite cinq points qui, pour cinq positions déterminées de la droite, soient situés sur cinq sphères, les cinq positions d'un sixième point quelconque de la droite seront sur une même sphère.*

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 1881. Voir aussi KÆNIGS, *Leçons de Cinématique*, Note III de M. Darboux, p. 353. M. Mannheim s'est attaché au mouvement inverse de celui dont il s'agit, *d'une figure dont les plans passent par des points fixes* et en a fait une étude élégante (*Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 389).

Enfin, M. Raoul Bricard (*Journal de mathématiques pures*, 1898) a déterminé tous les déplacements dans lesquels tous les points d'un plan décrivent des lignes sphériques dont les centres sont dans un même plan.

La présente Note a seulement pour objet de retrouver par le calcul quelques-uns des résultats précédents et d'étendre le procédé à quelques théorèmes que nous croyons nouveaux.

2. Désignons par $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, \dots$ les coordonnées des points $M_0, M_1, \dots$ de la figure mobile; par $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \dots$ celles des centres $C_0, C_1, \dots$ des sphères sur lesquelles restent les points correspondants, par $R_0, R_1, \dots$ les rayons de ces sphères. Enfin, lorsque les points $M_0, M_1, \dots$ seront sur une même droite (D), nous désignerons par a, b, c les cosinus directeurs de cette droite, et par ρ_i la distance $\overline{M_0 M_i}$, de sorte qu'on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_0 = 0, \\ x_i = x_0 + a\rho_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i, \end{cases}$$

avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On a aussi, dans tous les cas,

$$(2) \quad (x_0 - \alpha_0)^2 + (y_0 - \beta_0)^2 + (z_0 - \gamma_0)^2 = R_0^2,$$

$$(3) \quad (x_i - \alpha_i)^2 + (y_i - \beta_i)^2 + (z_i - \gamma_i)^2 = R_i^2,$$

et, dans le cas où tous les points M_i sont en ligne droite,

$$(4) \quad (x_0 + a\rho_i - \alpha_i)^2 + (y_0 + b\rho_i - \beta_i)^2 + (z_0 + c\rho_i - \gamma_i)^2 = R_i^2.$$

Soit O l'origine des coordonnées : posons

$$(5) \quad \overline{Oc_i}^2 = d_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2.$$

L'équation (4) devient

$$(6) \quad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \rho_i^2 + d_i^2 \\ - 2[x_i(x_0 + a\rho_i) + \beta_i(y_0 + b\rho_i) + \gamma_i(z_0 + c\rho_i)] \\ + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0) = R_i^2. \end{cases}$$

En retranchant l'équation (2) de l'équation (6), on obtient la nouvelle égalité

$$(7) \quad \begin{cases} 2(a\rho_i + \alpha_0 - \alpha_i)x_0 + 2(b\rho_i + \beta_0 - \beta_i)y_0 + 2(c\rho_i + \gamma_0 - \gamma_i)z_0 \\ - 2(a\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i)\rho_i + \rho_i^2 + d_i^2 - d_0^2 - R_i^2 + R_0^2 = 0, \end{cases}$$

que nous écrirons

$$(8) \quad \begin{cases} 2a\rho_i(x_0 - \alpha_i) + 2b\rho_i(y_0 - \beta_i) + 2c\rho_i(z_0 - \gamma_i) \\ = l_i^2 + 2[(\alpha_i - \alpha_0)x_0 + (\beta_i - \beta_0)y_0 + (\gamma_i - \gamma_0)z_0], \end{cases}$$

en posant, pour abrégér,

$$(9) \quad l_i^2 = R_i^2 - R_0^2 - \rho_i^2 - d_i^2 + d_0^2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un certain nombre de théorèmes.

3. THÉORÈME DE M. MANNHEIM. — *Supposons que quatre points de la droite (D), ceux qui correspondent à $i = 0, 1, 2, 3$, soient sur des sphères dont les centres sont dans un même plan, que nous prendrons pour plan des yz . On aura*

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.$$

On peut même, pour simplifier l'écriture, supposer $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$.

L'égalité (8) est une identité pour $i = 0$. Nous déduisons donc de (8) trois égalités qui sont vérifiées, par hypothèse :

$$(10) \quad \begin{cases} 2a\rho_1(x_0 - \alpha_1) + 2b\rho_1(y_0 - \beta_1) + 2c\rho_1z_0 = l_1^2 + 2(\alpha_1x_0 + \beta_1y_0); \\ 2a\rho_2(x_0 - \alpha_2) + \dots, \\ 2a\rho_3(x_0 - \alpha_3) + \dots \end{cases}$$

Considérons maintenant un cinquième point M_4 de la droite, $i = 4$. On tire des formules (1)

$$(11) \quad \begin{cases} x_0 = x_4 - a\rho_4, \\ y_0 = y_4 - b\rho_4, \\ z_0 = z_4 - c\rho_4 \end{cases}$$

et aussi

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \rho_1^2 + 2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

ou, en tenant compte de l'équation (2),

$$(12) \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R_0^2 + \rho_1^2 + 2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de x_0, y_0, z_0 tirées de (11) dans les seconds membres de (10); ces égalités peuvent s'écrire

$$2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) - 2\alpha_1\rho_1a - 2\beta_1\rho_1b = l_1^2 + 2\alpha_1x_1 + 2\beta_1y_1 - 2\rho_1(\alpha x_1 + b\beta_1),$$

.....

ou

$$(13) \quad \begin{cases} 2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) + 2(\rho_1 - \rho_1)\alpha_1a + 2(\rho_1 - \rho_1)\beta_1b \\ \quad = l_1^2 + 2\alpha_1x_1 + 2\beta_1y_1, \\ 2\rho_2(ax_0 + by_0 + cz_0) + \dots, \\ 2\rho_3(\dots\dots\dots) + \dots \end{cases}$$

En éliminant a, b et $ax_0 + by_0 + cz_0$ entre les équations (12) et (13), nous obtenons le lieu du point M_1

$$0 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R_0^2 - \rho_1^2 & 2\rho_1 & 0 & 0 \\ l_1^2 + 2\alpha_1x_1 + 2\beta_1y_1 & 2\rho_1 & 2(\rho_1 - \rho_1)\alpha_1 & 2(\rho_1 - \rho_1)\beta_1 \\ l_2^2 + 2\alpha_2x_1 + 2\beta_2y_1 & 2\rho_2 & 2(\rho_1 - \rho_2)\alpha_2 & 2(\rho_1 - \rho_2)\beta_2 \\ l_3^2 + 2\alpha_3x_1 + 2\beta_3y_1 & 2\rho_3 & 2(\rho_1 - \rho_3)\alpha_3 & 2(\rho_1 - \rho_3)\beta_3 \end{vmatrix}$$

qui peut s'écrire, en développant suivant les éléments de la première colonne,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2\xi x_1 - 2\eta y_1 + \lambda = 0.$$

Le lieu est donc une sphère ayant son centre C_1 dans le plan des xy .

On calculerait aisément ξ, η d'où résulterait, par l'élimination de ρ_1 , la conique lieu du point C_1 . Nous ne donnerons pas ce calcul.

4. AUTRE THÉORÈME. — *Si cinq points d'une droite décrivent des lignes sphériques, tous les points de la droite décrivent des lignes sphériques.*

Le mode de démonstration est tout à fait le même. Nous pouvons encore supposer $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$; mais les quatre centres C_1, C_2, C_3, C_4 sont quelconques.

L'équation (8) s'écrit ici

$$(14) \quad \begin{cases} 2\rho_i[(x_0 - \alpha_i)a + (y_0 - \beta_i)b + (z_0 - \gamma_i)c] \\ \quad = l_i^2 + 2(\alpha_ix_0 + \beta_iy_0 + \gamma_iz_0) \end{cases}$$

et cette équation en vaut quatre en faisant $i=1, 2, 3, 4$.

Considérons maintenant un sixième point M_5 ($i=5$); des formules (1), on tire

$$(15) \quad \begin{cases} x_0 = x_5 - a\rho_5, \\ y_0 = y_5 - b\rho_5, \\ z_0 = z_5 - c\rho_5 \end{cases}$$

et aussi

$$(16) \quad x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 = R_0^2 + \rho_5^2 + 2\rho_5(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de x_0, y_0, z_0 tirées de (15) dans les seconds membres des quatre équations (14); on obtient quatre nouvelles équations qui peuvent s'écrire

$$(17) \quad \begin{cases} 2\alpha_i(\rho_5 - \rho_i)a + 2\beta_i(\rho_5 - \rho_i)b + 2\gamma_i(\rho_5 - \rho_i)c \\ = l_i^2 + 2(\alpha_i x_5 + \beta_i y_5 + \gamma_i z_5) + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0). \end{cases}$$

En éliminant a, b, c et $ax_0 + by_0 + cz_0$ entre ces quatre équations et l'équation (16), on trouve enfin

$$\begin{vmatrix} x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - R_0^2 - \rho_5^2 & 2\rho_5 & 0 & 0 & 0 \\ l_1^2 + 2(\alpha_1 x_5 + \beta_1 y_5 + \gamma_1 z_5) & 2\rho_1 & 2\alpha_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\beta_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\gamma_1(\rho_5 - \rho_1) \\ l_2^2 + \dots & & & & \\ l_3^2 + \dots & & & & \\ l_4^2 + \dots & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée et ordonnée s'écrit

$$x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - 2\xi x_5 - 2\eta y_5 - 2\zeta z_5 + \lambda = 0,$$

ce qui montre que le lieu du point quelconque M_i est sur une sphère, et le théorème est démontré.

Le calcul des coordonnées ξ, η, ζ du centre de cette sphère se fait sans difficulté; il est seulement un peu long et nous bornerons à transcrire le résultat. Il est de la forme

$$(18) \quad \begin{cases} \xi = \frac{(\mu_1 \rho_5^2 + \nu_1 \rho_5 + \omega_1) \rho_5}{\lambda \rho_5^3 + \mu \rho_5^2 + \nu \rho_5 + \omega}, \\ \eta = \frac{(\mu_2 \rho_5^2 + \nu_2 \rho_5 + \omega_2) \rho_5}{\lambda \rho_5^3 + \mu \rho_5^2 + \nu \rho_5 + \omega}, \\ \zeta = \frac{(\mu_3 \rho_5^2 + \nu_3 \rho_5 + \omega_3) \rho_5}{\lambda \rho_5^3 + \mu \rho_5^2 + \nu \rho_5 + \omega}. \end{cases}$$

Ces équations définissent une cubique gauche, comme c'était prévu.

5. *Corollaire.* — En éliminant a, b, c entre les quatre équations (14), on obtient une équation du second degré en x_0, y_0, z_0 . Cette équation jointe à

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R_0^2$$

montre que le point M_0 et, puisque ce point n'a rien de spécial, tous les points de la droite (D) décrivent des biquadratiques sphériques (Duporcq).

6. La même méthode fournit des théorèmes sur le nombre de points qui suffisent à assurer le mouvement sur des lignes sphériques de tous les points d'une figure quelconque, plane ou non. En voici quelques-uns.

THÉORÈME. — *Si treize points arbitraires d'un solide décrivent des lignes sphériques, il en sera de même de tous les points du solide.*

Un point mobile quelconque M_i peut être représenté par les formules suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} x_i = x_0 + a\rho_i + a'\rho'_i + a''\rho''_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i + b'\rho'_i + b''\rho''_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i + c'\rho'_i + c''\rho''_i, \end{cases}$$

dans lesquelles $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle mobile. L'interprétation géométrique de ces formules est évidente. Par le point M_0 menons trois droites dont les cosinus directeurs soient respectivement $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ et prenons-les pour nouveaux axes de coordonnées. Les constantes $\rho_i, \rho'_i, \rho''_i$ représenteront les coordonnées du point mobile M_i rapportées à ces axes mobiles. Les formules (19) sont des formules de transformation de coordonnées.

Convenons enfin de désigner par le signe S la somme de trois termes déduits de l'un d'eux par la substitution des lettres x, y, z à x , ou a, b, c à a ou α, β, γ à $\alpha, \dots$. En élevant les équations

tions (19) au carré, et ajoutant, on obtient l'identité

$$(20) \quad Sx_i^2 = Sx_0^2 + \rho_i^2 + \rho'_i{}^2 + \rho''_i{}^2 + 2S(a\rho_i + a'\rho'_i + a''\rho''_i)x_0.$$

Si le point M_0 reste sur une sphère ayant son centre à l'origine, on aura

$$Sx_0^2 = R_0^2,$$

d'où

$$(21) \quad Sx_i^2 = R_0^2 + \rho_i^2 + \rho'_i{}^2 + \rho''_i{}^2 + 2S(a\rho_i + a'\rho'_i + a''\rho''_i)x_0$$

et, si le point M_i est aussi sur une sphère, on aura nécessairement

$$(22) \quad S(a\rho_i + a'\rho'_i + a''\rho''_i)x_0 = \alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i + p_i,$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, p_i$ étant des constantes dont les trois premières sont les coordonnées du centre c_i de la sphère sur laquelle reste le point M_i . Remplaçons dans (22) x_i, y_i, z_i par leurs valeurs tirées de (19) et ordonnons par rapport aux constantes $\rho_i, \rho'_i, \rho''_i$; il vient

$$(23) \quad \begin{cases} \rho_i S(ax_0) + \rho'_i S(a'x_0) + \rho''_i S(a''x_0) \\ = S(\alpha_i x_0) + \rho_i S(\alpha \alpha_i) + \rho'_i S(\alpha' \alpha_i) + \rho''_i S(\alpha'' \alpha_i) + p_i. \end{cases}$$

Cela posé, considérons un point quelconque M ayant pour coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes et ρ, ρ', ρ'' par rapport au trièdre mobile, de sorte que

$$(24) \quad \begin{cases} x = x_0 + a\rho + a'\rho' + a''\rho'', \\ y = y_0 + b\rho + b'\rho' + b''\rho'', \\ z = z_0 + c\rho + c'\rho' + c''\rho'' \end{cases}$$

et

$$(25) \quad Sx^2 = R^2 + \rho^2 + \rho'^2 + \rho''^2 + 2\rho S(ax_0) + 2\rho' S(a'x_0) + 2\rho'' S(a''x_0).$$

Entre les égalités (24), (25) et les douze qu'on déduira de (23) en donnant à i douze valeurs distinctes, on pourra éliminer les quinze inconnues $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', S(ax_0), S(a'x_0), S(a''x_0)$ qui y figurent au premier degré. Il en résultera une relation de la forme

$$(26) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\xi x - 2\eta y - 2\zeta z + \lambda = 0,$$

qui exprime que le point M reste sur une sphère si M_0 et les douze points M_i restent sur des sphères.

7. Supposons ρ'_i et ρ'' nuls; tout ce qui renferme les lettres a' , b'' , c'' et $S(a''x_0)$ disparaît et il suffit de donner à i dans les formules (23) huit valeurs différentes pour avoir ce nouveau théorème : *Si neuf points d'un plan décrivent des lignes sphériques, il en est de même de tous les points de ce plan.*

8. Enfin si l'on supposait de plus ρ'_i et ρ' nuls, on retomberait sur le théorème du n° 3.

9. Les raisonnements précédents ne prouvent pas qu'on ne puisse pas se contenter d'assujettir moins de neuf points d'un plan ou moins de treize points d'un solide à décrire des lignes sphériques, tous les points du plan ou du solide décrivant en conséquence des lignes sphériques. Soit, en effet, $M_0\rho\rho'\rho''$ le trièdre mobile. Dès qu'on aura assujetti cinq points de $M_0\rho$ et un point de $M_0\rho'$ à décrire des lignes sphériques le mouvement sera entièrement déterminé; tous les autres points du système décriront des courbes déterminées et l'on n'a aucune indication sur le nombre de ces courbes qu'il faut assujettir à être sphériques pour entraîner la sphéricité des autres. Il y a cependant des présomptions : si $M_0\rho'$ était indépendante de $M_0\rho$, il faudrait bien assujettir cinq points de $M_0\rho$ à être sur des sphères, ce qui, avec les cinq points de $M_0\rho$ parmi lesquels on peut compter M_0 , fait bien neuf points. On ferait le même raisonnement pour les points de $M_0\rho''$, ce qui semble donner treize points pour la possibilité d'un mouvement satisfaisant d'une figure solide.

10. D'ailleurs la possibilité même du mouvement reste à établir; c'est bien ce qu'a fait M. Bricard dans le Mémoire dont nous avons déjà parlé en montrant que si les centres des sphères sont assujettis à être dans deux plans rectangulaires, tandis que les points qui décrivent les lignes sphériques sont eux-mêmes dans deux plans rectangulaires, aucun point attaché aux deux plans mobiles ne peut décrire de ligne sphérique en dehors de ceux situés dans ces plans.

11. *Cas particuliers.* — Le nombre des conditions diminue si les centres ont certaines positions particulières. Sans parler du cas évident où toutes les sphères sont concentriques, nous citerons

par exemple le cas signalé par M. Mannheim des sphères ayant leurs centres dans un même plan et où il suffit qu'une droite ait *quatre* points satisfaisants pour que tous ses points décrivent des lignes sphériques.

Par analogie avec le raisonnement du n° 9, on peut prévoir que *tous les points d'un plan resteront sur des sphères ayant leurs centres dans un même plan dès que sept points du plan mobile jouissent de cette propriété*. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

Prenons en effet pour plan fixe le plan des xy ; dans les équations des pages 9 et 10, il faudra faire $\gamma_i = 0$, et les seconds membres des équations (23) ne contiendront plus comme inconnues que x_0, y_0, a, b, a', b' , parce que $\rho'_i = 0$. Comme de plus $\rho'' = 0$, il n'y aura en dehors des inconnues précédentes que $S(ax_0)$, $S(a'x_0)$ et enfin z_0 qui ne figure que dans la troisième équation (24), et dont par conséquent il n'y a pas à tenir compte. Pour pouvoir éliminer les huit inconnues, il n'y a donc à joindre à l'équation (25) et aux deux premières équations (24) que six équations (23). En d'autres termes, en comptant le point M_0 , il suffit de supposer que sept points du plan mobile décrivent des lignes sphériques. La non-utilisation de la troisième équation (24) prouve que, dans l'équation (26), on aura

$$\zeta = 0,$$

c'est-à-dire que les centres des sphères sur lesquelles restent les points du plan mobile sont bien dans le plan fixe.

NOTE DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX;

Par M. E. GENTY.

1. L'objet principal de cette Note est de montrer avec quelle simplicité les procédés de la géométrie vectorielle conduisent à l'équation différentielle du troisième ordre dont dépend la recherche des *familles de Lamé*, c'est-à-dire des familles de surfaces qui peuvent faire partie d'un système triple orthogonal. Mais, avant d'aborder cette question, nous allons donner quelques indications sur certaines notations différentielles dont nous aurons à faire usage et sur les formules principales qui s'y rapportent.

Nous emploierons, dans ce qui va suivre, les notations de M. Gibbs, savoir : $\alpha, \beta, \gamma \dots$ étant des vecteurs, $\alpha \cdot \beta$ désignera $S\alpha\beta$, c'est-à-dire le *produit projectif* des vecteurs α et β , et $\alpha \times \beta$ désignera $V\alpha\beta$, c'est-à-dire le *moment orienté* de ces deux vecteurs. On aura ainsi $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha \times \beta} \dots$ désignant les longueurs ou modules des vecteurs $\alpha, \beta, \alpha \times \beta \dots$,

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= \bar{\alpha} \bar{\beta} \cos(\alpha, \beta); \\ \alpha \times \beta &= \bar{\alpha} \bar{\beta} \sin(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

Enfin la notation $\alpha\beta\gamma$ désignera l'un ou l'autre des trois scalaires égaux

$$\alpha \cdot (\beta \times \gamma), \quad \beta \cdot (\gamma \times \alpha), \quad \gamma \cdot (\alpha \times \beta).$$

2. Soit u une fonction scalaire de ρ et $v.d\rho$ la différentielle de cette fraction. Pour rappeler l'origine du vecteur v , nous poserons

$$v = \nabla u,$$

et, par suite,

$$du = d\rho \cdot \nabla u.$$

Si l'on remplace dans cette équation $d\rho$ par $d\lambda$, λ étant un orienteur quelconque, constant ou fonction de ρ , on aura

$$\frac{du}{d\lambda} = \lambda \cdot \nabla u;$$

c'est ce que nous appellerons *dérivée de la fonction u prise suivant la direction λ* .

3. Soit de même σ un vecteur fonction de ρ ; on aura

$$d\sigma = \varphi d\rho,$$

$\varphi d\rho$ étant une fonction vectorielle linéaire de la différentielle $d\rho$ qui, en général, n'est pas conjuguée à elle-même, et

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \varphi \lambda$$

sera la dérivée de σ prise suivant la direction λ .

Si de plus α, β et γ sont trois orienteurs rectangulaires quelconques, nous poserons

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \alpha \times \varphi\alpha + \beta \times \varphi\beta + \gamma \times \varphi\gamma = \Sigma(\alpha \times \varphi\alpha); \\ \delta\sigma &= \alpha \cdot \varphi\alpha + \beta \cdot \varphi\beta + \gamma \cdot \varphi\gamma = \Sigma(\alpha \cdot \varphi\alpha).\end{aligned}$$

On sait d'ailleurs que, si ω est un vecteur quelconque, on a

$$\varphi\omega - \varphi'\omega = \Delta\tau \times \omega,$$

φ' désignant, comme d'usage, la conjuguée de la fonction φ , et que l'expression $D\sigma$ est égale au coefficient M_2 de l'équation symbolique

$$\varphi^2 - M_2\varphi^2 + M_1\varphi - M = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction φ .

Dans le cas où φ est une fonction conjuguée à elle-même, on a

$$\Delta\sigma = 0.$$

C'est ce qui a lieu lorsque, σ étant le ∇ d'une fonction scalaire u , l'expression $\sigma.d\rho$ est une différentielle exacte.

Dans le cas plus général où cette expression n'est pas une différentielle exacte, mais peut le devenir lorsqu'on la multiplie par un certain facteur, on a, ainsi que l'a démontré Hamilton,

$$(1) \quad \sigma.\Delta\sigma = 0;$$

c'est la condition d'intégrabilité de l'équation

$$\tau.d\rho = 0.$$

4. Soit maintenant

$$(2) \quad d\varphi\lambda = \Phi(\lambda, d\rho),$$

λ étant un vecteur qu'on suppose constant dans la dérivation. $\Phi(\lambda, d\rho)$ sera une fonction vectorielle linéaire tout à la fois par rapport à λ et par rapport à $d\rho$. Nous allons montrer que, dans cette fonction, λ et $d\rho$ sont interchangeables, c'est-à-dire qu'on a

$$\Phi(\lambda, d\rho) = \Phi(d\rho, \lambda).$$

Soient, en effet, d et δ deux symboles de différentiation complètement indépendants.

Si dans l'équation (2) nous remplaçons λ par $\delta\rho$, il vient

$$d\varphi\delta\rho = \Phi(\delta\rho, d\rho).$$

Mais

$$d\varphi\delta\rho = d\delta\rho = \delta d\tau = \delta\varphi d\rho;$$

donc

$$\delta\varphi d\rho = \Phi(\delta\rho, d\rho).$$

ou, en remplaçant $d\rho$ par λ ,

$$(3) \quad \delta\varphi\lambda = \Phi(\delta\rho, \lambda),$$

et la proposition est démontrée.

Comme conséquence, si $\varphi\lambda$ est conjuguée à elle-même par rapport à λ , la fonction $\Phi(\lambda, d\rho)$, qui jouit évidemment de la même propriété, est aussi conjuguée à elle-même par rapport à $d\rho$.

§. Voici quelques applications.

Soit le vecteur $u\sigma$; on aura

$$\begin{aligned} d(u\sigma) &= \nabla u \cdot d\rho\sigma + u \nabla d\rho; \\ \Delta(u\sigma) &= \nabla u \times \sigma + u \Delta\sigma, \\ (4) \quad D(u\sigma) &= \Sigma \alpha \cdot \nabla u \alpha \cdot \sigma + u \Sigma(\alpha \cdot \varphi \alpha) = \sigma \cdot \nabla u + u D\sigma. \end{aligned}$$

Soit encore le scalaire $\sigma \cdot \tau$.

Si

$$d\tau = \theta d\rho,$$

on aura

$$\begin{aligned} d(\sigma \cdot \tau) &= \tau \cdot \varphi d\rho + \sigma \cdot \theta d\rho = (\varphi'\tau + \theta'\sigma) \cdot d\rho; \\ d'où \quad \nabla \sigma \cdot \tau &= \varphi'\tau + \theta'\sigma. \end{aligned}$$

Si l'on a identiquement

$$\sigma \cdot \tau = 0,$$

c'est-à-dire si σ et τ sont deux vecteurs rectangulaires, on aura aussi identiquement

$$(5) \quad \varphi'\tau + \theta'\sigma = 0.$$

Considérons enfin le vecteur $\sigma \times \tau$. On aura

$$d(\sigma \times \tau) = \varphi d\rho \times \tau + \sigma \times \theta d\rho$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma \times \tau) &= \Sigma[\alpha \times (\varphi \alpha \times \tau)] - \Sigma[\alpha \times (\theta \alpha \times \sigma)], \\ D(\sigma \times \tau) &= \Sigma \overline{\alpha \varphi \alpha \tau} - \Sigma \overline{\alpha \theta \alpha \tau}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \Sigma[\alpha \times (\varphi \alpha \times \tau)] &= \varphi \tau - D\sigma \tau, \\ \Sigma[\alpha \times (\theta \alpha \times \sigma)] &= \theta \sigma - D\tau \sigma, \\ \Sigma \overline{\alpha \varphi \alpha \tau} &= \tau \cdot \Delta \sigma, \\ \Sigma \overline{\alpha \theta \alpha \sigma} &= \sigma \cdot \Delta \tau. \end{aligned}$$

Donc on a

$$(6) \quad \Delta(\sigma \times \tau) = \varphi\tau - \theta\sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma,$$

$$(7) \quad D(\sigma \times \tau) = \Delta\sigma \cdot \tau - \Delta\tau \cdot \sigma.$$

Dans le cas où σ et τ sont deux vecteurs rectangulaires, l'expression de $\Delta(\sigma \times \tau)$ peut se mettre sous une autre forme qui nous sera très utile plus tard.

On a, en effet, dans ce cas (5)

$$\varphi'\tau + \theta'\sigma = 0;$$

on peut donc écrire

$$\Delta(\sigma \times \tau) = \varphi - \varphi'\tau + (\theta - \theta')\sigma - 2\theta\sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma,$$

ou

$$(8) \quad \Delta(\sigma \times \tau) = \Delta\sigma \times \tau + \Delta\tau \times \sigma - 2\theta\sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma.$$

On obtient de même la formule

$$(9) \quad \Delta(\sigma \times \tau) = 2\varphi\theta - \Delta\sigma \times \tau - \Delta\tau \times \sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma.$$

6. Arrivons maintenant à la question que nous avons en vue et considérons les familles de surfaces qu'on obtient en égalant à des constantes trois fonctions scalaires données u , u_1 et u_2 de ρ . Soient d'ailleurs

$$du = v \cdot d\rho, \quad du_1 = v_1 \cdot d\rho, \quad du_2 = v_2 \cdot d\rho,$$

et

$$dv = \varphi d\rho, \quad dv_1 = \varphi_1 d\rho, \quad dv_2 = \varphi_2 d\rho.$$

Les fonctions φ , φ_1 et φ_2 de $d\rho$ seront conjuguées à elles-mêmes, de sorte qu'on aura

$$(10) \quad \Delta v = \Delta v_1 = \Delta v_2 = 0.$$

Ceci posé, si deux surfaces quelconques appartenant à deux familles différentes se coupent partout à angle droit, on aura identiquement

$$(11) \quad v_1 \cdot v^2 = 0; \quad v_2 \cdot v = 0 \quad \text{et} \quad v \cdot v_1 = 0;$$

d'où

$$v_1 = v_2 \times v.$$

L'équation

$$\overline{v^2 v} d\rho = 0,$$

qui ne diffère de

$$v_1 \cdot d\varphi = 0$$

que par un facteur scalaire, est donc intégrable, et l'on a, par suite,

$$(v_2 \times v) \cdot \Delta(v_2 \times v) = 0,$$

ou

$$v_1 \cdot \Delta(v_1 \times v) = 0.$$

Mais la formule (8) devient ici

$$\Delta(v_2 \times v) = 2\varphi v_2 - Dv_2 v + Dvv_2,$$

et l'équation qui précède se réduit à

$$(12) \quad v_1 \cdot \varphi v_2 = 0.$$

Sous cette forme, elle montre qu'au point p , v_1 et v_2 , qui sont des vecteurs situés dans le plan tangent de la surface de paramètre u , sont deux directions conjuguées, et comme ces deux directions sont rectangulaires, ce sont celles des lignes de courbure de cette surface.

On a donc la propriété suivante, qui est due, comme on sait, à Dupin :

Les surfaces appartenant à deux familles différentes d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.

7. Il en résulte qu'on obtiendra les conditions qui expriment qu'une famille de surfaces fait partie d'un système triple orthogonal, en écrivant que les lignes de courbure des surfaces qui la constituent sont normales respectivement à deux familles de surfaces, c'est-à-dire qu'on a, v_1 et v_2 étant des vecteurs de modules quelconques tangents aux lignes de courbure,

$$(13) \quad v_1 \cdot \Delta v_1 = 0; \quad v_2 \cdot \Delta v_2 = 0.$$

Il est facile de voir, d'ailleurs, que ces deux conditions se réduisent à une seule.

Le vecteur v_1 ne diffère, en effet, de $v_2 \times v$ que par un facteur scalaire, de sorte que la première condition (13) peut être rem-

placée par la suivante :

Or on a (8)

$$\Delta(u_2 \times u) = \Delta u_2 \times u - 2\varphi u_2 = Du_2 u + Du u_2,$$

et, en tenant compte de la relation (12), la condition qui précède devient

$$\overline{u u_1 \Delta u_2} = 0,$$

ou

$$u_2 \cdot \Delta u_2 = 0.$$

On est conduit ainsi à la proposition suivante, qui comprend et complète celle de Dupin :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de surfaces se coupant à angle droit fassent partie d'un système triple orthogonal, c'est-à-dire pour qu'il existe une troisième famille de surfaces coupant les premières à angle droit, est que les signes d'intersection de deux surfaces de familles différentes soient lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles.

Ces lignes d'intersection ne peuvent pas d'ailleurs être lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles sans être aussi lignes de courbure pour les surfaces de l'autre famille.

8. L'une ou l'autre des conditions (13) nous conduirait, ainsi que nous le montrerons plus loin, à l'équation différentielle des familles de Lamé. Mais nous pouvons obtenir aussi cette équation par le procédé suivant, qui est plus simple et plus élégant.

Reprenons la condition

$$(14) \quad u_1 \cdot \varphi u_2 = 0.$$

Si M est le point où la normale au point ρ à la surface de paramètre u rencontre la surface de paramètre $u \times du$, les surfaces de paramètre u_1 et u_2 passeront en M et leurs normales en ce point devront être tangentes aux lignes de courbure de la surface de paramètre $u + du$. On obtiendra la condition pour qu'il en soit ainsi en prenant la dérivée de l'équation (14) suivant le vecteur ϵ ,

ce qui donne

$$\varphi_1 u \cdot \varphi u_2 + u_1 \cdot \varphi \varphi_2 u + u_1 \cdot \Phi(u_2, u) = 0,$$

ou, en tenant compte des identités

$$\varphi_1 u + \varphi u_1 = 0, \quad \varphi_2 u + \varphi u_2 = 0,$$

et posant

$$\Phi(u_2, u) = \Phi(u, u_2) = \Psi u_2,$$

$$(15) \quad u_1 \cdot (\Psi - 2\varphi^2) = 0.$$

Si maintenant on élimine u_1 et u_2 entre les équations (11), (14) et (15), on aura une relation qui ne contiendra plus que la fonction u et ses dérivées jusqu'au 3^e ordre; ce sera donc l'équation différentielle définissant les familles de surfaces qui peuvent faire partie d'un système triple orthogonal.

Il suffit d'ailleurs, pour faire cette élimination, d'écrire la condition bien connue qui exprime que le plan

$$u \cdot w = 0$$

coupe les quadriques

$$w \cdot \varphi w = 1, \quad w \cdot (\Psi - 2\varphi^2) w = 1,$$

suivant deux coniques coaxiales. Il vient ainsi

$$u \cdot [\varphi^2 \eta - \varphi u \times (\Psi - 2\varphi^2) u] = 0$$

ou

$$(16) \quad \varphi^2 u \cdot \eta - \overline{u \varphi u \Psi u} + 2 \overline{u \varphi u \varphi^2 u} = 0,$$

où l'on a posé, α , β et γ étant trois orienteurs rectangulaires quelconques,

$$\eta = \Sigma [\varphi \alpha \times (\Psi - 2\varphi^2) \alpha] = \Sigma (\varphi \alpha \times \Psi \alpha) = \Sigma (\alpha \times \Psi \varphi \alpha).$$

La relation vectorielle

$$\eta = 0$$

exprime, ainsi qu'il est facile de le voir, que les deux fonctions conjuguées à elles-mêmes φ et Ψ ont les mêmes directions principales.

9. Dans le cas particulier où les directions principales α , β et γ

de la fonction ρ sont fixes, on a

$$\begin{aligned} \varphi\lambda &= s_1\alpha.\lambda\alpha = s_2\beta.\lambda\beta \times s_3\gamma.\lambda\lambda, \\ \text{d'où} \quad \Psi\lambda &= \nu.\nabla s_1\alpha.\lambda\alpha + \nu.\nabla s_2\beta.\lambda\beta + \nu.\nabla s_3\gamma.\lambda\gamma. \end{aligned}$$

On a alors $\eta = 0$ et, si l'on pose

$$\alpha.\nu = a, \quad \beta.\nu = b, \quad \gamma.\nu = c,$$

l'équation (16) devient

$$(17) \quad abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ \nu.\nabla s_1 - 2s_1^2 & \nu.\nabla s_2 - 2s_2^2 & \nu.\nabla s_3 - 2s_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons, par exemple, une solution de la forme

$$u = X + Y + Z,$$

où X, Y et Z sont des fonctions de $\alpha, \rho, \beta, \rho$ et γ, ρ respectivement.

On aura

$$\begin{aligned} \nu &= X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma, \\ d\nu &= \varphi d\rho = X'\alpha.d\rho\alpha + Y'\beta.d\rho\beta + Z'\gamma.d\rho\gamma, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a &= X', & b &= Y', & c &= Z', \\ s_1 &= X'', & s_2 &= Y'', & s_3 &= Z'', \\ \nu.\nabla s_1 &= X'X''', & \nu.\nabla s_2 &= Y'Y''', & \nu.\nabla s_3 &= Z'Z''' \end{aligned}$$

et l'équation (17) devient

$$X'Y'Z' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X'X''' - X'^2 & Y'Y''' - Y'^2 & Z'Z''' - Z'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est conforme à un résultat obtenu par Bouquet.

10. L'équation (15) peut évidemment se mettre sous la forme

$$(18) \quad d\rho.(\Psi - 2\varphi^2)\delta\rho = 0$$

où d et δ sont des symboles de dérivation relatifs à des déplacements suivant les lignes de courbure de la surface (u). Si d'ailleurs nous désignons par ρdu la distance des surfaces de para-

mètres u et $u \times du$, on aura

$$\rho = \frac{1}{\psi}.$$

Si nous différencions cette équation pour un déplacement $d\rho$ suivant une des lignes de courbure de la surface de paramètre u , il vient

$$-dp = p^2 \psi \cdot d\psi = p^2 d\rho \cdot \varphi \psi = \omega \cdot d\rho,$$

en posant

$$\omega = p^2 \varphi \psi;$$

et l'on aura

$$(19) \quad d\omega = \psi d\rho = p^2 (\Psi' + \varphi^2) d\rho - 3p^2 \varphi \psi \cdot d\rho \varphi \psi;$$

d'où

$$(20) \quad \partial\rho \cdot \Psi' d\rho = p^2 \partial\rho \cdot (\psi + \varphi^2) d\rho - 3p^2 \varphi \psi \cdot \partial\rho \varphi \psi \cdot \partial\rho.$$

Or les vecteurs $\psi \times \varphi d\rho$ et $\psi \times \varphi \partial\rho$ sont respectivement parallèles à $d\rho$ et $\partial\rho$: donc on a

$$(\psi \times \varphi d\rho) \cdot (\psi \times \varphi \partial\rho) = 0,$$

d'où

$$\overline{\psi}^2 d\rho \cdot \varphi^2 \partial\rho = \psi \cdot \varphi d\rho \psi \cdot \varphi \partial\rho.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (20) devient

$$d\rho \cdot \psi \partial\rho = p^2 d\rho \cdot (\Psi' - 2\varphi^2) \partial\rho,$$

de sorte que l'équation (18) peut s'écrire sous la forme

$$d\rho \cdot \psi d\rho = 0,$$

où la fonction ψ définie par l'équation (19) est conjuguée à elle-même.

L'équation (16) d'une famille de Lamé peut donc elle-même être remplacée par la suivante :

$$(21) \quad \overline{\psi}^2 \varepsilon \cdot \psi - \overline{\psi \varphi \psi \varphi} = 0,$$

où

$$\varepsilon = \Sigma(\varphi x \times \psi x) = \Sigma(x \times \psi \varphi x).$$

11. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que l'équation de la famille de surfaces de paramètre u était résolue par rapport à u . Considérons maintenant le cas où cette équation est de

la forme

$$f(\rho, u) = 0$$

et ne peut pas être résolue par rapport à u .

Si nous différencions cette équation, il vient

$$v \cdot d\rho + \frac{\partial f}{\partial u} du = 0,$$

et la quantité que nous avons désignée par p aura pour valeur

$$p = - \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{v}.$$

Il est évident d'ailleurs que tous les résultats du Paragraphe qui précède subsisteront en partant de cette valeur de p et en laissant u constant dans les dérivations.

12. L'équation (21) est vérifiée pour $p = \text{constante}$, c'est-à-dire quand la famille de paramètre u est composée de surfaces parallèles.

Toutes les solutions de l'équation

$$(22) \quad p = a\rho^{-2} + 2\lambda \cdot \rho + b,$$

où les scalaires a et b et le vecteur λ sont des fonctions de u , appartiennent également à l'équation (21) et feront par suite connaître des familles de Lamé.

On a, en effet, u restant constant,

$$dp = 2(a\rho \cdot d\rho + \lambda \cdot d\rho),$$

d'où,

$$\omega = 2(a\rho + \lambda)$$

et

$$d\omega = \psi d\rho = 2a d\rho;$$

en sorte que l'équation

$$d\rho \cdot \psi \delta\rho = 0$$

se réduit à

$$d\rho \cdot \delta\rho = 0,$$

et elle est toujours vérifiée par les directions rectangulaires $d\rho$ et $\delta\rho$.

Les familles de sphères et de plans rentrent dans ce cas par-

ticulier et peuvent dès lors faire partie d'un système triple orthogonal.

En effet, une famille quelconque de sphères a une équation de la forme

$$\overline{\rho - \alpha}^2 = R^2,$$

α et R étant des fonctions de u , et l'on a

$$\begin{aligned} v &= \rho - \alpha, & \bar{v} &= \overline{\rho - \alpha} = R, \\ \rho &= -\frac{\alpha' \cdot (\rho - \alpha)}{R}, \end{aligned}$$

α' étant la dérivée du vecteur α par rapport à u ; et cette équation est bien une forme particulière de l'équation (22).

13. Nous allons enfin montrer comment on peut obtenir l'équation (16) en exprimant que les lignes de courbure des surfaces de la famille considérée sont normales respectivement à deux familles de surfaces. Mais, auparavant, nous ferons quelques remarques sur l'orienteur normal d'une surface et ses différentielles.

14. Désignons par v l'orienteur de la normale, et soit

$$dv = \psi d\rho.$$

On a, puisque v est un orienteur,

$$v \cdot dv = 0$$

ou

$$v \cdot \psi d\rho = d\rho \cdot \psi' v = 0;$$

et, comme $d\rho$ est un vecteur quelconque, on a identiquement

$$\psi' v = 0.$$

On voit donc que la fonction ψ appliquée à un vecteur quelconque l'amène dans le plan tangent et que l'équation vectorielle

$$\varpi \times \psi \varpi = 0$$

n'a que deux racines distinctes pour lesquelles $\psi \varpi$ est différent de zéro.

Si ε et ε_1 sont les deux orienteurs qui satisfont à cette équation,

on aura

$$\psi s = s \varepsilon, \quad \psi \varepsilon_1 = s_1 \varepsilon_1,$$

s et s_1 étant les racines de l'équation

$$(23) \quad s^2 - m_2 s + m_1 = 0.$$

La fonction ψ satisfait d'ailleurs à l'équation symbolique

$$\psi(\psi^2 - m_2 \psi + m_1) = 0,$$

qui, pour un vecteur situé dans le plan tangent, se réduit à

$$(24) \quad \psi^2 - m_2 \psi + m_1 = 0.$$

On voit immédiatement que ε et ε_1 satisfont également à l'équation des lignes de courbure de la surface (u)

$$\overline{v dv d\rho} = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{v \psi d\rho d\rho} = 0;$$

ce sont donc les orienteurs des lignes de courbure de la surface (u) au point ρ .

Les orienteurs v , ε et ε_1 déterminent ainsi un système de trois directions rectangulaires.

D'autre part, la relation

$$(\psi - \psi')v = \Delta v \times v$$

se réduit, dans le cas actuel, à

$$\psi v = \Delta v \times v.$$

L'équation $v \cdot d\rho = 0$ étant d'ailleurs intégrable, on a

$$v \cdot \Delta v = 0$$

et, par suite,

$$\Delta v = v \times \psi v.$$

Si donc on pose

$$\psi v = r\lambda, \quad \Delta v = r\mu,$$

λ et μ étant des orienteurs, on aura un second système d'orienteurs rectangulaires λ , μ et v dont on aperçoit immédiatement la signification géométrique : v est l'orienteur de la tangente, λ celui de la normale principale et μ celui de la binormale des trajectoires orthogonales de la famille de surfaces considérée, et r est la courbure de la trajectoire qui passe au point ρ .

Si, de plus, r_1 est la torsion de cette courbe, on aura

$$\frac{d\mu}{dn} = r_1 \lambda,$$

$\frac{d}{dn}$ étant un symbole de dérivation suivant la normale à la surface u , c'est-à-dire suivant la tangente à la trajectoire orthogonale.

L'équation

$$\Delta v = v \times \psi v$$

montre enfin qu'on a

$$\lambda \times \psi \lambda + \mu \times \varphi \mu = 0.$$

15. Revenons maintenant à la question que nous avons en vue. Nous avons montré précédemment que, si v_1 et v_2 sont des vecteurs de modules quelconques tangents aux lignes de courbure de la surface u , la condition qui exprime que les lignes de courbure de toutes les surfaces de la famille sont, pour chaque système, orthogonales à une famille de surfaces, est indifféremment

$$v_1 \cdot \Delta v_1 = 0 \quad \text{ou} \quad v_2 \cdot \Delta v_2 = 0.$$

Il est clair dès lors qu'on peut mettre cette condition sous la forme

$$(24 \text{ bis}) \quad v_1 \cdot \Delta v_1 + v_2 \cdot \Delta v_2 = 0.$$

Or on obtiendra deux vecteurs dirigés suivant les lignes de courbure de la surface v en opérant avec $\psi - s$ et avec $\psi - s_1$ sur un vecteur quelconque du plan tangent; par exemple, sur le vecteur μ . L'équation (24 bis) peut donc s'écrire

$$(\psi \mu - s \mu) \cdot \Delta(\psi \mu - s \mu) + (\psi \mu - s_1 \mu) \cdot \Delta(\psi \mu - s_1 \mu) = 0,$$

ou, en développant et remarquant que $s + s_1 = m_2$ et $ss_1 = m_1$,

$$(25) \quad \begin{cases} (2\psi\mu - m_2\mu) \cdot \Delta\psi\mu \\ + (m_2^2\mu - 2m_1\mu - m_2\psi\mu) \cdot \Delta\mu - \overline{\mu\psi\mu \nabla m_2} = 0. \end{cases}$$

Nous allons calculer séparément chacun des trois termes du premier membre de cette équation.

Posons

$$d\Delta v = \theta d\zeta \quad \text{et} \quad d\mu = \chi d\zeta;$$

nous aurons

$$d\psi\mu = \Psi(\mu, d\rho) + \psi\chi d\rho.$$

On aura donc, en employant, selon le cas, l'un ou l'autre des deux systèmes d'orienteurs rectangulaires que nous avons signalés dans le paragraphe qui précède,

$$\Delta\psi\mu = \Sigma[\alpha \times \psi(\mu, \alpha)] + \Sigma\lambda \times \psi\chi\lambda = \frac{d\Delta v}{dm} + \Sigma(\lambda \times \psi\chi\lambda).$$

Mais, dans l'expression $\Sigma(\lambda \times \psi\chi\lambda)$, nous pouvons négliger les termes $\lambda \times \psi\chi\lambda$ et $\mu \times \psi\chi\mu$, qui sont dirigés suivant la normale, ainsi qu'on le reconnaît en les projetant avec λ et avec μ , et qui n'influent pas dès lors sur le résultat que nous avons en vue.

On a donc

$$\Delta\psi\mu = \frac{d\Delta v}{dm} + v \times \psi\chi v = \theta\mu + v \times \psi \frac{d\mu}{dn} + \dots,$$

ou enfin

$$\Delta\psi\mu = \theta\mu + r_1 v \times \psi\lambda + \dots$$

Le premier terme de l'équation (25) peut donc s'écrire

$$(2\psi\mu - m_2\mu) \cdot (\theta\mu + r_1 v \times \psi\lambda),$$

ou encore, en remarquant que

$$m_1 = \Sigma v\psi\lambda\psi\mu = \overline{v\psi\lambda\psi\mu}, \\ (2\psi\mu - m_2\mu) \cdot \theta\mu + 2m_1 r_1 - m_2 r_1 \lambda \cdot \psi\lambda.$$

Pour calculer le second terme de l'équation (25), nous allons chercher les composantes du vecteur $\Delta\mu$ suivant les directions λ et μ .

On a

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \Delta\mu &= \overline{\mu v \Delta\mu} = -\mu \cdot (\chi - \chi')v = -\mu \cdot \frac{d\mu}{dn} + v \cdot \chi\mu = v \cdot \chi\mu \\ &= v \cdot \frac{d\mu}{dm} = -\mu \cdot \frac{dv}{dm} = -\mu \cdot \psi\mu. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mu \cdot \Delta\mu &= \lambda \cdot (\chi - \chi')v = \lambda \cdot \frac{d\mu}{dn} - v \cdot \chi\lambda = r_1 - v \cdot \frac{d\mu}{dt} \\ &= r_1 + \mu \cdot \frac{dv}{dt} = r_1 + \mu \cdot \psi\lambda = r_1 + \lambda \cdot \psi\mu, \end{aligned}$$

$$\text{car } (\psi - \psi')\mu = \Delta v \times \mu = 0.$$

Donc

$$\Delta\mu = -\mu.\psi\mu\lambda + r_1 + \lambda.\psi\mu)\mu + \dots$$

En tenant compte de cette expression de $\Delta\mu$, le deuxième terme de l'équation (25) se ramène immédiatement à la forme

$$m_1^2 r_1 + m_1^2 \lambda.\psi\mu - 2 m_1 r_1 - 2 m_1 \lambda.\psi\mu - m_2 r_1 \mu.\psi\mu.$$

Enfin le troisième terme de l'équation (25) est égal à

$$\frac{dm_2}{dn} \lambda.\psi\mu.$$

En réunissant tous ces résultats, l'équation (25) devient

$$(26) \quad (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu + \left(m_1^2 - 2m_1 + \frac{dm_2}{dn}\right)\lambda.\psi\mu = 0.$$

On peut simplifier l'écriture en remarquant que

$$d\psi v = \Psi(v, d\rho) + \psi^2 d\rho;$$

d'où

$$D\psi v = \Sigma \alpha. \Psi(v, \alpha) + \Sigma \alpha. \psi^2 \alpha = m_1^2 - 2m_1 + \frac{dm_2}{dn}.$$

L'équation (26) peut donc s'écrire

$$(27) \quad (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu + D\psi v \lambda.\psi\mu = 0.$$

On donnera une autre forme à cette équation en introduisant la fonction conjuguée θ' à l'aide de la relation

$$(\theta - \theta')\mu = \Delta^2 v \times \mu,$$

où l'on a posé $\Delta(\Delta v) = \Delta^2 v$.

Il vient en effet, en tenant compte de cette relation,

$$\begin{aligned} (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu &= (2\psi\mu - m_2\mu).\theta'\mu + \overline{2\mu\psi\mu\Delta^2 v} \\ &= (2\psi\mu - m_2\mu)\theta'\mu + 2(\nu \times \lambda)\psi\mu\Delta^2 v \\ &= (2\psi\mu - m_2\mu)\theta'\mu - 2(\lambda.\psi\mu)(\nu.\Delta^2 v). \end{aligned}$$

Or on a (n° 9)

$$\Delta^2 v = \Delta(\nu \times \psi\nu) = 2\psi\nu - \Delta\nu \times \psi\nu - \Delta\psi\nu \times \nu - D\nu\psi\nu + D\psi\nu\nu,$$

d'où

$$\nu.\Delta^2 v = \overline{\Delta\nu^2} + D\psi\nu.$$

On a donc enfin

$$(2\psi\mu - m_2\mu) \cdot \theta v = (2\psi\mu - m_2\mu) \cdot \theta' v - 2(\overline{\Delta v}^2 D\psi v) \lambda \cdot \psi\mu.$$

En tenant compte de ce résultat, l'équation (27) devient

$$(28) \quad (2\psi\mu - m_2\mu) \theta' \mu - (\overline{2\Delta v}^2 D\psi v) \lambda \cdot \psi\mu = 0.$$

On obtient enfin une dernière forme de l'équation cherchée en additionnant les équations (27) et (28), ce qui donne

$$(2\psi\mu - m_2\mu) \cdot (\theta + \theta') \mu - 2\overline{\Delta v}^2 \psi v \cdot \psi \Delta v = 0,$$

ou

$$(29) \quad \Delta v \cdot (\theta + \theta') (2\psi \Delta v - m_2 \Delta v) - 2\overline{\Delta v}^2 \psi v \cdot \psi \Delta v = 0.$$

16. Il est intéressant de montrer que l'équation que nous venons d'obtenir est identique à l'équation (16).

On a

$$v = p v,$$

$$dp = -p^3 v \cdot \varphi dp,$$

$$dv = \psi dp = p(\varphi dp - p^3 dp \cdot \varphi v v) = p(\varphi dp - dp \cdot \varphi v v),$$

d'où

$$\psi v = p(\varphi v - v \cdot \varphi v v),$$

$$m_2 = \Sigma \alpha \cdot \psi \alpha = p(M_2 - v \cdot \varphi v),$$

en désignant par des lettres majuscules les invariants de la fonction φ ,

$$\Delta v = v \times \psi v = p v \times \varphi v = p^3 v \times \varphi v$$

et, par suite,

$$v \cdot \Delta v = 0, \quad \Delta v \cdot \varphi v = 0$$

et

$$\overline{\Delta v}^2 = p^2 v \times \varphi v,$$

$$\psi \Delta v = p \varphi \Delta v$$

et enfin

$$\begin{aligned} \theta dp &= d\Delta v = p^3(\varphi dp \times \varphi v + v \times \varphi^3 dp + v \times \Psi dp) - 3p^3 dp \cdot \varphi v v \times \varphi v \\ &= p^3(\varphi dp \times \varphi v + v \times \varphi^3 dp + v \Psi dp - 3 dp \cdot \varphi v v \times \varphi v). \end{aligned}$$

Or l'équation (29) peut s'écrire

$$(30) \quad \Delta v \cdot \theta \psi \Delta v + \psi \Delta v \cdot \theta \Delta v - m_2 \Delta v \cdot \theta \Delta v - \overline{\Delta v}^2 \psi v \cdot \psi \Delta v = 0,$$

et les formules qui précèdent permettent d'obtenir par des calculs

très simples, pour les quatre termes du premier membre de cette équation, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta v. \theta \psi \Delta v &= p^4 \left[(v. \varphi^2 v - 2 M_2 v. \varphi v + M_2^2 - M_1 - 3 v \times \overline{\varphi v^2}) \Delta v. \varphi^2 v \right. \\ &\quad \left. + \Delta v. \varphi \Psi \varphi v - v. \varphi v \overline{v \varphi v \Psi v} \right], \\ \psi \Delta v. \theta \Delta v &= p^4 \left[(M_1 - M_2 v. \varphi v + v. \varphi^2 v) \Delta v. \varphi^2 v + v. \varphi^2 v \Delta v. \Psi v - \Delta v. \Psi \varphi^2 v \right. \\ &\quad \left. + M_2 (\Delta v. \Psi \varphi v - v. \varphi v \overline{v \varphi v \Psi v}) \right], \\ m_2 \Delta v. \theta \Delta v &= p^4 (M_2 - v. \varphi v) [(M_2 - 2 v. \varphi v) \Delta v. \varphi^2 v + \Delta v \Psi \varphi v - v. \varphi v \Delta v. \Psi v], \\ \overline{\Delta v}^2 \psi v. \psi \Delta v &= p^4 v \times \overline{\varphi v}^2 \Delta v. \varphi^2 v.\end{aligned}$$

En réunissant tous ces résultats, l'équation (30) devient

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Delta v}^2 (2 \Delta v. \varphi^2 v - \Delta v \Psi v) \\ + p^2 (v. \varphi v \Delta v \varphi \Psi v + \Delta v. \Psi \varphi^2 v - \Delta v. \varphi \Psi \varphi v - v. \varphi v \Delta v \Psi \varphi v) \end{array} \right\} = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned}v. \varphi v (\Delta v. v \Psi v - \Delta v. \Psi \varphi v) + \Delta v. \Psi \varphi^2 v - \Delta v. \varphi \Psi \varphi v \\ = \Delta v. (\Psi \varphi - \varphi \Psi) \varphi v - v. \varphi v \Delta v. (\Psi \varphi - \varphi \Psi) v \\ = \Delta v \eta \varphi v - \overline{\Delta v} \eta v = [(\Delta v \times \eta) + v]. (\varphi v \times v) \\ = - \frac{1}{p} (\Delta v \times \eta). (v \times \Delta v) = \frac{\overline{\Delta v}^2}{p} \eta. v.\end{aligned}$$

Donc enfin l'équation (31) peut s'écrire

$$p v. \eta - \Delta v. \Psi v + 2 \Delta v. \varphi^2 v = 0$$

et, sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'elle est identique à l'équation (16).

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris.

— *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*. Deux volumes grand in-8, se vendant séparément :

TOME I : Volume de iv-338 pages avec figures; 1898..... 10 fr.

TOME II..... (En préparation.)

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — *Traité de Nomographie. Théorie des abaques. Applications*. Grand in-8, avec 127 figures et 1 planche; 1899.

Broché..... 14 fr. | Relié (cuir souple).. 17 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 3).

Mémoires et Communications.

	Pages
[H 9d] CLAIRIN (J.). — Remarque sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.....	149
[O 7b] DE MONTCHEUIL (M.). — Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis (<i>suite</i>).....	152
[C 1a] LUCAS (F.). — Sur les dérivées modulaires des polynômes...	185
[Q 1a] LUCAS (F.). — Sur les dérivées modulaires des polynômes...	189
[X 3] D'OCAGNE (M.). — Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques.....	196
[O 8c] LÉVY (L.). — Sur les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des lignes sphériques.....	203
[O 6p] GENTY (E.). — Note de Géométrie vectorielle sur les systèmes orthogonaux.....	211

MODIFICATION A LA LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ.

Date de
l'admission.

1903 REMONDOS (G.), Professeur de Mathématiques, rue de Phocion, 6, à Athènes (Grèce).

CHANGEMENT D'ADRESSE :

1902 LEBESGUE, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de la Liberté, 11, à Rennes (Ile-et-Vilaine).

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et **LEVY** (Lucien), Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Analyse infinitésimale à l'usage des Ingénieurs.** 2 volumes grand in-8, se vendant séparément :

TOME I : CALCUL DIFFÉRENTIEL. *Dérivées et différentielles. Changements de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes et gauches. Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume grand in-8 de VIII-557 pages, avec 45 figures; 1900... 15 fr.

TOME II : CALCUL INTÉGRAL. *Intégrales indéfinies et définies. Séries de Fourier. Fonctions elliptiques. Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Grand in-8 de XII-648 pages, avec 50 figures; 1902..... 15 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXII. — PASCIGULE IV.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

—
1904

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*,
banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.
On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième mercredis de chaque mois à 8 heures et demie.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Bricard.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume. fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont **instamment priés** d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages de texte** imprimé.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES FONCTIONS DE CLASSE 1;

Par M. HENRI LEBESGUE.

On sait que l'on appelle *fonction de classe 1* toute fonction discontinue qui est la limite d'une suite convergente de fonctions de classe 0, c'est-à-dire de fonctions continues. M. Baire ⁽¹⁾ a fait connaître une propriété caractéristique de ces fonctions, nous la retrouverons plus loin comme conséquence de celle qui va nous occuper.

J'ai déjà énoncé cette propriété dans une Note récemment parue ⁽²⁾ en me limitant aux fonctions d'une seule variable; la méthode que j'emploie ici s'applique dans tous les cas, mais, pour simplifier le langage, je raisonnerai toujours comme s'il n'y avait que deux variables x et y .

1. — *Pour qu'une fonction f soit de classe 0 ou 1, il faut et il suffit que, quel que soit $\epsilon > 0$, le domaine où f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est continue à moins de ϵ près; ou encore sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ϵ .*

Je précise d'abord le sens qu'il faut donner à ces deux énoncés et je démontre leur équivalence.

Par la somme d'ensembles composants j'entends l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles composants, que ces ensembles aient ou non des points communs.

⁽¹⁾ Thèse *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899, et ce *Bulletin*, t. XXVIII).

⁽²⁾ *Démonstration d'un théorème de M. Baire*, Note II des *Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynômes*, de M. ÉMILE BOREL; Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Les questions dont je m'occupe ici sont traitées d'une manière différente et comme cas particuliers dans un Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement*, qui paraîtra prochainement dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan.

f sera dite *continue*, à moins de ϵ près, sur l'ensemble fermé E , s'il existe une fonction continue φ partout définie et telle que $|f - \varphi|$ soit toujours inférieure à ϵ pour les points de E . Divisons le plan en carrés assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de φ soit au plus égale à η ; il y a une infinité dénombrable de ces carrés. Soient C un des carrés et e l'ensemble des points de E intérieurs à C ou situés sur la frontière de C , e est un ensemble fermé et, sur e , l'oscillation de f est inférieure à $\epsilon + \eta$; d'ailleurs E est la somme de l'infinité dénombrable des e . Si donc le domaine où f est définie est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles tels que E , il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles e et, si ϵ est quelconque, $\epsilon + \eta$ est aussi petit que l'on veut; cela montre l'identité des deux énoncés indiqués. Je vais démontrer le second.

Soit f la limite de la suite convergente de fonctions continues $f_1, f_2, \dots$. Divisons l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en une infinité dénombrable d'intervalles à l'aide des points de divisions

$$\dots, m_{-2}, m_{-1}, m_0, m_1, m_2, \dots,$$

distants deux à deux de moins de $\frac{\epsilon}{2}$. Le domaine où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles

$$E(m_i < f < m_{i+2}),$$

formés des points en lesquels est vérifiée l'inégalité écrite entre parenthèses. Dans chacun des ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ l'oscillation de f est inférieure à ϵ , il suffira donc de montrer qu'un tel ensemble est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés pour avoir prouvé que la condition énoncée est nécessaire.

Or $E(m_i < f < m_{i+2})$ est la somme des ensembles $E_{n,p}$ (n et p entiers) pour lesquels on a, quel que soit $q \geq p$,

$$m_i + \frac{1}{n} \leq f_q \leq m_{i+2} - \frac{1}{n}.$$

Par définition même $E_{n,p}$ est l'ensemble des points communs à la fois à tous les ensembles $E\left(m_i + \frac{1}{n} \leq f_q \leq m_{i+2} - \frac{1}{n}\right)$, pour lesquels on a $q \geq p$; tous ces ensembles étant fermés, $E_{n,p}$ est fermé.

Pour démontrer que la condition est suffisante, supposons qu'elle soit remplie par la fonction f . Alors le domaine où f est définie est la somme des ensembles fermés

$$(S_1) \quad E_1^1, E_1^2, E_1^3, \dots,$$

sur chacun desquels l'oscillation de f est inférieure à 1. Ce domaine est aussi la somme des ensembles fermés

$$C_1, C_2, \dots,$$

sur chacun desquels l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Remplaçons C_p par les ensembles $C_{p,q}$ formés des points communs à C_p et E_q^1 , ensembles qui ont C_p pour somme.

En opérant ainsi sur chaque C_p et en rangeant les ensembles $C_{p,q}$ dans un ordre quelconque nous remplacerons la suite des C_p par la suite des ensembles fermés

$$(S_2) \quad E_1^2, E_2^2, E_3^2, \dots$$

En opérant d'une manière analogue, on fait correspondre à chaque entier m une suite d'ensembles fermés

$$(S_m) \quad E_1^m, E_2^m, E_3^m, \dots,$$

dont la somme est le domaine considéré, sur chacun desquels f est continue à $\frac{1}{m}$ près et qui sont tous contenus dans l'un au moins des ensembles de la suite correspondant à $m - 1$. A chaque ensemble E_q^p est attaché une constante K_q^p qui diffère de f de moins de $\frac{1}{2^p}$ sur E_q^p .

Pour former le $m^{\text{ième}}$ terme f_m d'une suite de fonctions continues tendant vers f , je divise le plan des xy en carrés de côté $\frac{1}{m}$ par des parallèles aux axes de coordonnées. Soit A le sommet d'un de ces carrés; les quatre carrés ayant A pour sommet forment un carré α . Soit $E_{i_1}^1$ le premier des ensembles de (S_1) ayant des points contenus dans α , c'est-à-dire intérieurs à la frontière de α ou sur cette frontière. Soit $E_{i_2}^2$ le premier des ensembles de (S_2) qui est contenu dans $E_{i_1}^1$ et dont certains points sont contenus dans α ; soit $E_{i_3}^3$ le premier des ensembles de (S_3) qui est contenu dans $E_{i_2}^2$ et

dont certains points sont dans α . En continuant on arrive à la définition d'un ensemble E_m^m ; en A je prends $f_m = K_{\alpha_m}^m$.

f_m sera maintenant complètement déterminée par la condition d'être linéaire en x et en y (c'est-à-dire d'être représentable par une expression de la forme $Axy + Bx + Cy + D$, où A, B, C, D sont des constantes) dans chacun des carrés de côté $\frac{1}{m}$ considérés.

Il reste à vérifier que f_m tend vers f .

Soient M un point, $E_{\alpha_1}^1$ le premier ensemble de (S_1) contenant M , $E_{\alpha_2}^2$ le premier ensemble de (S_2) contenu dans $E_{\alpha_1}^1$ et contenant M , $E_{\alpha_3}^3$ sera le premier des ensembles de (S_3) contenu dans $E_{\alpha_2}^2$ et contenant M , et ainsi de suite. Soit q un entier assez grand pour que M soit distant de plus de $\frac{2\sqrt{2}}{q}$ des points de l'ensemble fermé $\mathcal{C}$ somme des ensembles $E_1^1, E_2^1, \dots, E_{\alpha_{i-1}}^1$, des ensembles E_k^2 contenus dans $E_{\alpha_1}^1$ et d'indice inférieur plus petit que α_2 , des ensembles E_k^3 contenus dans $E_{\alpha_2}^2$ et d'indice inférieur plus petit que α_3 , etc., des ensembles E_k^m contenus dans $E_{\alpha_{m-1}}^{m-1}$ et d'indice inférieur plus petit que α_m . Étudions maintenant $f_p(M)$ pour $p \geq q$ et $p > m$.

La définition de $f_p(M)$ dépend, comme on l'a vu, de la considération de certains carrés de côté $\frac{1}{p}$, savoir les carrés de la $p^{\text{ième}}$ division du plan en carrés qui ont au moins un sommet en commun avec un carré de cette division contenant M . Tous ces carrés sont intérieurs au cercle de centre M et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{p}$, donc extérieurs à $\mathcal{C}$, par suite aux sommets du ou des carrés contenant M . f_p est égale à la constante K_p^p relative à un ensemble E_p^p contenu dans $E_{\alpha_m}^m$.

Soit P un point de E_p^p , on a

$$|K_p^p - K_{\alpha_m}^m| \leq |K_p^p - f(P)| + |K_{\alpha_m}^m - f(P)| < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2m} < \frac{1}{m}.$$

Donc aux sommets du ou des carrés contenant M , f_p diffère de $K_{\alpha_m}^m$ de $\frac{1}{m}$ au plus et, par suite, il en est de même en M . De là nous tirons

$$|f(M) - f_p(M)| \leq |f(M) - K_{\alpha_m}^m| + |f_p(M) - K_{\alpha_m}^m| < \frac{2}{m};$$

et, puisque m est quelconque, il est bien démontré que la suite des f_p converge vers f .

Le théorème précédent permet dans bien des cas, on le conçoit, de reconnaître qu'une fonction donnée est de classe 1 : je donnerai seulement trois exemples de son emploi.

Soit f une fonction n'ayant qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité. Soit E l'ensemble fermé dénombrable des points en lesquels l'oscillation de f est au moins égale à ϵ . E est la somme de l'infinité dénombrable de ses points, sur chacun desquels f est d'oscillation nulle. Soit maintenant un point du complémentaire de E ; il est intérieur à un carré dans lequel l'oscillation de f est inférieure à ϵ et le complémentaire de E est la somme d'une infinité dénombrable de tels carrés. Donc les conditions du théorème I sont remplies ; f est de classe 1.

Soit f une fonction semi-continue supérieurement. M. Baire désigne ainsi une fonction f telle que, quel que soit P , $f(P)$ soit au moins égal à la plus grande des limites de $f(M)$, quand M tend vers P . De là résulte immédiatement que l'ensemble $E(\alpha \leq f)$ des points où f est au moins égale à α est fermé ; car si P est un point limite de cet ensemble la plus grande des limites de $f(M)$, quand M tend vers P , est au moins α , donc $f(P)$ est au moins égal à α .

Ceci posé, je divise l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en une infinité dénombrable d'intervalles partiels de longueur au plus égale à ϵ . Soit (a, b) l'un d'eux ; le domaine où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles tels que $E(\alpha \leq f < b)$, formé des points en lesquels est vérifiée l'inégalité entre parenthèses. Sur chacun de ces ensembles, l'oscillation de f est au plus égale à ϵ , or $E(\alpha \leq f < b)$ s'obtient en retranchant de l'ensemble fermé $E(\alpha \leq f)$ les points de l'ensemble fermé $E(b \leq f)$.

$E(\alpha \leq f < b)$ est, par suite, la somme de l'infinité dénombrable des ensembles fermés tels que E_n , formé des points de $E(\alpha \leq f)$, distants de $\frac{1}{n}$ au moins des points de $E(b \leq f)$. D'après le théorème I, f est de la classe 0 ou 1 (¹).

Pour appliquer le théorème I au cas précédent il a fallu démon-

(¹) Au sujet de ces fonctions et de leur représentation, voir BAIRE, *Thèse*, p. 5 à 12 et p. 61, et ce *Bulletin*, t. XXVIII et XXXII.

trer que certains ensembles étaient sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés; c'est toujours à cette question que l'on peut ramener l'application du théorème I. D'après la démonstration de la première partie de ce théorème, en effet, si f est de la classe 1, $E(a < f < b)$ est, quels que soient a et b , somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés; réciproquement, si cela a lieu, les ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ de la démonstration étant sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés, le domaine où f est définie est, quel que soit $\epsilon > 0$, la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ϵ , c'est-à-dire que f est de classe 0 ou 1.

J'applique la méthode qui résulte de là pour démontrer qu'une fonction $f(x, y)$ continue en x et en y est de classe 0 ou 1 (').

Je considère l'ensemble $E(a < f < b)$ comme la somme des ensembles $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ correspondant aux valeurs entières de p . L'ensemble $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ est tel que, si M est un de ses points, il existe un segment (α, β) contenant M , à son intérieur, parallèle à l'axe des x et dont tous les points, extrémités non comprises, font partie de l'ensemble. Considérons l'ensemble $E_{n,p}$ des points M de $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ qui sont compris dans un segment (α, β) tel que (α, M) et (β, M) soient tous deux de longueur supérieure à $\frac{1}{n}$ (n entier). Soient A un point limite de $E_{n,p}$ et $M_1, M_2, \dots$ des points de $E_{n,p}$ tendant vers A . S'ils sont tous, à partir d'un certain indice, sur la parallèle à l'axe des x passant par A , f étant continue en x , A fait évidemment partie de

$$E\left(a + \frac{1}{p} \leq f \leq b - \frac{1}{p}\right).$$

Sinon les intervalles $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \dots$ correspondant aux points $M_1, M_2, \dots$ rencontrent tous, à partir d'un certain rang i , la parallèle à l'axe des y menée par A en des points $\gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots$

(') J'ai déjà démontré cette proposition d'une autre manière dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de 1898.

qui tendent vers A. Ces points γ font partie de

$$E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right),$$

donc, puisque f est continue en γ , A fait partie de

$$E\left(a + \frac{1}{p} \leq f \leq b - \frac{1}{p}\right).$$

Ainsi, dans tous les cas, l'ensemble fermé $(E_{n,p} + E'_{n,p})$, $E'_{n,p}$ désignant le dérivé de $E_{n,p}$, fait partie de $E(a < f < b)$; ce dernier ensemble est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles tels que $(E_{n,p} + E'_{n,p})$, le théorème est démontré.

Il n'y a pas dans ce qui précède de procédé général et régulier pour reconnaître si une fonction est ou non de classe 1; un tel procédé est d'ailleurs impossible à donner si l'on ne suppose, sur les fonctions que l'on considère, rien d'autre que ceci : elles sont données. Cependant, comme on l'a vu par les exemples, à condition d'employer des raisonnements différents suivant les cas, le théorème I peut être utile parce qu'il montre l'identité de deux problèmes; la solution de l'un de ces problèmes s'aperçoit parfois plus aisément que celle de l'autre. C'est un intérêt du même genre que présente la proposition suivante :

II. *Pour qu'un ensemble donné E puisse être considéré comme l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction, il faut et il suffit qu'il soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.*

La condition est nécessaire. L'ensemble des points de discontinuité de f est en effet la somme des ensembles fermés E_n , E_n étant formé des points en lesquels l'oscillation de f est au moins égale à $\frac{1}{n}$.

La condition est suffisante. Soit E somme des ensembles fermés $E_1, E_2, \dots$. Par f je désigne une fonction nulle aux points ne faisant pas partie de E et qui, aux points de E, est définie comme il suit. Soit M un point de E_i ne faisant pas partie de

$$E_1 + E_2 + \dots + E_{i-1},$$

si M est intérieur à tout un domaine faisant partie de E_i on prendra

en M f égale à $\frac{1}{i}$ ou 0 suivant que toutes les coordonnées de M seront rationnelles ou non; si M n'est pas intérieur à un tel domaine on prendra $f = \frac{1}{i}$. On vérifie facilement que f est continue pour tous les points ne faisant pas partie de E , et discontinue pour tous les points de E , l'oscillation de f en un point de E_i , n'appartenant pas à $E_1 + E_2 + \dots + E_{i-1}$, étant égale à $\frac{1}{i}$.

Cette proposition va nous permettre d'utiliser un résultat de M. Volterra.

On sait que f est dite ponctuellement discontinue dans le domaine Δ si, dans tout domaine D intérieur à Δ , il y a des points de continuité de f . Si cela est, dans tout domaine D on en peut trouver un autre D' dans lequel f est d'oscillation inférieure à ϵ choisi arbitrairement positif; cela est évident puisqu'il suffit de prendre D' assez petit et entourant un point de continuité. La réciproque est vraie, en effet, si, dans D , on peut trouver D_1 où l'oscillation de f est inférieure à 1, si, dans D_1 , on peut trouver D_2 où l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{2}$, si, dans D_2 , on peut trouver D_3 où l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{3}$, etc.; à l'intérieur de tous ces domaines on peut trouver un point M qui est intérieur à D , en M f est continue.

Supposons maintenant que nous ayons une infinité dénombrable $f_1, f_2, \dots$ de fonctions ponctuellement discontinues dans Δ ; alors on peut reprendre le raisonnement précédent en assujettissant D_p à être intérieur à D_{p-1} et de plus tel que, dans D_p , les oscillations de $f_1, f_2, \dots, f_p$ soient respectivement inférieures à $\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}, \dots, 1$. Alors, au point M , intérieur à tous les D_p , toutes les fonctions f_p sont continues. C'est la proposition de M. Volterra ⁽¹⁾.

Concluons de là, avec M. Volterra, que si E et E_1 sont deux ensembles partout denses dans Δ , c'est-à-dire admettant l'un et l'autre Δ pour ensemble dérivé, et n'ayant aucun point commun, ils ne peuvent être l'un et l'autre ensemble de points de disconti-

⁽¹⁾ En réalité M. Volterra (*Giornale de Battaglini*, 1881) ne s'occupait que d'un nombre fini de fonctions; c'est M. Baire, en utilisant la notion d'ensemble de première catégorie, qui s'est occupé du cas général.

nuités pour deux fonctions f et f_1 ; car ces deux fonctions seraient ponctuellement discontinues dans Δ et n'y auraient cependant pas de point de continuité en commun. Par suite, si l'un de ces deux ensembles peut être obtenu comme ensemble $E(a < \varphi < b)$ pour une fonction φ de classe 1, il n'en est certainement pas de même pour l'autre.

Considérons par exemple une fonction f et supposons qu'elle soit supérieure à 0 pour les valeurs irrationnelles de la variable x et pour celles-là seulement. Alors l'ensemble $E(0 < f < +\infty)$ est partout dense ainsi que son complémentaire; celui-ci est d'ailleurs la somme de l'infinité dénombrable des ensembles fermés définis chacun par une égalité de la forme $x = \text{constante}$ rationnelle, par suite $E(0 < f < +\infty)$ n'est pas la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. f n'est donc ni de classe 0 ni de classe 1.

La proposition de M. Volterra nous permet donc d'utiliser le théorème I pour démontrer que certaines fonctions ne sont pas de classe 1. Cette proposition est généralisable de plusieurs manières; en utilisant ces généralisations, on reconnaîtra qu'il y a un rapport étroit entre le théorème de M. Volterra et la condition nécessaire pour qu'une fonction soit de classe 1 qu'a fait connaître M. Baire.

Soit f une fonction de classe 1. Reprenons les nombres m_i qui ont servi pour la démonstration de la première partie de I. Le domaine Δ où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$; d'ailleurs, on peut définir les fonctions φ_i de manière que l'ensemble des points de discontinuité de φ_i soit $E(m_i < f < m_{i+2})$. Toutes ces fonctions ne peuvent être ponctuellement discontinues dans D , intérieur à Δ , sans quoi elles auraient un point de continuité en commun, point qui n'appartiendrait à aucun des $E(m_i < f < m_{i+2})$. Cela revient à dire qu'il existe un certain domaine D' , intérieur à D , et faisant tout entier partie de l'un des $E(m_i < f < m_{i+2})$; en d'autres termes, dans D' , f est d'oscillation inférieure à ϵ . Puisque ϵ est quelconque, on conclut de là que f est ponctuellement continue dans Δ .

Pour aller plus loin, remarquons :

1° Que la partie commune à un ensemble parfait $\mathcal{C}$ et à un en-

semble E , somme d'ensembles fermés $E_1, E_2, \dots$, est la somme des ensembles fermés parties communes à $\mathcal{C}$ d'une part et à $E_1, E_2, \dots$ d'autre part ;

2° Que le raisonnement du théorème II légèrement modifié prouve que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E , formé de points d'un ensemble parfait $\mathcal{C}$, soit l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f définie seulement sur $\mathcal{C}$ est qu'il soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés ;

3° Que le théorème de M. Volterra peut être démontré pour les fonctions définies sur un ensemble parfait $\mathcal{C}$ et ponctuellement discontinues sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire ayant des points de continuité dans tout domaine contenant, à son intérieur, des points de $\mathcal{C}$.

Dès lors, on peut, dans le raisonnement précédent, remplacer le domaine Δ par un ensemble parfait $\mathcal{C}$ contenu dans Δ et les ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ par leurs parties communes avec $\mathcal{C}$. On voit ainsi qu'une fonction de classe 1 est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. C'est la condition nécessaire donnée par M. Baire.

La méthode, très détournée, qui nous y a conduits montre que, théoriquement du moins, la remarque de M. Volterra, jointe au théorème I, permet, tout aussi bien que l'énoncé de M. Baire, de reconnaître qu'une fonction donnée est de classe 1. Mais cet énoncé est pratiquement plus simple à employer dans la plupart des cas à cause de l'habitude que nous avons d'étudier la continuité ou la discontinuité d'une fonction en un point.

On sait que la condition nécessaire de M. Baire est aussi suffisante en sorte que :

III. *Pour qu'une fonction soit de classe 0 ou 1, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

C'est ce que je vais démontrer.

Il a été démontré que la condition est nécessaire, je vais démontrer qu'elle est suffisante, c'est-à-dire que, si f n'est pas de classe 0 ou 1, il existe un ensemble parfait sur lequel f est totalement discontinue.

Puisque f n'est pas de classe 1, on peut trouver une valeur po-

sitive ϵ telle que le domaine Δ où f est définie ne soit pas la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ϵ .

On peut alors distinguer entre les points de Δ . Les uns, les points a , ne peuvent être intérieurs à un domaine D , si petit qu'il soit, sans que D jouisse de la même propriété que Δ ; les autres, les points b , sont intérieurs à des domaines δ assez petits pour être sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés sur lesquels f est d'oscillation inférieure à ϵ .

Si M est un point b , tous les points du δ correspondant sont aussi des points b ; par suite, l'ensemble A des points a , s'il en existe, est fermé. Montrons que A existe.

Si Δ ne contenait aucun point a , tous ces points étant b seraient intérieurs à des δ ; d'après un théorème de M. Borel, on doit conclure de là que Δ serait la somme d'un nombre fini de δ et, par suite, la somme de l'ensemble dénombrable des ensembles fermés, en lesquels se décomposaient ces δ , et pour chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ϵ ; cela est contraire à l'hypothèse.

Montrons même qu'il y a plus d'un point a . S'il n'y avait qu'un tel point, le point M , on déduirait du théorème de M. Borel que Δ , moins M , serait la somme d'une infinité dénombrable de δ , donc aussi comme précédemment d'ensembles fermés où f est d'oscillation inférieure à ϵ . Mais M est lui-même un ensemble fermé d'oscillation inférieure à ϵ pour f , donc M ne serait pas un point a , mais un point b et l'on pourrait prendre Δ pour δ correspondant.

Concluons de là que l'ensemble A , qui existe certainement, ne contient aucun point isolé, car, si M était un tel point, à condition de prendre autour de M un domaine D assez petit, M serait le seul point a de D .

Donc, *l'ensemble A est parfait.*

Je dis que, sur A , l'oscillation de f est, en tout point, au moins égale à ϵ . Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi pour le point M de A . En prenant le domaine D , contenant M , assez petit, f sera d'oscillation inférieure à ϵ sur l'ensemble parfait α , partie commune à D et A .

L'ensemble des points de D ne faisant pas partie de α est la somme d'une infinité dénombrable de domaines, par exemple des carrés dont les sommets ont des coordonnées rationnelles et qui

ne contiennent pas de points de α . Chacun de ces carrés est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur lesquels f est d'oscillation inférieure à ϵ , donc il en est de même de leur somme. Et, si l'on ajoute α à ces ensembles, on voit que D est aussi la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés d'oscillation inférieure à ϵ pour f . Ceci est impossible puisque D contient des points α , par suite f est *discontinue sur A en tout point de l'ensemble parfait A* .

La démonstration qui précède ⁽¹⁾ montre que le théorème I peut être utilement employé pour l'étude des fonctions de classe 1. Voici deux théorèmes auxquels il conduit facilement :

IV. *Une série uniformément convergente de fonctions de classe 0 ou 1 a pour somme une fonction de classe 0 ou 1.*

En effet, supposons que la somme f_n des n premiers termes diffère de sa limite f de moins de ϵ ; le domaine où f est définie est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f_n est d'oscillation inférieure à ϵ , puisque f_n est de classe 0 ou 1. Or, sur un tel ensemble fermé, f est d'oscillation 3ϵ au plus; donc f est de classe 0 ou 1 ⁽²⁾.

Ce théorème, qu'il est aisé de prouver directement, aurait pu nous servir à simplifier la démonstration de I.

V. *Pour qu'une fonction soit de classe 1 dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit de classe 0 ou 1 sur toutes les courbes du domaine et effectivement de classe 1 sur l'une des courbes.*

On sait que, dans le cas de deux variables x, y , par exemple, une courbe est définie par les équations

$$(C) \quad x = f(t), \quad y = g(t),$$

où f et g sont définies et continues dans un intervalle fini. Une

⁽¹⁾ Cette démonstration ne diffère que par la forme de celle que j'ai donnée dans la Note du Livre de M. Borel; comme elle, elle n'utilise pas la notion de nombre transfini. Dans la Note du Livre de M. Borel, la preuve que la condition énoncée est nécessaire est exposée d'une manière beaucoup plus directe et rapide.

⁽²⁾ On voit que le raisonnement suppose seulement la *convergence uniforme simple* de la série considérée.

courbe peut remplir un domaine et il existe une infinité de courbes remplissant chacune tout le domaine donné Δ quel qu'il soit.

Si $\Phi(x, y)$ est une fonction donnée, par convention, je dis qu'elle est de classe 1 ou 0 sur la courbe définie plus haut si la fonction composée de t $\Phi[f(t), g(t)] = \varphi(t)$ est de classe 0 ou 1.

Je suppose que la courbe C soit contenue dans le domaine Δ où Φ est définie. Alors, à tout point α de δ correspond, par les formules de définition de C , un point A de Δ , à un point A de C correspond un point au moins α de δ . A un ensemble e de points de δ , nous faisons ainsi correspondre un ensemble E de points de Δ et à un ensemble E de points de C nous faisons correspondre l'ensemble e , de tous les points de δ correspondant à ceux de E . Je dis que, si e (ou E) sont fermés, E (ou e) le sont aussi.

Supposons e fermé et soit $\mathfrak{N}$ un point limite de E . Soient $M_1, M_2, \dots$ des points de E tendant vers $\mathfrak{N}$ et soit m_i l'un des points correspondant à M_i . Les m_i ont au moins un point limite m dont le correspondant M est, puisque f et g sont continues, le point limite de $M_1, M_2, \dots$. Les points M et $\mathfrak{N}$ coïncident donc, et, puisque m fait partie de e , $\mathfrak{N}$ fait partie de E .

Supposons E fermé et soit m un point limite des points $m_1, m_2, \dots$ de e . A ces points correspondent M et $M_1, M_2, \dots$; d'ailleurs, M est évidemment point limite de $M_1, M_2, \dots$, donc fait partie de E , m fait partie de e .

Si $\Phi(x, y)$ est de classe 0, il en est de même de $\varphi(t)$. Car si $\varphi(m)$ n'était pas la limite de $\varphi(m_i)$, m_i tendant vers m , $\Phi(M) = \varphi(m)$ ne serait pas la limite de $\Phi(M_i) = \varphi(m_i)$, bien que M_i tende vers M ; cela est impossible. Supposons maintenant que Φ soit telle que φ soit continue sur toute courbe C et choisissons pour C une courbe remplissant tout le domaine. Si Φ n'était pas continue, on pourrait trouver une suite de points M_i tendant vers un point limite M et de manière que $\Phi(M_i)$ ait une limite déterminée différente de $\Phi(M)$. Soient E l'ensemble fermé formé des M_i et de M , e , l'ensemble correspondant, m un de ses points limites; m correspond à M . e , étant fermé et φ continue, φ est continue sur e , en m ; or cela est impossible puisque $\varphi(m) = \Phi(M)$ et que $\varphi(m_i) = \Phi(M_i)$ a une limite déterminée différente de $\varphi(m)$. Il y a là une contradiction qui montre que, pour qu'une fonction

soit continue dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit continue sur toute courbe de ce domaine.

Si $\Phi(x, y)$ est de classe 1, Δ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés E , sur chacun desquels Φ est d'oscillation inférieure à ϵ . A E correspondant l'ensemble fermé e_1 , φ a sur e_1 même oscillation que Φ sur E et δ est la somme des e_1 ; donc φ est de classe 0 ou 1.

Si, quelle que soit C , φ est de classe 0 ou 1, prenons pour C une courbe remplissant Δ et supposons que, sur C , φ soit de classe 1 (le cas où φ serait de classe 0 a été étudié). Alors δ est la somme d'ensembles fermés e en nombre fini ou dénombrable et sur chacun desquels φ est d'oscillation inférieure à ϵ , Δ est alors la somme des ensembles fermés E correspondant aux e , donc Φ est de classe 0 ou 1 et l'on sait déjà que Φ ne peut être de classe 0.

Cela démontre le théorème V; c'est ce théorème qui m'a permis, dans une Note des *Comptes rendus* de mars 1899, d'étendre au cas général le théorème III démontré tout d'abord par M. Baire pour les fonctions d'une variable seulement.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TYPE HYPERBOLIQUE;

Par M. HADAMARD.

1. Soit l'équation linéaire aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

dont nous voulons déterminer une solution par des données aux limites relatives à une certaine ligne L .

Celle-ci peut se comporter, par rapport aux caractéristiques, de trois façons différentes :

I. Chacune des coordonnées x et y varie, sur L , toujours dans le même sens : autrement dit, L n'admet aucune tangente (sinon tangente d'inflexion) parallèle aux axes, et, si elle présente un point anguleux A , les deux arcs AB , AC issus de ce point sont

situés dans deux angles opposés par le sommet formés par les caractéristiques qui passent en A.

Dans ce cas, les données propres à déterminer la solution sont celles de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs de z et de ses dérivées premières; et la méthode par laquelle on calcule effectivement la solution ainsi déterminée est celle de Riemann.

II. La ligne L présente un point anguleux A (ou un point pour lequel la tangente est parallèle à l'un des axes) tel que, des quatre angles formés par les caractéristiques qui passent en A, ceux qui contiennent les arcs AB, AC de L sont adjacents.

Dans ce cas, on devra ⁽¹⁾ choisir, *a priori*, les données de Cauchy sur l'un des arcs, AB par exemple, et la valeur de z seul sur l'autre arc.

Le problème ainsi posé se ramène d'ailleurs (moyennant ce qu'on sait sur le cas I) à un autre, pour lequel M. Picard ⁽²⁾ a démontré l'existence de la solution, celui dans lequel on se donne les valeurs sur deux lignes, l'une caractéristique, l'autre quelconque, se coupant à angle aigu.

Pour résoudre l'un ou l'autre de ces problèmes et calculer la valeur de z en un point quelconque O, ainsi que nous l'avons fait dans un précédent article ⁽³⁾, il ne suffit plus de considérer la fonction u de Riemann. Celle qu'il convient d'introduire, et que nous avons appelée U dans l'article en question, coïncide avec u dans une partie du plan, mais en est distincte dans une autre, séparée de la première par une certaine caractéristique ⁽⁴⁾ dépendant du point O et suivant laquelle la discontinuité qui existe entre ces deux fonctions est proportionnelle à l'exponentielle

$e^{\int b dx}$, soit

$$(2) \quad U(O, M) = u - u_P e^{\int_P^M b dx},$$

P étant le point où la caractéristique en question coupe l'arc AC

⁽¹⁾ Voir un Mémoire précédent : *Sur l'intégrale résiduelle* (ce Bulletin, t. XXVIII, 1900, p. 89 et suiv.).

⁽²⁾ In DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, Note 1.

⁽³⁾ *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (ce Bulletin, t. XXI, 1903).

⁽⁴⁾ PR, figure 1 de l'article qui vient d'être cité.

(et qui n'est d'ailleurs autre que celui où cet arc est coupé par la caractéristique de l'autre système issue du point O).

U est défini par cette condition et celle de s'annuler sur AP.

III. Enfin, lorsque les deux arcs AB, AC sont situés *dans un seul et même angle* formé par les caractéristiques issues de A, M. Goursat a montré ⁽¹⁾ que la fonction z est déterminée lorsqu'on donne des valeurs (sans aucune dérivée) sur AB et sur AC.

Quoique la question n'offre plus le même intérêt que pour les problèmes I et II, en raison de la signification physique de ceux-ci, on est conduit à chercher, pour le problème ainsi posé, une solution effective, par le moyen d'intégrales définies, analogue à celles qui sont acquises pour les précédents.

2. Si le problème III n'a pas une origine physique, nous allons voir qu'il dérive néanmoins, comme cas limite, d'une catégorie de questions qui, au contraire, sont introduites naturellement par les applications.

Nous avons d'ailleurs fait allusion à celle-ci incidemment ⁽²⁾, dans l'article cité : c'est celle à laquelle appartient le problème de la propagation de l'électricité dans un câble limité dans les deux sens.

Il s'agit encore, dans ce cas, de déterminer une solution d'une équation de la forme (1). La ligne L présente, cette fois, la disposition représentée par la figure 1. Elle se compose de deux arcs βB , γC le long desquels le coefficient angulaire de la tangente garde un signe invariable, le même pour les deux (nous supposons que ce signe est +), reliés par un troisième arc $\beta\gamma$ constamment incliné en sens contraire (par conséquent avec $\frac{dy}{dx} < 0$) qui les laisse tous deux d'un même côté. Autrement dit, elle offre deux points anguleux de l'espèce II.

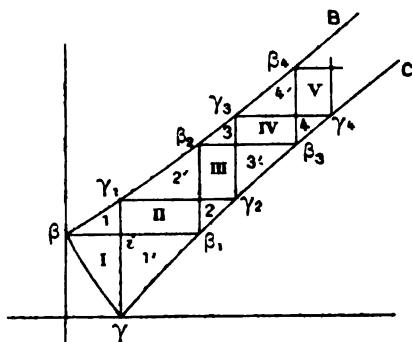
Les données sont celles de Cauchy sur $\beta\gamma$, les valeurs de z sur βB et γC . La fonction cherchée s'obtient par une combinaison des méthodes qui conviennent aux cas I et II. Menons, en effet,

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 8 juin 1903; *Annales Fac. de Toulouse*, 2^e série, Tome VI, p. 117-144.

⁽²⁾ *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 6, note.

par β et γ les caractéristiques $\beta\beta_1$ et $\gamma\gamma_1$ (dont le point d'intersection sera désigné par i) jusqu'à rencontre en β_1 , γ_1 avec γC , βB respectivement (*fig. 1*); puis, par β_1 et γ_1 , les caractéristiques

Fig. 1.



$\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ qui coupent βB , γC en β_2 , γ_2 , et ainsi de suite. Nous divisons ainsi l'aire Σ comprise entre nos trois arcs de courbe en une série de régions, les unes médianes, I, II, ... (*fig. 1*), qui sont des rectangles (sauf la première), les autres latérales, 1, 2, ...; 1', 2', ..., qui sont des triangles mixtilignes limités chacun par deux segments de caractéristiques et un arc de ligne βB ou γC .

Dans la région I (triangle mixtiligne $\beta i \gamma$), on est dans le cas I et z se détermine par la méthode de Riemann; moyennant quoi, on le calcule dans les régions 1, 1' par la résolution du problème II⁽¹⁾; dans la région II, de nouveau par la méthode de Riemann⁽¹⁾; dans les régions 2, 2' par la résolution du problème II; et ainsi de suite.

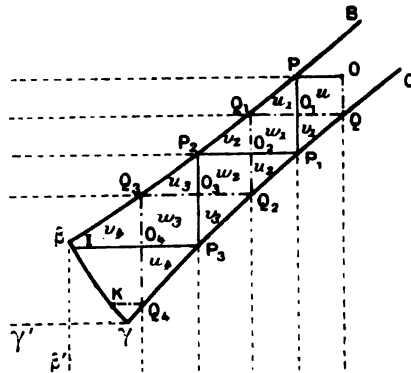
Les caractéristiques qui séparent les unes des autres nos différentes régions correspondent, physiquement, aux ondes et à leurs réflexions successives aux limites (limites représentées par les lignes βB , γC).

(¹) Pour abréger le discours, nous ne distinguons pas entre le problème II et le problème équivalent de M. Picard, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure; ni, de même, entre le problème de Cauchy et la détermination de l'inconnue par ses valeurs sur deux caractéristiques (DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, n° 359), tous deux justiciables de la méthode de Riemann. De même encore, dans le problème actuel (problème III), l'arc $\beta\gamma$ peut se réduire à un segment de caractéristique sur lequel z seul sera donné.

3. Nous présenterons ce calcul sous une forme différente, en partant, non des extrémités β et γ , mais du point quelconque O où nous nous proposons de calculer z .

Par ce point menons les deux caractéristiques OP , OQ . En supposant (comme il est représenté sur les figures 1 et 2) :

Fig. 2.



1° Que $\frac{dy}{dx}$ est, comme nous l'avons déjà admis, toujours positif sur βB ou sur γC ;

2° Que x et y vont tous deux en croissant de β en B et aussi de γ en C ;

3° Que le point β a une abscisse plus petite et une ordonnée plus grande que le point γ , ces deux caractéristiques devront être menées, l'une OP parallèlement à l'axe des x et dans le sens des x décroissants, l'autre OQ parallèlement à l'axe des y et dans le sens des y décroissants : la première jusqu'en son point d'intersection P avec βB , la seconde jusqu'en son point d'intersection Q avec γC .

De même, par le point P menons la caractéristique PP_1 parallèle à OQ jusqu'à sa rencontre en P_1 avec γC , et la caractéristique QQ_1 parallèle à OP , jusqu'à sa rencontre en Q_1 avec βB , le point d'intersection de PP_1 , QQ_1 étant désigné par O_1 . Par les points P_1 , Q_1 , nous mènerons les caractéristiques P_1P_2 , Q_1Q_2 , qui se coupent en O_2 et rencontrent en P_2 , Q_2 les arcs βB , γC , etc.

Nous considérerons alors :

1° La fonction u de Riemann relative au point O (solution de

l'équation donnée par rapport au point O et de l'équation adjointe, par rapport à un second point M);

2° La fonction u_1 , également solution de l'équation adjointe qui est nulle sur βP et égale, sur PP_1 , à $u - u_p e^{\int_P^M a dy}$.

Cette double condition définit u_1 dans l'espace compris entre l'arc βP , la droite PP_1 et la parallèle $\beta\beta'$ à PP_1 menée par le point β .

3° La fonction v_1 , solution de l'équation adjointe, qui est nulle sur γQ et égale à $u - u_q e^{\int_Q^M b dx}$ sur QQ_1 .

Cette double condition la définit dans l'espace compris entre γQ , QQ_1 et la parallèle $\gamma\gamma'$ à QQ_1 menée par γ .

4° La fonction $w_1 = u_1 + v_1 - u$.

Puis, de même, les fonctions u_2, v_2 qui se déduisent de w_1 à l'aide des droites $P_1 P_2, Q_1 Q_2$, comme u_1, v_1 se déduisent de u à l'aide des droites PP_1, QQ_1 (ce qui définit u_2 dans l'aire comprise entre $\gamma'\gamma, \gamma P_1$ et $P_1 P_2, v_2$ dans l'aire comprise entre $\beta'\beta, \beta Q_1$ et $Q_1 Q_2$), et la fonction $w_2 = u_2 + v_2 - w_1$.

Les fonctions u_3, v_3 se déduiront de u_2 comme u_2, v_2 de w_1 (à l'aide des caractéristiques $P_2 P_3, Q_2 Q_3$) et l'on aura

$$w_3 = u_3 + v_3 - w_2,$$

et ainsi de suite.

Enfin notre fonction U sera égale à u dans le rectangle OPO₁Q, à u_1 dans le triangle mixtiligne PO₁Q₁, à v_1 dans le triangle QO₁P₁, à w_1 dans le rectangle O₁P₁O₂Q₁, à u_2 dans le triangle P₁O₂Q₂, à v_2 dans le triangle Q₁O₂P₂, etc.

On voit que U s'annule sur les deux lignes $\beta B, \gamma C$ et que, d'autre part, il est discontinu sur chacune des lignes $P_i P_{i+1}, Q_i Q_{i+1}$, la discontinuité étant proportionnelle à $e^{\int b dx}$ pour celles

qui sont parallèles à l'axe des x , et à $e^{\int a dy}$ pour celles qui sont parallèles à l'axe des y . La valeur de cette discontinuité ne subit d'ailleurs aucune variation brusque lorsque la ligne correspondante est traversée (en un point O_{i+1}) par une autre de système opposé.

On voit aussi que les fonctions u_{2i+1}, v_{2i} s'annulent sur βB , les fonctions u_{2i}, v_{2i+1} sur γC .

4. Posons

$$(3) \quad u_i - w_{i-1} = (-1)^{i+1} \varphi_i,$$

la fonction w_0 , qui intervient dans la définition de φ_1 , étant prise égale à u .

Si, dans la relation que nous venons d'écrire, nous remplaçons w_{i-1} par sa valeur, elle devient

$$(-1)^{i+1} \varphi_i = u_i - u_{i-1} - v_{i-1} + w_{i-2} = u_i - v_{i-1} - (-1)^i \varphi_{i-1},$$

et, comme u_i et v_{i-1} sont tous deux nuls sur un même arc de βB ou de γC (suivant la parité de i), on a, sur cet arc,

$$(4) \quad \varphi_i = \varphi_{i-1},$$

pendant que, sur la caractéristique $P_{i-1} P_i$, φ_i est proportionnel à $e^{\int b dx}$ ou à $e^{\int a dy}$, le facteur de proportionnalité étant tel que la relation (4) soit vérifiée au point P_{i-1} .

De même, en posant

$$(3') \quad v_i - w_{i-1} = (-1)^{i+1} \psi_i,$$

on aura, sur un arc de βB ou de γC ,

$$(4') \quad \psi_i = \psi_{i-1},$$

pendant que, sur $Q_{i-1} Q_i$, ψ_i sera égal à une exponentielle de la forme précédemment indiquée ayant la valeur ψ_{i-1} au point Q_{i-1} .

Ces conditions définissent les fonctions φ_i *indépendamment* des ψ_i , et inversement.

Comme on a, d'autre part, en vertu de la définition de w_i ,

$$(-1)^{i+1} \varphi_i = u_i - w_{i-1} = w_i - v_i,$$

la différence $w_i - w_{i-1}$ est égale à $(-1)^{i+1} (\varphi_i + \psi_i)$, de sorte qu'on a

$$(5) \quad \begin{cases} w_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_i, \\ u_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_{i-1}, \\ v_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_{i-1} \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_i, \end{cases}$$

en un mot

$$(6) \quad U(M, O) = U = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_k,$$

où i et k (qui diffèrent entre eux au plus d'une unité) sont respectivement les nombres de lignes $P_{h-1} P_h$ et $Q_{h-1} Q_h$ qu'il faut traverser pour aller de O en M .

On peut encore écrire

$$(7) \quad U = u + \Phi + \Psi,$$

où

$$(8) \quad \begin{cases} \Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i, \\ \Psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots \pm \psi_k. \end{cases}$$

5. La fonction U ainsi définie est celle qui donne la solution du problème précédemment posé. Il suffit d'appliquer à cette fonction et à la fonction z la formule fondamentale dans l'aire $OP\beta\gamma QO$.

L'arc $\beta\gamma$ coupe toujours deux (exactement) des lignes $P_i P_{i+1}$, $Q_i Q_{i+1}$: soient I son point d'intersection avec un arc $P_i P_{i+1}$, K son point d'intersection avec un arc $Q_k Q_{k+1}$ (k étant égal à $i-1$, à i ou à $i+1$); on aura

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \sum_{h=0}^i (\omega_h z)_{P_h} + \sum_{h=0}^k (\omega_h z)_{Q_h} + \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_I \\ &+ \frac{1}{2} (-1)^k (\psi_{k+1} z)_K + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{dv} ds - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{dv} ds \\ &+ \int_{\beta}^{\gamma} \left[\frac{1}{2} \left(U \frac{dz}{dv} - z \frac{dU}{dv} \right) ds + U z (b dx - a dy) \right], \end{aligned} \right.$$

où s désigne, comme dans l'article : *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, l'arc de contour et v la conormale à ce contour, définie comme dans l'article en question (1).

5 bis. En substituant à l'arc $\beta\gamma$, comme limite de l'aire d'inté-

(1) Cette formule est relative à la disposition de figure admise dans le texte, c'est-à-dire suppose que OP est parallèle à l'axe des x et OQ à l'axe des y . Dans le cas contraire, il faudrait changer les signes des termes intégraux.

gration, deux caractéristiques menées (dans le sens des x et des y croissants, cette fois) par un second point O' , on reconnaîtra, absolument comme nous l'avons fait pour le problème II, dans l'article cité ⁽¹⁾, que notre fonction U ne change pas quand on permute les deux points dont elle dépend, en même temps que l'équation donnée avec son adjointe.

U , considéré comme fonction du point O , satisfait donc à l'équation donnée. Il a la forme u_i, v_i ou w_i suivant que, considéré comme fonction de O' , il avait la forme v_i, u_i ou w_i .

6. La situation de l'arc $\beta\gamma$ par rapport aux lignes de discontinuité de U est, de même, liée très simplement à la position du point O dans l'une ou l'autre des régions énumérées au n° 2. Les deux caractéristiques $P_i P_{i+1}, Q_k Q_{k+1}$, rencontrées par $\beta\gamma$ sont parallèles entre elles si O est dans une des régions latérales, perpendiculaires s'il est dans une des régions médianes.

Dans ce dernier cas, il est vrai (où $k = i$), deux dispositions sont possibles; l'arc $\beta\gamma$ pouvant laisser le point O_{i+1} en deçà (c'est-à-dire du même côté que O) ou au delà; et cette disposition dépend d'autre chose que des régions précédemment énumérées. Il pourrait sembler, au premier abord, qu'elle intervient d'une façon essentielle dans la solution, si l'on se bornait à définir U comme nous l'avons fait au n° 3. Les résultats du n° 4 et la formule (9) montrent qu'il n'en est rien, les termes introduits respectivement par les deux séries de discontinuités étant totalement indépendants les uns des autres.

7. De la solution qui vient d'être développée on passe très simplement à celle du problème de M. Goursat pour la figure formée par les deux arcs AB, AC , situés dans un même angle formé par les caractéristiques issues de A . Il suffit de supposer que l'on prenne sur AB, AC respectivement deux points β, γ , qu'on les joigne par un chemin quelconque (incliné, par rapport aux caractéristiques, comme nous l'avons supposé dans ce qui précède), puis que cet arc $\beta\gamma$ devienne infiniment petit, ses deux extrémités tendant simultanément vers le point A . Dans ces conditions, les

⁽¹⁾ Sur un problème mixte aux dérivées partielles, n° 5.

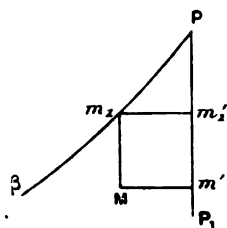
points P_i , Q_i seront évidemment en nombre infini ainsi que les fonctions φ_i , ψ_i et les sommes qui figurent dans la formule (9) seront transformées en séries.

8. Il reste à savoir comment les fonctions U , φ_i , ψ_i se comporteront à la limite. Nous remonterons, pour cela, à la formation de ces fonctions par la méthode d'approximation employée par M. Picard pour résoudre le problème dont nous avons parlé plus haut.

En appelant PP_1 et $P\beta$ deux lignes, l'une caractéristique, l'autre quelconque (¹), se coupant à angle aigu, et sur lesquelles on donne les valeurs de l'inconnue z (concordantes en P), cette méthode consiste, on le sait, à déterminer tout d'abord, par ces données aux limites, une solution z_0 de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, c'est-à-dire une quantité de la forme $X + Y$ (où X ne dépend que de x et Y de y).

Supposons, comme nous l'avons fait, que PP_1 soit parallèle à l'axe des y : alors Y sera la valeur donnée z au point m' , projection du point considéré $M(x, y)$ sur PP_1 . Quant à X , on l'obtiendra en menant par M une parallèle à PP_1 , jusqu'à rencontre en m_1 (*fig. 3*) avec $P\beta$, et projetant à son tour le point m_1 en m'_1

Fig. 3.



sur PP_1 . X est alors la différence (nulle en P) des valeurs de z en m_1 et m'_1 .

(¹) M. Picard prend, pour équation de $P\beta$, $y = x$. La méthode est la même pour le cas de $P\beta$ quelconque, les deux cas se déduisant d'ailleurs l'un de l'autre par un changement de variable évident opéré sur x ou sur y .

z_0 étant ainsi défini, on aura

$$(10) \quad \begin{cases} z_1 = - \int \int \left(a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 \right) dx dy, \\ z_2 = - \int \int \left(a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1 \right) dx dy, \\ \dots\dots\dots \\ z_k = - \int \int \left(a \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{k-1}}{\partial y} + c z_{k-1} \right) dx dy, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

les intégrales doubles étant étendues au rectangle $Mm, m'm'$; puis

$$(11) \quad z = z_0 + z_1 + \dots + z_k + \dots$$

L'intégrale double

$$I = \int \int f dx dy,$$

étendue au rectangle $Mm, m'm'$, considérée comme fonction des coordonnées x, y du point M , a les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial y} &= - \int_{m'}^{m''} f dx, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= - \int_{m_1}^{m_1'} f dy + p \int_{m_1}^{m_1'} f dx, \end{aligned}$$

en désignant par p le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à la ligne $P\beta$ au point m_1 .

Nous supposons que ce coefficient p est inférieur en valeur absolue à un nombre fixe K ⁽¹⁾. Cette condition est vérifiée pour nos deux lignes AB et AC si, ayant une courbure déterminée, elles ne sont tangentes en A à aucune des caractéristiques issues de ce point. Nous ferons donc, dans ce qui suit, cette hypothèse restrictive.

Soient, dans ces conditions, M le maximum du module de z_0 ; M_1 celui de la dérivée X' ; M_2 celui de la dérivée Y' ; H celui des coefficients de l'équation; $\xi = Mm'$ et $\eta = Mm_1$, les deux dimen-

(1) Le calcul actuel subsiste donc pour le cas où la ligne $P\beta$ est normale à PP_1 , mais non pour celui où elle lui est tangente.

sions du rectangle d'intégration, dans les formules (10). On aura

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| &< \xi H(M + M_1 + M_2), \\ \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| &< (\rho \xi + \eta) H(M + M_1 + M_2), \\ |z_1| &< \left(\rho \frac{\xi^2}{2} + \xi \eta \right) H(M + M_1 + M_2). \end{aligned}$$

Cette dernière valeur est d'ailleurs, avec la précédente, dans un rapport que l'on peut limiter *a priori*, connaissant des limites supérieures de ξ et de η , et qui est même aussi petit qu'on le veut si ces limites sont suffisamment petites. On peut donc en faire abstraction pour majorer l'expression $a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1$, sous condition d'augmenter convenablement H.

De la limitation ainsi obtenue pour $a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1$, on déduit par intégration de 0 à ξ par rapport à ξ , ou de 0 à η par rapport à η , des limites supérieures pour z_2 et ses dérivées premières; en poursuivant ce calcul, on voit sans difficulté que z_p et ses dérivées sont inférieurs à la quantité

$$(M + M_1 + M_2) \frac{H_1^k (\xi + \eta)^k}{k!},$$

H_1 ne dépendant que des coefficients de l'équation et de la quantité désignée précédemment par K (autrement dit, de la forme de la ligne $P\beta$).

$z - z_0$ et ses dérivées premières sont donc inférieurs à $(M + M_1 + M_2)[e^{H_1(\xi + \eta)} - 1]$, ou (du moment qu'on a limité ξ et η) à

$$(12) \quad H_2(M + M_1 + M_2)(\xi + \eta),$$

H_2 ne dépendant que des coefficients de l'équation, de la quantité K et des limites supérieures de ξ , η .

9. Nous ne nous servirons toutefois de cette première évaluation que pour l'appliquer à la fonction U qui figure dans l'article cité : *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (autrement dit à celle que nous appelons u , ou v , dans notre nota-

tion actuelle). Cette fonction étant définie par ses valeurs sur l'arc de courbe et celles qu'elle prend sur un segment de caractéristique (valeurs dont les premières sont nulles et les secondes immédiatement liées à la fonction de Riemann), nous voyons, par ce qui précède, que l'on connaît des limites supérieures de U et de ses dérivées premières par rapport aux coordonnées du point M , si l'on a limité les coordonnées des deux points et le coefficient angulaire de la tangente à la ligne $P\beta$. Des calculs tout semblables étendraient cette conclusion aux dérivées d'ordre supérieur.

D'autre part, nous verrons plus loin qu'elle subsiste également lorsqu'on différencie, non seulement par rapport aux coordonnées du point M , mais aussi par rapport à celles du point O .

Ces résultats relatifs à la fonction U nous permettent d'assigner, à la fonction z que nous avons considérée au numéro précédent, une limite supérieure plus avantageuse que la première. Il suffit pour cela partir de la formule ⁽¹⁾

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} z_M &= (uz)_{m_1} + (uz)_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'_1} b dx} z_{m'_1} \\ &\quad - \int_P^{m'} z \left(\frac{\partial U}{\partial y} - aU \right) dy - \int_P^{m_1} \frac{1}{2} z \frac{dU}{dv} ds, \end{aligned} \right.$$

qui peut s'écrire

$$(13') \quad \left\{ \begin{aligned} z_M &= (uz)_{m_1} + u_{m'}(z_{m'} - z_{m'_1}) + z_{m'_1} \left(u_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'_1} b dx} \right) \\ &\quad - \int_P^{m'} z \left(\frac{\partial U}{\partial y} - aU \right) dy - \int_P^{m_1} \frac{1}{2} z \frac{dU}{dv} ds. \end{aligned} \right.$$

Les quantités $u_{m_1} - 1$, $u_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'_1} b dx}$, $\frac{\partial U}{\partial y} - aU$, $\frac{dU}{dv}$ ont toutes des limites supérieures de la forme $H_3 \eta$ (où H_3 est limité de la même façon que H_1 et H_2). Cela résulte, pour les deux premières, de la forme de la fonction de Riemann; pour les deux dernières (moyennant les limitations obtenues au numéro précédent) de ce que les valeurs ⁽²⁾ de U sont nulles sur Pm , et proportionnelles à η

⁽¹⁾ Sur un problème mixte aux dérivées partielles, n° 4.

⁽²⁾ *Ibid.*, n° 2.

sur m, m' . Si l'on remarque que $z_{m'} - z_m$ est le produit de η par une valeur de $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur PP_1 , on peut écrire

$$(14) \quad |z_M - z_{m_1}| < H_4 \eta (|z_{m_1}| + M)$$

ou

$$(14') \quad |z_M| < (1 + H_4 \eta) |z_{m_1}| + H_4 \eta M,$$

H_4 étant une quantité analogue à H_1, H_2, H_3 ; M , une limite supérieure des modules de z et de sa dérivée sur PP_1 ; m_2, m_3 , des points de l'arc Pm_1 .

La formule (13) fournit également des limites supérieures des dérivées de z , savoir :

Pour $\frac{\partial z}{\partial y}$, une combinaison linéaire à coefficients finis de M et du maximum de $|z|$ sur Pm_1 ;

Pour $\frac{\partial z}{\partial x}$, une combinaison des mêmes quantités et de la dérivée $\frac{dz}{dx}$ prise en m_1 suivant la courbe Pm_1 . On a

$$(15) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz_{m_1}}{dx} e^{\int_{m_1}^M a dy} + H_5 z_{m_1} + H_6 M,$$

où la dérivée $\frac{dz_{m_1}}{dx}$ est prise le long de la ligne Pm_1 , m_3 étant un point de cette ligne; H_5, H_6 des nombres finis.

10. Cela posé, revenons aux fonctions φ_i et ψ_i . Nous pouvons en indiquer immédiatement les valeurs sur les lignes de discontinuité correspondantes. On a, évidemment, sur une ligne $P_i P_{i+1}$,

$$(16) \quad \varphi_i = -e^{\int_0^{P_i} b dx + \int_{P_i}^{P_{i+1}} a dy + \int_{P_{i+1}}^{P_i} b dx + \dots}$$

Il est clair que la série des intégrales est absolument convergente si les coefficients restent finis. Donc les valeurs considérées des φ_i tendent vers une limite λ différente de zéro, et même la série $\sum [\varphi_{i+1}(P_{i+1}) - \varphi_i(P_i)]$ converge absolument.

Ceci nous permet, tout d'abord, de voir ce que devient, lorsque i

augmente indéfiniment, la somme

$$\sum_0^i (w_h z)_{p_h}$$

qui figure dans la formule (9) et peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes

$$(17) \quad \sum_0^i (-1)^{h+1} (\varphi_h z)_{p_h} = \sum_0^i (-1)^{h+1} (\varphi_{h+1} z)_{p_h}.$$

Pour $i = \infty$, on a une série, laquelle est divergente, puisque le terme général ne tend pas vers zéro. Mais, en groupant les termes deux à deux, on obtient au contraire les deux séries

$$(18) \quad -[(z\varphi_0)_p - (z\varphi_1)_{p_1}] - [(z\varphi_2)_{p_2} - (z\varphi_3)_{p_3}] - \dots,$$

$$(18') \quad - (z\varphi_0)_p + [(z\varphi_1)_{p_1} - (z\varphi_2)_{p_2}] + [(z\varphi_3)_{p_3} - (z\varphi_4)_{p_4}]$$

qui sont toutes deux convergentes. Du moins, il en est ainsi si les valeurs de z sur chacun des deux arcs donnés tendent, lorsqu'on s'approche du sommet de l'angle, vers une même limite z_A , et cela de manière que la série $\sum (z_{p_{i+1}} - z_{p_i})$ soit absolument convergente.

Dans ces conditions, en un mot, la série (17) a deux sommes, suivant qu'on s'arrête à un terme de rang pair ou à un terme de rang impair.

La différence de ces deux sommes étant λz_A , la quantité

$$(19) \quad \sum_0^i (w_h z)_{p_h} + \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_1$$

qui figure dans la formule (9), tend vers une limite parfaitement déterminée, à savoir la moyenne des deux sommes en question (1). Cette limite [somme généralisée de la série (17) au sens de Leibniz-Borel] sera désignée par S.

(1) Nous admettons ici, comme nous serons conduits à le faire plus loin, que les valeurs de z tendent vers z_A lorsqu'on s'approche de A d'une manière quelconque à l'intérieur de l'angle BAC.

De même les quantités $\psi_i(Q_i)$ tendront vers une limite ⁽¹⁾ μ , et la quantité

$$\sum_0^k (\omega_h, z)_{Q_h} + \frac{1}{2} (-1)^k (\psi_{k+1}, z)_K,$$

vers une limite S' .

11. Les valeurs (16) d'une fonction quelconque φ_i jouent, dans sa détermination, le rôle de la fonction que nous appelions tout à l'heure Y : il est donc certain que cette fonction et sa dérivée ont une limite supérieure indépendante de i .

Nous allons montrer que les valeurs des $|\varphi_i|$ (mais non, cette fois, de leurs dérivées) sur les arcs AP, AQ, et, par conséquent, aussi dans toute la région qui nous intéresse, sont aussi inférieures à un nombre fixe.

Appelons, pour abrégé, *conséquent* d'un point de l'arc AB, le point de l'arc AC qui a même abscisse, et *conséquent* d'un point de l'arc AC, le point de AB qui a même ordonnée, le premier point étant, dans l'un et l'autre cas, appelé *l'antécédent du second*. L'antécédent et le conséquent occupent, l'un par rapport à l'autre, la situation des points m_i et M , considérés au n° 9; c'est, en particulier, l'antécédent de M qui joue le rôle du point m_i lorsqu'on calcule une fonction φ_i en M à l'aide des fonctions précédentes par la formule (13). Le segment désigné, au n° 9, par γ est parallèle tantôt à l'axe des x (si le point M est sur AB), tantôt à l'axe des y (si M est sur AC).

Cela posé, la valeur d'une fonction φ_{2i} (par exemple) en un point M de l'arc AP est liée, par l'inégalité (14'), à la valeur de cette même fonction, ou, ce qui revient au même, de φ_{2i-1} en un point m_2 de AQ plus éloigné de A que l'antécédent de M . Cette dernière valeur est liée d'une manière analogue à la valeur de φ_{2i-2} en un point de AP plus éloigné de A que l'antécédent de m_2 , le

(1) Cette limite est égale à la précédente lorsque l'équation est à invariants égaux. Alors, en effet, $b dx + a dy$ est une différentielle exacte, et l'on a

$$\lambda = \mu = -e^{\int_0^{\lambda} b dx + a dy}.$$

nouveau segment η étant, cette fois, celui qui joint m_2 à son antécédent, et ainsi de suite.

Il est clair que les différents segments η forment une série convergente, dont la somme est toujours inférieure à la somme σ des deux coordonnées du point O, rapportées aux axes $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Il en résulte sans difficulté ⁽¹⁾ que les φ_i sont finis, comme nous l'avions annoncé.

12. On peut même aller plus loin. Considérons les conséquents successifs d'un point quelconque M_0 de AB ou de AC et la valeur que prend, au $i^{\text{ème}}$ de ces conséquents, la fonction φ_i . On a ainsi, en faisant varier i , une série de quantités qui tendent vers une limite l . C'est ce qu'on voit immédiatement en partant non plus de l'inégalité (14'), mais de l'inégalité (14), le second membre de cette inégalité étant le terme général d'une série convergente. La différence entre l et le terme initial $\varphi_0(M_0)$ est au plus de l'ordre de la somme de cette série, c'est-à-dire de $2H_1\pi\sigma_0$, π étant le maximum des $|\varphi_i|$ et σ_0 la somme des deux coordonnées de M_0 .

Mais, quoique les conséquents successifs tendent toujours vers le point A, la limite l est variable avec le point M_0 . En effet, lorsque M_0 coïncide avec P, l est donné par la formule (16); et, d'autre part, lorsque M_0 tend vers A, l tend vers $-u_A$ [puisque'il en est ainsi pour $\varphi_0(M_0)$ et que σ_0 tend vers zéro]. Or ces deux valeurs de l sont évidemment différentes en général.

13. Passons aux dérivées premières des φ_i . Ces dérivées sont de deux sortes. Nous appellerons *dérivées parallèles* les dérivées des φ_{2i} par rapport à x , ou des φ_{2i+1} par rapport à y , qui jouent le rôle de ce qui était, au n° 9, une dérivée par rapport à y ; *dérivées perpendiculaires*, les dérivées des φ_{2i} par rapport à y , ou des φ_{2i+1} par rapport à x .

Les dérivées parallèles restent finies, en vertu de l'évaluation obtenue au n° 9 pour $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(1) En effet, soit Π_i le produit des i premières valeurs de $1 + H_1\eta$. Ce produit est toujours inférieur à $e^{H_1\sigma}$. Il en résulte [en divisant l'inégalité (14') par Π_i] que φ_i est inférieur à

$$\pi < e^{H_1\sigma} \left(1 + H_1 M \sum_{n=1}^i \frac{\eta_n}{n} \right) < e^{H_1\sigma} (1 + H_1 M \sigma).$$

Il ne saurait évidemment en être de même pour les dérivées perpendiculaires, d'après ce que nous venons de trouver au n° 12.

On peut, d'ailleurs, vérifier directement que ces dérivées augmentent indéfiniment. Partons, par exemple, de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$, en supposant que AB et AC soient deux droites, de coefficients angulaires $\alpha > 1$ et $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$. Les φ_i successifs sont tous égaux à 1 sur les segments correspondants de la ligne brisée OPP₁P₂..., et leurs dérivées parallèles sont nulles dans les mêmes conditions. Soient p_0, q_1 les dérivées perpendiculaires $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ au point P; p_1, q_2 les dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$ au point P₁; etc. On a

$$\begin{aligned} p_0 &= \overline{OP}, \\ q_1 &= \alpha p_0, \\ p_1 &= \alpha p_0 + \overline{PP_1}, \\ p_2 &= \alpha p_1 + \overline{P_1P_2}, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

en général :

$$p_{i+1} - \alpha p_i = \overline{P_i P_{i+1}} = \frac{\overline{PP_1}}{\alpha^i},$$

d'où

$$p_i = k \alpha^i - \frac{k'}{\alpha^i}$$

avec

$$k' = \frac{\alpha \cdot \overline{PP_1}}{\alpha^2 - 1}, \quad k = k' + \overline{OP}.$$

p_i croît donc indéfiniment comme α^i .

Nous pouvons, par contre, limiter la croissance de ces dérivées perpendiculaires à l'aide de l'inégalité (15) (n° 9). Supposons que les deux lignes données AB et AC ne soient pas tangentes entre elles, de sorte que leurs coefficients angulaires soient α et $\alpha' < \alpha$. L'inégalité en question montre (1) que le maximum de la dérivée perpendiculaire de φ_i croît au plus comme $\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\right)^i$.

(1) Le nombre par lequel il faut multiplier la dérivée perpendiculaire de φ_i en un point pour obtenir [abstraction faite d'un terme additif provenant des termes $H_i, z_{m_i} + H_i M$ qui figurent dans la formule (15)] celle de φ_{i+1} au deuxième con-

Des évaluations ainsi faites sur les φ_i résultent celles qui concernent U, savoir :

1° U croît au plus comme l'indice i ;

Puis, en supposant toujours que nos deux lignes ont des tangentes distinctes :

2° Les dérivées premières de U croissent au plus comme $\left(\sqrt{\frac{x}{x'}}\right)^i$.

Considérons un segment de caractéristique tracé entre AB et AC. S'il est compris dans la région d'existence de φ_i , sa longueur est au plus de l'ordre de $\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{i}{2}}$. Donc la variation totale (JORDAN, *Cours d'Analyse*) de U le long de ce segment est finie.

14. Dans ces conditions, nous sommes en mesure de passer à la limite dans la formule (9). Nous prendrons à cet effet, pour $\beta\gamma$, un segment de caractéristique, de sorte que l'intégrale suivant $\beta\gamma$ peut s'écrire (')

$$(20) \quad \int_{\beta}^{\gamma} U z (b dx - a dy) \pm \frac{1}{2} (U dz - z dU),$$

le signe + devant être pris si $\beta\gamma$ est parallèle à l'axe x , le signe — dans le cas contraire. Le terme $\pm \frac{1}{2} U dz$ sera intégré par parties, ce qui donnera un terme tout intégré

$$(21) \quad \pm \frac{1}{2} \int d(Uz) = \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_l + \frac{1}{2} (-1)^k (\varphi_{k+1} z)_K$$

séquent de ce point peut être un peu plus grand que $\frac{\alpha'}{\alpha}$ en raison : 1° du facteur exponentiel $e^{f' \alpha' dy}$; 2° de la courbure des lignes données. Mais il est aisé de voir que les facteurs supplémentaires qu'il serait nécessaire d'introduire pour tenir compte de cette circonstance donnent un produit convergent, si AB et AC ont une courbure finie, et même si ces lignes ont en A une singularité algébrique. Il suffit même (on s'en convainc aisément), pour que le produit du maximum de la dérivée perpendiculaire de φ_i par le segment $P_i P_{i+1}$ reste fini, que la courbure de chacune des lignes AB, AC garde un sens invariable au voisinage de A; plus généralement, encore, que le coefficient angulaire de la tangente soit à variation bornée.

(') La conormale v est définie, rappelons-le, par les relations

$$\frac{dx}{dv} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{dy}{ds}.$$

(puisque U est nul aux extrémités), terme qui viendrait doubler le terme semblable de la formule (9), et un terme intégral

$$(21') \quad \int_{\beta}^{\gamma} U z (b dx - a dy) \mp z dU.$$

Nous imposerons à la fonction inconnue z la condition d'être parfaitement continue au voisinage de A , de sorte que $z = z_A + \varepsilon$, ou ε est infiniment petit. Alors dans l'intégrale (21'), la partie provenant de ε tend vers zéro, puisque la variation totale de U est finie. Le reste de l'intégrale se réduit à $\mp z_A \int_{\beta}^{\gamma} du$. Il change donc le signe des termes (21). (Tout se passe, en somme, comme si nous avions intégré par parties, non le terme $U dz$, mais le terme $z dU$, sauf que le détour employé nous dispense de faire des hypothèses sur l'ordre de grandeur des dérivées de z .)

On voit donc que, si l'équation (1) admet une solution z satisfaisant aux conditions aux limites données et continue en A , cette solution est forcément donnée par la formule

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 = \lim_{i,k \rightarrow \infty} & \left\{ \sum_{h=0}^i (-1)^{h+1} (\varphi_h z)_{p_h} \right. \\ & \left. + \sum_{h'=0}^k (-1)^{h'+1} (\psi_{h'} z)_{q_{h'}} + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{dv} ds - \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{dv} ds \right\}, \end{aligned} \right.$$

les termes $(-1)^i (\varphi_{i+1} z)_1 + (-1)^k (\psi_{k+1} z)_k$ ayant disparu comme nous venons de le voir.

15. Il y a lieu de se demander si la restriction que nous venons d'imposer à z n'est pas purement artificielle. Il n'en est rien : cette restriction (ou, du moins, une restriction de cette espèce) est imposée par la nature des choses. On pourrait rechercher des fonctions z satisfaisant à notre équation et tendant (quoique non uniformément au voisinage de A) vers les valeurs données lorsqu'on s'approcherait d'un point quelconque de AB ou de AC ; mais le problème ainsi posé est tout à fait indéterminé.

Il suffit en effet, pour obtenir une telle solution z , de la déterminer par les valeurs données sur AB , AC et par des données de Cauchy arbitraires sur une ligne BC reliant les arcs donnés : c'est

le problème posé au n° 2 et résolu aux n°s 2-6, l'arc BC jouant, cette fois, le rôle de $\beta\gamma$.

On peut, d'ailleurs, imposer à z la condition d'être continu (ailleurs qu'en A) ainsi que ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé quelconque, pourvu que des conditions de continuité correspondantes (supposées vérifiées sur AB et sur AC) soient aussi imposées en B, en C et le long de l'arc BC.

16. Si le second membre de la formule (22) ne tend pas vers une limite déterminée, le problème est impossible.

Nous allons voir que la limite existera si les maxima de $|z - z_A|$ sur les arcs $P_i Q_{i+1}$, $Q_i P_{i+1}$, forment deux séries convergentes. C'est ce qui arrivera, en particulier (puisque, dans nos hypothèses, les segments AP_i , AQ_i décroissent en progression géométrique) si les valeurs données vérifient la condition de Lipschitz ou même la condition moins restrictive

$$(23) \quad |z_M - z_A| < \overline{AM}^\rho \quad (\rho > 0).$$

Pour établir la conclusion que nous venons d'énoncer, nous aurons à étudier les intégrales

$$\int_\beta^P z \frac{dU}{dv} ds, \quad \int_\gamma^Q z \frac{dU}{dv} ds.$$

U étant donné par la relation (7), nous pouvons, par exemple, nous borner à l'étude de

$$\int_\beta^P \frac{d\Phi}{dv} ds.$$

Posons

$$\Phi = \Phi' - \Phi'',$$

Φ' désignant [dans le second membre de la première formule (8)] la somme des termes pris avec le signe + (c'est-à-dire d'indice impair) et Φ'' , la somme des termes pris avec le signe —. On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi'}{dv} ds &= \frac{\partial\Phi'}{\partial x} dx - \frac{\partial\Phi'}{\partial y} dy = d\Phi' - 2 \frac{\partial\Phi'}{\partial y} dy, \\ \frac{d\Phi''}{dv} ds &= -d\Phi'' + 2 \frac{\partial\Phi''}{\partial x} dx, \end{aligned}$$

la transformation étant, chaque fois, dirigée de manière à faire

apparaître, au second terme, une dérivée parallèle. Les dérivées de cette espèce croissant, pour Φ' et pour Φ'' , au plus comme i , les intégrales correspondantes sont évidemment finies. Dans l'intégrale

$$\int_{\beta}^{\alpha} z d \frac{\Phi' + \Phi''}{2},$$

nous remplacerons z par $(z - z_A) + z_A$, et la partie correspondant à $z - z_A$ sera finie (puisque la variation totale de $\frac{\Phi' + \Phi''}{2}$ sur chacun des arcs $P_i Q_{i+1}$, $Q_i P_{i+1}$ est finie) moyennant l'hypothèse faite il y a un instant. Si l'on tient compte des termes analogues en $\frac{d\Psi}{d\gamma}$ et de ceux qui sont relatifs à l'arc AC, — en remarquant que, la fonction $\frac{\Phi' + \Phi''}{2}$, par exemple, s'augmente de φ_i chaque fois qu'on traverse (en se dirigeant vers A) un point P_i , — la formule (22) s'écrira

$$(22') \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \sum_0^{\infty} (-1)^{h+1} [\varphi_h (z - z_A)]_{P_h} + \sum_0^{\infty} (-1)^{h+1} [\psi_h (z - z_A)]_{Q_h} \\ &+ \int_{QAP} z \left[\frac{1}{2} \frac{du}{d\gamma} ds - \frac{\partial(\Phi' - \Psi'')}{\partial x} dx - \frac{\partial(\Phi'' - \Psi')}{\partial y} dy \right] \\ &+ \int_{QAP} (z - z_A) d \frac{\Phi' + \Phi'' - \Psi' - \Psi''}{2}, \end{aligned} \right.$$

formule dont tous les termes ont un sens.

17. Nous avons ainsi établi l'unicité de la solution et la convergence de l'expression (22), moyennant les hypothèses suivantes : 1° aucune des lignes AB, AC n'est tangente à une caractéristique; 2° ces lignes ont, en A, des tangentes distinctes; 3° la variation totale du coefficient angulaire de la tangente sur chacune d'elles est finie (n° 13, note); 4° la valeur de z sur chacune d'elles satisfait à l'inégalité (23).

Il y aurait, sans doute, lieu d'examiner ce qui se passerait si l'on renonçait à quelques-unes de ces conditions, qui ne sont probablement pas toutes nécessaires, surtout la première. Je laisserai toutefois cette question de côté et m'occuperai seulement d'établir que la fonction formée comme nous venons de l'indiquer remplit bien les conditions de l'énoncé.

En premier lieu, si le point O est sur AB ou AC, il est aisé de voir que tous les termes de (22) se détruisent, à l'exception d'un seul, égal à la valeur donnée en ce point.

Ceci, il est vrai, ne serait pas suffisant pour affirmer que z prend cette valeur, ceci impliquant la continuité. Nous établirons cette dernière en calculant les dérivées de z .

18. Reprenons pour cela, comme nous l'avons fait au n° 8, une fonction z , solution d'une équation de la forme (1), déterminée par ses valeurs suivant les deux lignes PP_1 , $P\beta$. Supposons que ces valeurs dépendent continûment (ainsi que les dérivées premières X' , Y') d'un paramètre t . Si les quantités M , M_1 , M_2 du n° 8 sont toujours finies, z sera une fonction continue de t . Cela est, en effet, vrai, pour chaque terme de la série (11), laquelle est uniformément convergente.

Cette conclusion reste vraie si [la courbe $P\beta$ restant fixe (1)] l'abscisse de la verticale PP_1 dépend (continûment) de t .

On déduit aisément de là que, si les données sont dérivables par rapport à t , il en est de même de z (pourvu que les M , M_1 , M_2 relatifs à $\frac{\partial z}{\partial t}$ soient finis). Si l'abscisse de PP_1 est indépendante de t , cette dérivée sera la solution de (1) qui prend, sur PP_1 et $P\beta$, les valeurs $\frac{\partial z}{\partial t}$. Si, au contraire, l'abscisse de PP_1 a, par rapport à t , une dérivée égale à τ , la dérivée de z sera la fonction qui prend, sur $P\beta$, les valeurs $\frac{\partial z}{\partial t}$ et, sur PP_1 , les valeurs

$$(24) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \tau \frac{\partial z}{\partial x},$$

dans laquelle la dérivée $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ s'obtient en prenant pour variables indépendantes t et z (x étant constamment égal à l'abscisse de PP_1).

19. Dans le cas qui nous intéresse actuellement, t désigne l'une ou l'autre des coordonnées du point O.

(1) Rien n'empêcherait, bien entendu, d'établir un théorème analogue en faisant varier la courbe. Mais ce théorème ne nous sera pas utile.

La dérivation de la valeur de z_0 introduira évidemment les dérivées de z par rapport à l'arc s du contour donné et il est manifestement nécessaire que ces dérivées existent. Nous supposons de plus que (le point M tendant vers A) elle ne croissent pas plus vite que $\frac{1}{AM^{1-\rho}}$; ce qui entraîne l'inégalité (23).

Dans ces conditions, la série

$$\sum (-1)^{h+1} \left(\varphi_h \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{P_h} = \sum (-1)^{h+1} \left(\varphi_h \frac{dz}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} \right)_{P_h}$$

sera convergente (et cela uniformément pour toute position du point O non infiniment voisine de A) parce que $\frac{\partial s}{\partial t}$ tendra vers zéro comme $\left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^{\frac{h}{2}}$, tandis que $\frac{dz}{ds}$ n'augmentera indéfiniment que comme $\left(\frac{\alpha}{\alpha'} \right)^{\frac{h}{2}(1-\rho)}$.

Les autres termes de $\frac{\partial}{\partial t}(z_0)$ ne contiennent que les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$. Or ces dernières quantités sont finies ainsi que leurs dérivées parallèles.

Sur la ligne $P_{i-1} P_i$, en effet, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ a l'expression (24), où le second terme peut être nul. $\frac{\partial z}{\partial x}$ est une dérivée perpendiculaire, qui croît comme $\left(\frac{\alpha}{\alpha'} \right)^{\frac{i}{2}}$; mais τ (s'il n'est pas nul) tend vers zéro d'une manière précisément inverse. D'ailleurs, les dérivées de cette expression (24) par rapport à γ (dérivées partielles) sont également finies, grâce à ce fait que $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial \gamma}$ s'exprime linéairement en fonction de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \gamma}$, φ_i .

D'autre part, sur BAC, les relations $\varphi_i = \varphi_{i-1}$, donnent

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial t}.$$

Donc on peut faire, sur les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, les mêmes évaluations que sur les φ_i (nos 11-13).

En un mot, les séries obtenues en différentiant la formule (22) convergent uniformément et représentent, par conséquent, les dérivées premières de z au point O.

20. D'autre part, en ce qui concerne le problème II, ou le problème posé au n° 2 du présent travail, on sait que la fonction z obtenue [formule (9) du travail actuel, ou *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, formule (4)] vérifie l'équation aux dérivées partielles. Cela résulte de ce que la possibilité des deux problèmes en question est acquise, et cela se voit d'ailleurs sans aucune difficulté en se servant de la remarque du n° 5 bis.

Comme on est ramené à notre problème du n° 2 en limitant AB, AC par le segment $\beta\gamma$, il résulte de là : 1° qu'en différentiant la formule (22) par rapport à x et à y simultanément, on obtient encore une série uniformément convergente, puisqu'elle est une combinaison linéaire de l'expression (22) et de ses dérivées par rapport à x et à y ; 2° que, par conséquent, cette série représente la dérivée, par rapport à x et à y , de la fonction z , laquelle est bien solution de l'équation (1).

21. Je terminerai par une remarque relative aux résultats exposés aux n° 3-6.

Ces résultats concernent un problème déjà résolu, comme nous l'avons expliqué, au n° 2. Mais il ne faudrait pas en conclure qu'ils ne nous apprennent rien de nouveau.

Si, en effet, les opérations indiquées au n° 2 permettent de calculer la valeur de l'inconnue dans chacune de nos régions successives I, 1, 1', II, 2, 2', ..., ce but n'est atteint que par une série d'applications de la méthode générale, c'est-à-dire *par une série de quadratures superposées*.

Au contraire, si nous avons pu calculer, une fois pour toutes, les fonctions u_i , v_i , w_i , la formule (9) donnera z par des quadratures différentes, comme cela est dans la nature de la question, pour les différents arcs que nous avons été conduits à distinguer, mais portant directement sur les données.

Or il est des cas intéressants au point de vue des applications et pour lesquels on connaît la forme des fonctions en question. Tel est, en particulier, le problème dont nous avons parlé au

n° 2, celui de la propagation de l'électricité dans un câble limité dans les deux sens.

L'équation du problème est alors

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - z = 0,$$

et donne pour u une fonction de Bessel bien connue.

Les lignes βB , γC sont alors deux droites parallèles à $x - y = 0$; l'arc $\beta\gamma$, un segment de droite parallèle à $x + y = 0$.

Nous avons établi précédemment (1) que, dans ces conditions, la fonction u , s'obtenait en retranchant de $u(M, O)$ la quantité tout analogue $u(M, \omega_1)$, où ω_1 est l'image du point O par rapport à βB . De même, on aura

$$v_1 = u(M, O) - u(M, \omega'_1)$$

en désignant par ω'_1 l'image de O par rapport à γC .

Il est aisé maintenant de voir que le calcul des fonctions suivantes n'offre pas plus de difficulté. Soient ω_2 l'image de ω_1 par rapport à γC , ω_3 l'image de ω_2 par rapport à βB , ...; soient, de même, ω'_2 l'image de ω'_1 par rapport à βB ; ω'_3 , l'image de ω'_2 par rapport à γC , ... Les fonctions

$$\varphi_h = -u(M, \omega_h), \quad \psi_h = -u(M, \omega'_h)$$

satisfont à toutes les conditions que nous avons imposées aux quantités désignées par ces notations, dans les raisonnements qui précèdent. En particulier, ces quantités φ_h , ψ_h sont égales à 1 sur les lignes de discontinuité correspondantes. *Ce sont elles qu'il faudra substituer dans les formules (6), (9), pour obtenir la solution cherchée.*

Soit, par exemple, $2l$ la longueur du câble. Adoptons les mêmes notations que dans l'article *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (n° 6 et suivants), à ceci près que nous désignerons par $-l$ et $+l$ les abscisses des extrémités de ce câble, l'abscisse ξ d'un de ses points devant ainsi être comprise entre

(1) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 8.

— l et $+l$. Si l'on veut calculer la valeur de z pour l'abscisse ξ' et à l'instant t' , on devra prendre les images successives du point (ξ', t') par rapport aux lignes $\xi = \pm l$. Toutes ces images correspondront à la même valeur t' de t ; mais leurs abscisses seront

$$\begin{aligned} \text{pour les points } \omega_{2l+1}, \quad \xi &= \xi_{2l+1} = (4l+2)l - \xi'; \\ \text{pour les points } \omega_{2l}, \quad \xi &= \xi_{2l} = -4il + \xi'; \\ \text{pour les points } \omega'_{2l+1}, \quad \xi &= \xi'_{2l+1} = -(4l+2)l - \xi'; \\ \text{pour les points } \omega'_{2l}, \quad \xi &= \xi'_{2l} = 4il + \xi'; \end{aligned}$$

après quoi, on aura [en désignant, comme dans l'article cité, par $j(X)$ la fonction $J_0(2\sqrt{-X})$, où J_0 est la fonction de Bessel, et par t, ξ les coordonnées courantes]

$$\varphi_h = -j\left\{\frac{1}{4}[(t-t')^2 - (\xi - \xi_h)^2]\right\}, \quad \psi_{h'} = -j\left\{\frac{1}{4}[(t-t')^2 - (\xi - \xi_{h'})^2]\right\}.$$

Les lignes $\beta B, \gamma C$ seront $\xi = \pm l$ et l'on aura, sur elles,

$$\frac{dU}{dv} ds = - \frac{\partial U}{\partial \xi} dt.$$

La ligne $\beta\gamma$ sera $t = 0$; on aura, sur elle,

$$\frac{d}{dv} ds = - \frac{\partial}{\partial t} d\xi.$$

Enfin, les points P_h correspondront à

$$\xi = (-1)^h l, \quad t = t' + \xi' - (2h+1)l,$$

les points $Q_{h'}$, à

$$\xi = -(-1)^{h'} l, \quad t = t' - \xi' - (2h'+1)l,$$

les entiers h, h' devant prendre toutes les valeurs positives qui donnent $t \geq 0$. a et b étant nuls, on a ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer les formules (5), (6), (9).

**SUR UNE CERTAINE CLASSE DE CUBIQUES GAUCHES
ET SUR DES SYSTÈMES ARTICULÉS QUI S'Y RATTACHENT;**

Par M. R. BRICARD.

1. J'ai signalé, dans un travail antérieur ⁽¹⁾, certaines relations entre les cubiques *focales* (cubiques planes circulaires qui contiennent leur foyer singulier) et le quadrilatère articulé. Ces résultats s'appliquent en particulier à la strophoïde, qui est une cubique focale à point double.

Je me propose d'étudier ici une classe de cubiques gauches, auxquelles je donne le nom de *cubiques strophoïdales*, parce que leurs propriétés généralisent celles de la strophoïde, qu'elles comprennent d'ailleurs comme cas particulier. Le principal intérêt de ces courbes me paraît résider dans le fait qu'on peut y rattacher divers systèmes articulés gauches : en premier lieu, *l'octaèdre aplatisable* auquel j'ai été conduit autrefois par des considérations toutes différentes ⁽²⁾ et c'est l'obtention de ces systèmes articulés qui constituera l'objet essentiel de cette Note. J'attirerai cependant l'attention sur un résultat d'un caractère analogue au théorème de Poncelet, qui se trouve énoncé au n° 7.

2. Voici la définition des *cubiques gauches strophoïdales* (ou, plus simplement, des *strophoïdales*). J'appelle ainsi une cubique gauche jouissant des propriétés suivantes :

- 1° Elle rencontre l'ombilicale en deux points i et i' ;
- 2° Sa projection orthogonale sur un plan (Π) ayant pour droite de l'infini $i i'$ a son point double à tangentes rectangulaires : cette projection, qui contient les points cycliques du plan (Π) , est donc une strophoïde ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Ce *Bulletin*, t. XXVIII, 1900, p. 39.

⁽²⁾ *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé* (*Journal de Math. pures et appl.*, 1897).

⁽³⁾ Il existe une corde unique de la strophoïdale, perpendiculaire au plan (Π) ; si les deux extrémités de cette corde viennent à se confondre, la strophoïdale se réduit à une cubique plane circulaire, ayant un point double à tangentes rectangulaires, c'est-à-dire à une strophoïde.

Une cubique gauche, pour être strophoïdale, est assujettie, on le voit, à trois conditions. La strophoïdale la plus générale dépend donc de $12 - 3 = 9$ paramètres, dont *trois* seulement sont des paramètres de grandeur, les six autres étant des paramètres de position.

3. Soient Γ une strophoïdale, et, conservant les désignations précédentes, i et i' les points où elle rencontre l'ombilicale, (Π) un plan dont la droite à l'infini est ii' . Il existe une corde unique de Γ perpendiculaire au plan (Π) . Soient α et β les extrémités de cette corde.

Les points α, β, i, i' forment une division harmonique sur la strophoïdale Γ (les deux premiers points étant conjugués).

Soient, en effet, αt et βu les tangentes à Γ , en α et β . Les plans $(\alpha\beta t)$ et $(\alpha\beta u)$ sont rectangulaires, d'après la définition même des strophoïdales. Autrement dit, les quatre plans $(\alpha\beta t)$, $(\alpha\beta u)$, $(\alpha\beta i)$, $(\alpha\beta i')$ forment un faisceau harmonique (les deux premiers plans étant conjugués); mais le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal à celui des points α, β, i, i' ; donc, etc.

La plupart des propriétés ultérieures se rattachent à l'involution définie sur Γ par cette condition que α et β sont ses points doubles. Je dirai que deux points de Γ qui se correspondent dans cette involution sont *associés*.

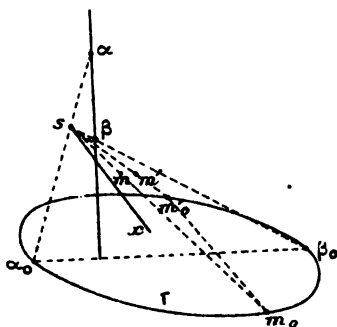
Le théorème précédent apprend que les points i et i' sont associés.

4. Considérons deux points associés variables, m et m' . La corde mm' engendre une quadrique (P) qui, ayant une génératrice ii' rejetée tout entière à l'infini, est un paraboloidé. Je dirai que les cordes mm' sont, dans ce paraboloidé, *les génératrices* (1). Les autres génératrices seront dites : *génératrices* (2); chacune de ces dernières ne rencontre Γ qu'en un seul point.

Soient alors s un point quelconque de Γ , sx la génératrice (2) de (P) qui passe en ce point. *Cette génératrice sx est un axe principal du cône (S) qui a son sommet en s et qui a pour directrice Γ .*

Considérons en effet (fig. 1) la trace T du cône (S) sur le plan (Π) . T , qui contient les points cycliques i et i' de ce plan, est un cercle. Menons $s\alpha$ et $s\beta$ et soient α_0 et β_0 les traces de ces droites sur le plan (Π) ; i et i' doivent être conjugués, sur le cercle T , dans une involution $\mathfrak{J}_0$ qui a pour points doubles α_0 et β_0 ; cela exige que les points α_0 et β_0 soient diamétralement opposés sur T .

Fig. 1.



Cela posé, soient m et m' deux points associés de Γ ; sm et sm' ont pour traces sur le plan (Π) les points m_0 et m'_0 , qui appartiennent au cercle T et sont conjugués dans l'involution $\mathfrak{J}_0$; la corde $m_0 m'_0$ est donc perpendiculaire au diamètre $\alpha_0 \beta_0$. On voit ainsi que tous les plans tels que $(sm_0 m'_0)$ contiennent la droite sx , menée par le point s perpendiculairement au plan $(s\alpha\beta)$: toutes les cordes mn' rencontrent cette droite sx , qui est par conséquent la génératrice (2) de (P) , issue de s .

Mais le plan $(s\alpha\beta)$ est un plan principal de (S) ; sx est donc bien un axe principal de ce cône. C. Q. F. D.

Les considérations précédentes mettent encore en évidence les faits suivants, dont il suffit d'énoncer les deux premiers :

Si m et m' sont deux points associés de Γ , les droites sm et sm' qui joignent ces deux points à un point quelconque s de Γ sont également inclinées sur le plan (Π) et font, par conséquent, des angles égaux avec $s\beta$.

Tout point de $s\beta$ est équidistant des droites sm et sm' .

Enfin, si (m, m') , (n, n') sont deux couples quelconques de

points associés, s un point quelconque de Γ , les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ sont égaux ou supplémentaires, et, de même, les angles $\widehat{m'sn}$, $\widehat{msn'}$.

Cela résulte immédiatement de ce que la droite sx est bissectrice, intérieure ou extérieure, de chacun des angles $\widehat{msm'}$, $\widehat{nsn'}$. Ce dernier énoncé peut, d'ailleurs être précisé.

Remarquons, à cet effet, que la cubique Γ ayant deux asymptotes imaginaires, n'a qu'une seule branche réelle, et que (m, m') , (n, n') , formant sur Γ deux couples de points conjugués harmoniques par rapport aux points réels α, β , se succèdent nécessairement dans un ordre tel que les arcs mm' , nn' n'aient aucune partie commune, ou bien que l'un de ces deux arcs soit entièrement contenu dans l'autre. On peut évidemment supposer les notations tellement choisies que l'ordre dans lequel les quatre points en question se succèdent sur Γ soit l'un des deux suivants :

$$m, n, n', m' \quad \text{ou} \quad m, m', n, n'.$$

Considérons, par exemple, la première hypothèse; si le point s est très éloigné sur Γ , les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ sont tous deux très voisins de zéro et sont, par suite, égaux; il en est ainsi, par raison de continuité, jusqu'au moment où le point s franchit le point m pour entrer dans l'arc mn . Alors l'angle $\widehat{msn}$ passe brusquement d'une valeur à la valeur supplémentaire tandis que l'angle $\widehat{m'sn'}$ varie toujours d'une façon continue. On a donc, à partir de ce moment, et tant que le point s reste dans l'arc mn ,

$$\widehat{msn} = \pi - \widehat{m'sn'},$$

et ainsi de suite. On raisonnera de même sur la seconde hypothèse, et l'on se rend aisément compte que l'énoncé suivant s'applique à tous les cas possibles : les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ sont égaux si le point s appartient à la fois aux arcs mm' , nn' ou s'il n'est sur aucun de ces arcs; les mêmes angles sont supplémentaires si le point s est sur un seul des arcs mm' , nn' .

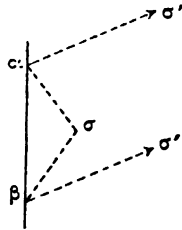
5. Outre les points i et i' , la strophoïdale Γ possède un point à l'infini σ' . Soit σ le point de Γ associé à σ' . Je vais montrer que :

Le cône (Σ), qui a pour sommet σ et pour directrice Γ , est de révolution; son axe est parallèle à $\alpha\beta$.

Joignons, en effet (fig. 2), chacun des points α et β au point σ et au point σ' .

D'après un résultat précédent, $\alpha\sigma$ et $\alpha\sigma'$ sont également incli-

Fig. 2.



nées sur $\alpha\beta$, de même $\beta\sigma$ et $\beta\sigma'$; mais $\alpha\sigma'$ et $\beta\sigma'$ sont parallèles : le triangle $\sigma\alpha\beta$ est donc isocèle ($\sigma\alpha = \sigma\beta$).

Par conséquent, si l'on construit à nouveau la figure 1, en remplaçant le point s par le point σ , on voit que le triangle $\sigma\alpha_0\beta_0$ est aussi isocèle ($\sigma\alpha_0 = \sigma\beta_0$), et que le point σ se projette, sur le plan (Π), au centre du cercle T . Le cône (Σ) est donc de révolution, et son axe est parallèle à $\alpha\beta$. C. Q. F. D.

Tous les cônes du second ordre qui contiennent Γ ont, comme on l'a vu, une série de plans cycliques perpendiculaires à $\alpha\beta$. On est donc conduit à la nouvelle définition que voici des cubiques strophoïdales :

Une telle cubique est l'intersection incomplète d'un cône de révolution et d'un cône du second ordre ayant une série de plans cycliques parallèles à l'axe du premier cône, les deux cônes ayant, d'ailleurs, une génératrice commune.

Un cas particulier remarquable est celui où le sommet du cône de révolution est rejeté à l'infini : la strophoïdale est alors le *cercle cubique* dont M. Schœnflies a signalé l'intérêt pour l'étude du déplacement infiniment petit d'une figure de grandeur inva-

riable (1). M. Schœnflies avait reconnu l'existence des couples de points associés sur le cercle cubique, et démontré, relativement à ces couples, le théorème obtenu plus haut, à la fin du n° 4.

6. Soient (m, m') , (n, n') deux couples de points associés de Γ .

Le quadrilatère $mn m' n'$ est circonscrit à une infinité de sphères dont chacune a son centre sur $\alpha\beta$.

En effet, comme on l'a vu au n° 4, tout point ω de $\alpha\beta$ est équidistant de mn et de $m'n'$. Il existe donc une sphère de centre ω qui touche les quatre côtés du quadrilatère $mn m' n'$.

On peut dire aussi que *le quadrilatère $mn m' n'$ est tracé sur un hyperboloïde de révolution ayant pour axe $\alpha\beta$.*

En rapprochant ce résultat du théorème obtenu à la fin du n° 4, on voit que :

Étant donné un quadrilatère $mn m' n'$ tracé sur un hyperboloïde de révolution (ou, ce qui revient au même, circonscriptible à une infinité de sphères), le lieu des points s tels que les angles $\widehat{msn}$, $\widehat{m'sn'}$ soient égaux ou supplémentaires, et, de même, les angles $\widehat{msn'}$, $\widehat{m'sn}$, comprend une strophoïdale Γ qui passe par les points m, m', n, n' (2).

Ce théorème ne peut encore être considéré comme démontré en toute rigueur : on pourrait craindre, en effet, que le quadrilatère $mn m' n'$, ayant pour sommets deux couples de points associés d'une strophoïdale, ne possède quelque propriété autre que celle d'être circonscriptible à une infinité de sphères. Il faut montrer qu'il n'en est pas ainsi et, à cet effet, établir directement le théorème énoncé.

Soient donc (H) l'hyperboloïde dont il est question dans l'énoncé, X son axe. Effectuons une projection orthogonale sur le

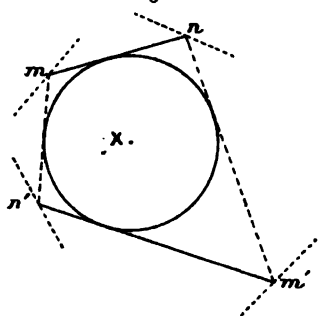
(1) Voir la *Géométrie du mouvement*, de M. Schœnflies, pp. 119-123 de la traduction française.

(2) Le lieu complet comprend, outre la strophoïdale Γ , une courbe dont il y aurait peut-être lieu de faire l'étude.

plan équatorial (Π) de (H), supposé horizontal, pour simplifier le langage (*fig. 3*).

Le quadrilatère $mn m' n'$ est circonscrit, en projection, au cercle de gorge de l'hyperboloïde.

Fig. 3.



Menons, dans l'espace, les tangentes en m, m', n, n' , aux parallèles de (H) qui passent par ces points respectifs. Les quatre droites ainsi obtenues sont celles des bissectrices des angles m, n, m', n' , qui ne rencontrent pas X .

Elles appartiennent à un même parabolôide (P) : en effet, toutes sont parallèles à (Π) et rencontrent les deux droites de l'espace mm', nn' .

Menons les perpendiculaires communes à X et aux diverses génératrices horizontales du parabolôide (P). Le lieu des pieds de ces perpendiculaires sur les génératrices de (P) est, comme l'on sait, une cubique gauche Γ , qui contient évidemment les points m, m', n, n' . *Je dis que c'est une strophoïdale.*

En effet, et tout d'abord, Γ contient les points cycliques du plan (Π) : ce sont les points qui correspondent aux génératrices horizontales isotropes de (P). En outre, X est une corde de Γ , parce qu'il existe deux génératrices horizontales D et D' , rencontrant X , en des points α et β qui appartiennent visiblement à Γ . Les plans tangents menés à Γ par X sont respectivement perpendiculaires à D et à D' . *Je dis que ces plans tangents ou, ce qui revient au même, que les génératrices D et D' sont rectangulaires.*

En effet, les droites mm', nn' sont conjuguées par rapport à (H), puisque l'une de ces droites est l'intersection des plans tangents à

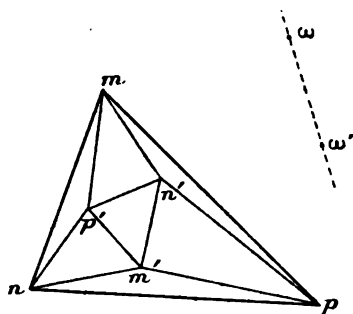
l'hyperboloïde aux points où l'autre droite le rencontre. Il en résulte que D et D' sont aussi conjuguées par rapport à H . En effet, D rencontre mm' , nn' , X et la droite à l'infini du plan (Π) . Sa conjuguée doit rencontrer les conjuguées de ces droites, qui sont respectivement nn' , mm' , la droite à l'infini du plan Π , et X : ce ne peut être que D' .

D' doit donc contenir en particulier le pôle du plan (D, X) . Or, ce pôle est rejeté à l'infini dans la direction horizontale perpendiculaire à celle de D . D et D' sont donc bien rectangulaires.

Il résulte de là que Γ a bien les caractères d'une strophoïdale; (m, m') et (n, n') sont, sur cette courbe, deux couples de points associés, puisque mm' et nn' sont deux génératrices non horizontales de (P) , et tout point s de Γ est tel que $\widehat{msn} = \widehat{m'sn'}$ ou $\pi - \widehat{m'sn}$, $\widehat{m'sn} = \widehat{msn'}$ ou $\pi - \widehat{msn'}$. La proposition que nous avons en vue est ainsi complètement établie.

7. Considérons maintenant sur Γ trois couples de points associés (m, m') , (n, n') , (p, p') . Joignons ces six points deux à deux, en évitant de joindre les points d'un même couple. On forme ainsi un octaèdre à faces triangulaires : je l'appellerai l'*octaèdre* $(mnpmm'n'p')$.

Fig. 4.



Cet octaèdre est circonscrit à deux sphères dont les centres ω et ω' appartiennent à Γ .

Soient, en effet (fig. 4), ω et ω' les deux points où les plans bissecteurs du dièdre $\widehat{mn}$ de l'octaèdre rencontrent la droite $\alpha\beta$. Consi-

dérons, par exemple, le point ω : il est équidistant des plans (mnp) , (mnp') . D'autre part, le plan $(m\alpha\beta)$ qui, on l'a vu, est un plan bissecteur de chacun des angles $\widehat{nmn'}$, $\widehat{pmp'}$, est un plan de symétrie pour l'angle tétraèdre $m.npn'p'$. Le point ω , qui appartient à ce plan, est donc équidistant des faces (mnp) et $(mn'p')$, ainsi que des faces (mnp') et $(mn'p)$. En résumé, le point ω est équidistant des quatre faces de l'octaèdre qui se rencontrent au sommet m , et il existe une sphère (Ω) , de centre ω , et tangente à ces quatre faces. En appliquant le même raisonnement aux autres angles tétraèdres, on voit que (Ω) est tangente aux quatre autres faces de l'octaèdre. On reconnaîtra de même qu'il existe une sphère (Ω') , de centre ω' , tangente aux huit faces de l'octaèdre $(mnp m'n'p')$.

Remarque I. — Toute face de l'octaèdre, étant tangente aux deux sphères (Ω) et (Ω') , doit contenir un de leurs centres de similitude. Or, deux faces qui ont en commun une arête de l'octaèdre, mn par exemple, ne peuvent, en général, contenir un même centre de similitude : il faudrait en effet que mn rencontrât $\alpha\beta$, ce qui n'a pas lieu, si m et n sont arbitraires sur Γ . On en conclut l'énoncé suivant :

Les faces de l'octaèdre peuvent être réparties en deux groupes de quatre faces, deux faces quelconques d'un même groupe ayant en commun un sommet et un seul de l'octaèdre ; les quatre faces d'un même groupe contiennent un même centre de similitude des deux sphères (Ω) et (Ω') , et les quatre autres faces contiennent l'autre centre de similitude.

Remarque II. — Il existe ∞^3 octaèdres ayant pour sommets opposés des couples de points associés de Γ . Les sphères qui leur sont inscrites, en vertu du théorème démontré plus haut, ont toutes leurs centres sur $\alpha\beta$, elles ne sont par conséquent qu'en nombre ∞^2 . On en conclut le théorème suivant :

Soit (Ω) une sphère ayant son centre sur $\alpha\beta$: il existe ∞^1 octaèdres inscrits à Γ et circonscrits à (Ω) .

On peut rapprocher ce résultat, dont le caractère est analogue à

celui du théorème de Poncelet, de ceux que MM. Humbert et Fontené ont obtenus dans des travaux récents.

8. J'arrive maintenant aux propriétés métriques et aux relations avec certains systèmes articulés qui, ainsi que je l'ai dit, me paraissent donner aux strophoïdales leur principal intérêt.

Soient encore (m, m') , (n, n') , (p, p') trois couples de points associés sur Γ , et $(mnp m' n' p')$ l'octaèdre considéré au n° 7.

Imaginons que les arêtes $mn, mp, mn', mp', np, pn', n'p', p'n$ (marquées en traits plus forts sur la figure 4) soient réalisées par des tiges rigides, articulées en leur point de rencontre. Les quatre triangles $mnp, mpn', mn'p', mp'n$ sont invariables, mais leur ensemble constitue un angle tétraèdre $m.npn'p'$, évidemment déformable (la déformation dépendant d'un paramètre).

Le quadrilatère $npn'p'$ étant, comme on l'a vu, circonscriptible à une infinité de sphères, on sait qu'il existe entre les longueurs de ses quatre côtés une relation de la forme

$$(1) \quad np \pm pn' \pm n'p' \pm p'n = 0.$$

Imaginons que l'on déforme d'une façon continue l'angle tétraèdre $m.npn'p'$. La relation (1) étant constamment satisfaite, le quadrilatère $npn'p'$ sera, à un moment quelconque, circonscrit à une infinité de sphères. D'autre part, on aura toujours

$$\begin{aligned} \widehat{mnp} &= \widehat{n'mp'} & \text{ou} & & \pi - \widehat{n'mp'} \\ \text{et} & & & & \\ \widehat{nmp'} &= \widehat{n'mp} & \text{ou} & & \pi - \widehat{n'mp}; \end{aligned}$$

par conséquent, le point m appartient toujours à la strophoïdale, lieu partiel des points d'où l'on voit les côtés opposés du quadrilatère $npn'p'$, sous des angles égaux ou supplémentaires (le point m ne peut appartenir à une branche de ce lieu autre que la strophoïdale, parce qu'il était sur cette dernière courbe, dans les conditions initiales, et que l'on suppose continue la déformation).

Cela posé, construisons, à un moment quelconque, le point m' , associé à m sur la strophoïdale dont il s'agit. On a

$$\widehat{p'n m'} = \widehat{pnm} \quad \text{ou} \quad \pi - \widehat{pnm},$$

et, toujours à cause de la continuité de la déformation, la relation à choisir est celle qui se trouve satisfaite dans les conditions initiales.

Autrement dit, l'angle $\widehat{p'n'm'}$ conserve une grandeur constante.

On reconnaît qu'il en est de même pour tous les angles des quatre triangles, faces de l'angle tétraèdre $m'.n.p.n'p'$: ces quatre triangles sont donc invariables, et il est démontré que l'octaèdre $(m.n.p.m'.n'.p')$ peut être déformé avec conservation de ses faces.

9. Cet octaèdre prend un aspect particulièrement remarquable, quand l'un de ses dièdres, $\widehat{mn}$ par exemple, devient égal à 0 ou à π . On se rend immédiatement compte que tous ses autres dièdres devront prendre en même temps l'une ou l'autre de ces valeurs ; autrement dit, l'octaèdre est complètement aplati. Cette circonstance pouvant se présenter de deux manières, suivant que l'on a

$$\widehat{mn} = 0 \quad \text{ou} \quad \widehat{mn} = \pi,$$

on voit que l'octaèdre $(m.n.p.m'.n'.p')$ peut être aplati de deux manières.

Considérons-le dans une de ces positions d'aplatissement. La cubique Γ est alors une strophoïde, et les quadrilatères $m.n.m'.n'$, $n.p.n'.p'$, $m.p.m'.p'$ sont chacun circonscrits à un cercle ayant pour centre le point double de la strophoïde.

Réciproquement, donnons-nous deux cercles concentriques et deux points quelconques m, m' . Construisons les quadrilatères $m.n.m'.n'$, $m.p.m'.p'$, circonscrits respectivement à ces deux cercles. Il est facile de voir que les (m, m') , (n, n') , (p, p') constituent trois couples de points associés sur une strophoïde ayant pour point double le centre commun des deux cercles ; le quadrilatère $n.p.n'.p'$ est donc circonscrit à un cercle concentrique aux deux premiers. On a ainsi construit simplement un octaèdre articulé, dans l'une de ses formes aplaties, et il est évident que la construction est aussi générale que possible.

10. On peut établir la déformabilité de l'octaèdre $(m.n.p.m'.n'.p')$ par une autre méthode, qui présente l'avantage de conduire à la connaissance de nouveaux systèmes articulés.

La courbe Γ étant unicursale, on peut faire correspondre, d'une façon univoque, un paramètre à un point variable de cette courbe, et cette correspondance peut être établie de manière qu'à trois points donnés de Γ soient attachées trois valeurs quelconques, données *a priori*, du paramètre. Supposons la correspondance telle qu'aux points α, β et au point réel à l'infini de Γ soient attachées respectivement les valeurs 0, ∞ et 1 du paramètre. Deux points associés m et m' étant conjugués harmoniques sur Γ par rapport à α et β , leurs paramètres μ et μ' satisfont à la relation

$$(1) \quad \mu + \mu' = 0.$$

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° Soient m, n, n' , trois points de Γ , les deux derniers étant associés. On a, entre les longueurs mn et mn' , la relation

$$(2) \quad \frac{mn}{mn'} = \frac{(\mu - \nu)(1 - \nu')}{(\mu - \nu')(1 - \nu)} = \frac{(\mu - \nu)(1 + \nu)}{(\mu + \nu)(1 - \nu)},$$

μ et ν étant les paramètres des points m et n .

En effet, mn et mn' sont, comme on l'a vu, également inclinées sur la droite $\alpha\beta$. Si donc l'on désigne par m_1, n_1, n'_1 les projections orthogonales des points m, n, n' , sur $\alpha\beta$, on a

$$\frac{mn}{mn'} = \frac{m_1 n_1}{m_1 n'_1}.$$

Or, il est clair que, lorsqu'un point parcourt Γ , sa projection orthogonale sur mn lui correspond homographiquement. Soit donc σ'_1 le point à l'infini de $\alpha\beta$ (projection du point à l'infini σ' de Γ). On a l'égalité entre rapports anharmoniques

$$(m_1 n_1 n'_1 \sigma'_1) = (mn n' \sigma') \quad \text{ou} \quad \frac{m_1 n_1}{m_1 n'_1} = \frac{(\mu - \nu)(1 - \nu')}{(\mu - \nu')(1 - \nu)},$$

d'où résulte bien l'égalité (2).

Cette relation, on le voit, conduit à attribuer un signe au rapport $\frac{mn}{mn'}$. Ce rapport est positif quand le point m est extérieur à l'arc nn' , et négatif dans le cas contraire.

2° Soient m, n, p trois points quelconques de Γ ; μ, ν, ϖ leurs paramètres respectifs. On a, entre les longueurs np, pm, mn ,

la relation

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(1+\mu)(\nu+\varpi)}{(1-\mu)(\nu-\varpi)} \overline{np}^2 + \frac{(1+\nu)(\varpi+\mu)}{(1-\nu)(\varpi-\mu)} \overline{pm}^2 \\ & + \frac{(1+\varpi)(\mu+\nu)}{(1-\varpi)(\mu-\nu)} \overline{mn}^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient, en effet, n' et p' les points de Γ , associés respectivement à n et à p . Les angles $\widehat{npm}$, $\widehat{n'mp'}$ étant égaux ou bien supplémentaires, écrivons que leurs cosinus sont égaux ou bien égaux en valeur absolue et de signes contraires; on a ainsi l'une des deux relations

$$\frac{\overline{mn}^2 + \overline{mp}^2 - \overline{np}^2}{|mn||mp|} = \pm \frac{\overline{mn'}^2 + \overline{mp'}^2 - \overline{n'p'}^2}{|mn'||mp'|},$$

ou

$$\overline{mn}^2 + \overline{mp}^2 - \overline{np}^2 = \pm \frac{|mn||mp|}{|mn'||mp'|} (\overline{mn'}^2 + \overline{mp'}^2 - \overline{n'p'}^2);$$

les longueurs des segments mn , mp , etc., sont écrites entre traits verticaux pour montrer que, dans la relation précédente, elles ne figurent que par leurs valeurs absolues. Mais, d'après la discussion qui termine le n° 4, les angles $\widehat{npm}$, $\widehat{n'mp'}$ sont égaux si le point m appartient à la fois aux arcs np , $n'p'$, ou bien s'il est extérieur à tous les deux; les mêmes angles sont supplémentaires si le point m est sur un seul de ces arcs; d'autre part, le rapport

$$\frac{mn \cdot mp}{mn' \cdot mp'}$$

est positif dans le premier cas, négatif dans le second. On a donc, dans tous les cas, *en grandeur et en signe* :

$$(4) \quad \overline{mn}^2 + \overline{mp}^2 - \overline{np}^2 = \frac{mn \cdot mp}{mn' \cdot mp'} (\overline{mn'}^2 + \overline{mp'}^2 - \overline{n'p'}^2).$$

Cela posé, on a

$$mn' = \frac{(\mu+\nu)(1-\nu)}{(\mu-\nu)(1+\nu)} mn,$$

$$mp' = \frac{(\mu+\varpi)(1-\varpi)}{(\mu-\varpi)(1+\varpi)} mp,$$

$$n'p' = \frac{(-\nu+\varpi)(1-\varpi)}{(-\nu-\varpi)(1+\varpi)} n'p, \quad n'p = \frac{(\varpi+\nu)(1-\nu)}{(\varpi-\nu)(1+\nu)} np,$$

d'où

$$n'p' = - \frac{(1-\nu)(1-\omega)}{(1+\nu)(1+\omega)} np.$$

En remplaçant, dans la relation (4), mn' , mp' , $n'p'$ par les valeurs précédentes, on trouve, toutes réductions faites, la relation (3).

11. Cela posé, considérons, sur une strophoïdale Γ , variable, trois points m , n , p , de paramètres fixes μ , ν , ω . Comme on l'a remarqué au début, Γ dépend de trois paramètres de grandeur; on peut donc déformer cette cubique en l'assujettissant à deux conditions; je choisirai les suivantes : mn et mp restent de longueurs constantes.

Il résulte alors de la relation (3) que np reste aussi de longueur constante, et de la relation (2), que toutes les autres arêtes de l'octaèdre ($mnp m'n'p'$) sont aussi de longueurs constantes; par exemple, il en est ainsi pour les arêtes mn' , $n'm'$, $m'n$, à cause de

$$\frac{mn'}{mn} = \text{const.}, \quad \frac{n'm'}{n'm} = \text{const.}, \quad \frac{m'n}{m'n'} = \text{const.}$$

On a donc bien retrouvé que l'octaèdre ($mnp m'n'p'$) est déformable avec conservation de ses arêtes.

Mais ce n'est pas tout. Soit l un nouveau point de Γ , de paramètre fixe λ . On a

$$A_1 \overline{lm}^2 + B_1 \overline{ln}^2 + C_1 \overline{mn}^2 = 0$$

ou

$$A_1 \overline{lm}^2 + B_1 \overline{ln}^2 = \text{const.},$$

A_1 et B_1 étant des constantes. Il en résulte (théorème de Stewart) que le point l reste à distance constante d'un certain point de mn ; je dirai, plus brièvement, que le point l est lié à un certain point de mn .

Le même raisonnement peut se répéter, en considérant, au lieu de mn , les diverses arêtes de l'octaèdre ($mnp m'n'p'$).

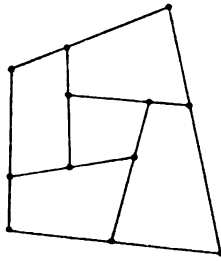
En résumé :

On peut, sans gêner la déformation de l'octaèdre ($mnp m'n'p'$).

lier un point l à douze points convenablement choisis sur les arêtes de l'octaèdre, et cela d'une infinité de manières.

Les points des arêtes de l'octaèdre, qui sont liés au point l , forment une configuration qu'il faut signaler : les trois points qui appartiennent aux trois arêtes limitant une même face, par exemple aux arêtes np , pm , mn , sont nécessairement en ligne droite, sans quoi la figure formée par le triangle mnp et le point l seraient évidemment rigides. En partant de cette remarque, on reconnaît aisément que les douze points en question sont répartis trois par trois sur huit droites formant deux quadrilatères, tels que chaque côté de l'un rencontre un côté de l'autre, ainsi que l'indique le schéma suivant (*fig. 5*) :

Fig. 5.



Ces douze droites forment donc un système articulé gauche, analogue à celui que MM. Hart et Kempe ont étudié dans le plan (¹).

12. On peut, pour l'obtention de nouveaux systèmes articulés, tirer un autre parti des relations (2) et (3), et du fait que Γ dépend de trois paramètres de grandeur. Par exemple, considérons sur Γ quatre couples de points associés (m, m') , (n, n') , (m_1, m'_1) , (n_1, n'_1) , et supposons que, les paramètres μ, ν, μ_1, ν_1 des points m, n, m_1, n_1 ayant des valeurs fixes, on déforme Γ de telle manière que les longueurs mn, m_1n_1 soient constantes. On voit, par

(¹) M. FONTENÉ (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1904, p. 105) a déjà déterminé les cas où le système articulé représenté par le schéma de la figure 5 est déformable, avec deux paramètres.

le raisonnement du n° 11, que les deux quadrilatères $mn m' n'$, $m_1 n_1 m'_1 n'_1$ conservent tous deux des côtés de longueurs constantes; en outre, chaque sommet de l'un reste lié à un point de chaque côté de l'autre quadrilatère.

Considérons, par exemple, le côté mn du premier quadrilatère et le côté $m_1 n_1$ du second; le point m et le point n sont liés chacun à un certain point de $m_1 n_1$, le point m_1 et le point n_1 sont liés chacun à un certain point de mn ; en définitive, quatre points de mn se trouvent liés à autant de points de $m_1 n_1$; mais on sait que si deux droites sont en déplacement relatif tel que *trois* points de l'une soient liés à trois points de l'autre, *tout* point de l'une est lié à un point de l'autre; les deux droites sont des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde articulé. Les considérations qui précèdent conduisent donc à une combinaison de *seize* hyperboloïdes articulés, sur laquelle je ne m'étendrai pas davantage.

SUR

L'EXTENSION DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET A L'ESPACE, PAR DES POLYÈDRES DE GENRE un ;

Par M. G. FONTENÉ.

L'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace peut être tentée avec des polygones gauches ou avec des polyèdres. M. Darboux a donné pour le premier point de vue le théorème des routes de lumière; je donne ici pour le second point de vue une prévision générale, dont je démontre l'exactitude dans un cas particulier, suffisant pour inspirer confiance.

Je tiens à dire que la première idée de l'emploi de polyèdres de genre un pour l'objet indiqué ici s'est présentée au cours d'une conversation avec M. R. Bricard.

I.

Ce premier paragraphe est, à peu de chose près, la reproduction d'une Note qui a paru dans les *Nouvelles Annales* en 1904.

1. Appelons polyèdre *homogène* un polyèdre dont toutes les

faces ont le même nombre x de côtés, dont tous les angles solides ont le même nombre y d'arêtes. Un polyèdre homogène *de genre un* donne lieu aux trois relations

$$\begin{aligned} F + S &= A, \\ Fx &= Sy = 2A, \end{aligned}$$

homogènes par rapport à F, S, A . L'élimination de ces trois quantités donne

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1 \quad \text{ou} \quad (x-2)(y-2) = 4.$$

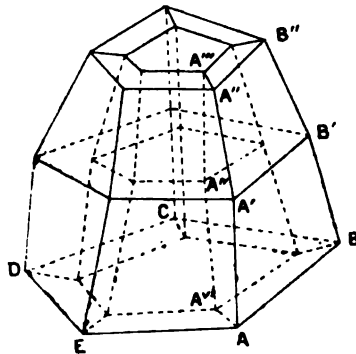
On peut donc avoir

$$\begin{array}{llll} x=4, & y=4 & \text{avec} & F=S, \\ x=3, & y=6 & \text{avec} & F=2S, \\ y=3, & x=6 & \text{avec} & S=2F, \end{array}$$

c'est-à-dire trois classes de polyèdres, que l'on peut appeler respectivement *tétraonaux*, *trigonaux*, *hexagonaux*.

Parmi les polyèdres tétraonaux sont des polyèdres à un trou ou polyèdres *toriques* (*fig. 1*), dont les faces sont des quadrilatères

Fig. 1.



assemblés 4 par 4 autour de chaque sommet. Si p est le nombre des sommets sur un contour tel que ABCD... et si q se rapporte au contour $AA'A''A'''...$, le nombre des sommets ou des faces est

$p \geq 3, q \geq 3$. [M. Bricard a envisagé (*Nouvelles Annales*, 1904) un polyèdre tétragonal à 8 sommets.]

Möbius, qui paraît s'être occupé le premier de polyèdres de genre un, a indiqué une construction du polyèdre trigonal à 7 sommets ⁽¹⁾. M. Bricard en a indiqué une autre, qui a été étendue par M. Deltour (*Nouvelles Annales*, 1904) au cas de S quelconque.

2. De combien de paramètres dépendent les polyèdres considérés ? Les sommets donneraient lieu à $3S$ paramètres, si les faces étaient nécessairement des triangles ; mais il faut défalquer $x - 3$ paramètres pour chaque face lorsque les faces ont x côtés ; le nombre des paramètres restant est

$$3S - F(x - 3),$$

ou

$$3(F + S) - 2A,$$

ou

$$F + S.$$

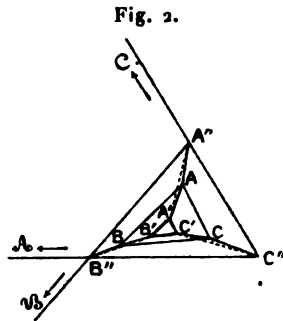
Si donc le polyèdre doit être *circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre*, ce qui forme $F + S$ conditions, il est déterminé, au moins en apparence. Il y a lieu de se demander si la recherche d'un tel polyèdre n'est pas un problème généralement impossible, qui ne devient possible qu'en devenant indéterminé.

Les choses pourront d'ailleurs se passer un peu différemment, et l'on en aura un exemple dans le cas traité plus loin. Les $F(x - 3)$ conditions indiquées ci-dessus peuvent n'être pas distinctes ; si k d'entre elles sont les conséquences des autres, le polyèdre dépend de paramètres en nombre $F + S + k$; quand on l'astreint à être circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre, il paraît dépendre encore de k paramètres. Il est possible que les deux quadriques doivent satisfaire à une condition invariante, et que le polyèdre dépende alors de $k + 1$ paramètres.

⁽¹⁾ Voir l'Ouvrage de M. MAX BRÜCKNER (*Vielecke und Vielfache*, Leipzig, 1900, p. 221).

II.

3. Considérons le polyèdre tétragonal torique qui correspond aux valeurs $p = 3$, $q = 3$ (fig. 2).



Il a 9 faces quadrangulaires

$B'C'C'B''$, $C'A'A''C'$, $A'B'B''A''$, ou a, b, c ,
 $B''C''C'B$, $C'A'AC$, $A''B''B'A$, ou a', b', c' ,
 $B C C'B'$, $C A A'C'$, $A B B'A'$, ou a'', b'', c'' ,

assemblées 4 par 4 autour de 9 sommets

A, B, C ,
 A', B', C' ,
 A'', B'', C'' ;

à chaque face correspond un sommet.

Nous appellerons D le point commun aux trois plans a, b, c , ou encore le point de concours des trois droites $A'A'', B'B'', C'C''$, et l'on aura de même les points D' et D'' ; les plans $ABC, A'B'C', A''B''C''$ seront désignés par d, d', d'' .

L'arête (a', a'') ou BC correspond à l'arête $A'A''$, etc. Nous appellerons $\mathfrak{A}$ le point commun aux trois plans $\alpha, \alpha', \alpha''$, ou encore le point de concours des trois droites $BC, B'C', B''C''$, et l'on aura de même $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$; les trois points $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sont sur une même droite, intersection des plans d, d', d'' , ou $ABC, \dots$ On peut de même désigner par α le plan $AA'A''$, etc.; les trois plans α, β, γ passent par la droite $DD'D''$.

Le polyèdre en question semble dépendre de paramètres en nombre $3 \times 9 - 9$, ou 18, chaque face quadrangulaire donnant lieu à une condition; il dépend en réalité de 19 paramètres, l'une des 9 conditions étant une conséquence des 8 autres. En effet, si l'on se donne une droite, 3 points $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sur cette droite, 3 plans d, d', d'' passant par cette droite, et si l'on trace dans le plan d un triangle ABC dont les côtés passent respectivement en $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc., on a les 9 sommets d'un polyèdre de l'espèce indiquée; or la figure ainsi construite dépend de 19 paramètres.

Je montrerai que la quadrique S inscrite à ce polyèdre et la quadrique S' qui lui est circonscrite sont liées par une relation invariante. Dès lors, si l'on se donne deux quadriques, la recherche d'un polyèdre de l'espèce indiquée, circonscrit à l'une et inscrit à l'autre, est un problème indéterminé en apparence, impossible en réalité si les quadriques sont quelconques, et qui ne devient possible qu'en devenant doublement indéterminé.

4. Pour ne pas interrompre dans la suite le développement du calcul, je dirai immédiatement ceci :

La quadrique inscrite S se présentera par son équation tangentielle, et la quadrique circonscrite S' par son équation ponctuelle :

$$(\Sigma) \quad au^2 + \dots + 2fvw + \dots + 2lur + \dots = 0,$$

$$(S') \quad a'x^2 + \dots + 2f'yz + \dots + 2l'xt + \dots = 0.$$

Soit pour un instant

$$(S) \quad \bar{a}x^2 + \dots + 2\bar{f}yz + \dots + 2\bar{l}xt + \dots = 0$$

l'équation ponctuelle de S; l'équation en λ pour la combinaison

$$\lambda S + S' = 0$$

est

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0;$$

Δ se rapporte à $\bar{a}, \bar{b}, \dots$, et l'on a avec les notations habituelles

$$\Theta = a'\bar{A} + \dots + 2f'\bar{F} + \dots + 2l'\bar{L} + \dots,$$

$$\Phi = (\bar{b}\bar{c} - \bar{f}^2)(a'd' - l'^2) + \dots$$

sans qu'il soit utile pour le moment d'écrire tous les termes de Φ .

Pour introduire les coefficients de l'équation (Σ), rappelons que $\bar{a}, \bar{b}, \dots$ sont les premiers mineurs $A, B, \dots$ du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix},$$

mineurs affectés de signes convenables. On a donc d'abord

$$\Delta = \delta^2.$$

Ensuite, les premiers mineurs affectés de signes $\bar{A}, \bar{B}, \dots$ sont simplement les produits de $a, b, \dots$ par δ^2 , et l'on a

$$\theta = \delta^2(aa' + \dots + 2ff' + \dots + 2ll' + \dots) = \delta^2\theta,$$

en désignant par θ la quantité placée dans la parenthèse. Enfin, l'on a

$$(\bar{b}\bar{c} - \bar{f}^2) = \delta(ad - l^2), \dots$$

et, par suite,

$$\Phi = \delta[(ad - l^2)(a'd' - l'^2) + \dots] = \delta\varphi,$$

en posant (SALMON, *Géométrie à trois dimensions*, p. 254),

$$\begin{aligned} \varphi = & (ad - l^2)(a'd' - l'^2) + \dots \\ & + (bc - f^2)(\dots\dots\dots) + \dots \\ & + 2(gm - hn)(\dots\dots\dots) + \dots \\ & + 2(lc - ng)(\dots\dots\dots) + \dots \} \\ & + 2(mh - lb)(\dots\dots\dots) + \dots \} \\ & + 2(gh - af)(\dots\dots\dots) + \dots \\ & + 2(fd - mn)(\dots\dots\dots) + \dots \end{aligned}$$

5. Par analogie avec ce qui a lieu dans le plan pour les triangles de Poncelet, on peut s'attendre (et cette précision se confirme) à ce que la relation invariante annoncée au n° 3 soit

$$\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda'} \pm \sqrt{\lambda''} \pm \sqrt{\lambda'''} = 0,$$

ou, S_1 désignant la somme des $\lambda, \dots$,

$$(S_1^2 - 4S_2)^2 - 64\lambda\lambda'\lambda''\lambda''' = 0,$$

ou

$$\theta^2 - 4\Delta\Phi = \pm 8\Delta\sqrt{\Delta\Delta'}.$$

En introduisant δ , θ , φ , et en mettant alors δ' au lieu de Δ' , on a enfin

$$\frac{1}{4} \theta^2 - \varphi = \pm 2\sqrt{\delta\delta'}.$$

III.

6. Nous prendrons comme tétraèdre de référence le tétraèdre $D'ABC$, D' étant, comme on l'a dit, le point de concours des droites AA' , BB' , CC' ; les plans des faces sont d , a'' , b'' , c'' ; on passe donc du point de vue ponctuel au point de vue tangentiel en remplaçant, par exemple, A , A' , A'' par a'' , a' , a .

Les neuf sommets du polyèdre sont :

- 1° A , B , C , sommets de référence;
- 2° A' , B' , C' , sur les arêtes de référence DA , DB , DC ;
- 3° A'' , B'' , C'' .

Les neuf plans des faces du polyèdre sont :

- 1° a'' , b'' , c'' , plans de référence;
- 2° a' , b' , c' , passant par les arêtes de référence (d, a) , ...;
- 3° a , b , c .

7. On a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (d') \text{ ou } (A'B'C'), & \quad ax + by + cz + dt = 0, \\ (d'') \text{ ou } (A''B''C''), & \quad ax + by + cz + \delta t = 0, \\ (D' \in A'B'C''), & \quad ax + by + cz + \frac{d'\delta}{a} x = 0, \\ (D' \in B'C'A''), & \quad ax + by + cz + \frac{d'\delta}{b} y = 0, \\ (D' \in C'A'B''), & \quad ax + by + cz + \frac{d'\delta}{c} z = 0; \end{aligned}$$

outre les douze paramètres du tétraèdre de référence, on a les sept paramètres a , b , c , δ , a' , b' , c' .

On a, pour le point A'' ,

$$\frac{ax}{bb' - cc' - d'\delta} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'},$$

comme on le vérifie aisément; nous définirons une constante δ'

par la relation

$$(R) \quad aa' + bb' + cc' - dd' + (d' \delta + d \delta') = 0,$$

et nous aurons

$$(A'') \quad \frac{ax}{aa' + d(\delta' - d')} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'};$$

ou encore, l'équation tangentielle de ce point est

$$(A'') \quad a'u + b'v + c'w + d'r + \frac{d}{a}(\delta' - d')u = 0.$$

8. Après avoir considéré les sommets du polyèdre, considérons les plans de ses faces.

Les trois plans $BCB''C''$, ... ont pour équations

$$\frac{x}{a'} = \frac{t}{d'}, \quad \frac{y}{b'} = \frac{t}{d'}, \quad \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'};$$

ces trois plans se coupent au point D' dont les coordonnées sont a' , b' , c' , d' , et l'équation tangentielle de ce point est

$$(D') \quad a'u + b'v + c'w + d'r = 0.$$

Les trois plans $B''C''B'C'$, ... ont pour équations

$$(a) \text{ ou } (B''C''B'C') \quad ax + by + cz + dt + \frac{d'}{a'}(\delta - d)x = 0,$$

$$(b) \text{ ou } (C''A''C'A') \quad ax + by + cz + dt + \frac{d'}{b'}(\delta - d)y = 0,$$

$$(c) \text{ ou } (A''B''A'B') \quad \dots\dots\dots;$$

le second plan, par exemple, passe au point A' pour lequel on a $y = 0$, $z = 0$, $ax + dt = 0$, et il passe de même au point C' ; il passe au point A'' , car on a

$$(aa' + d\delta' - dd') + bb' + cc' + dd' + d'\delta - dd' = 0$$

en vertu de la relation qui définit la constante δ' .

Ces trois plans se coupent au point

$$(D) \quad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{\delta'},$$

comme on le vérifie par cette même relation; l'équation tangen-

tielle de ce point est

$$(D) \quad a'u + b'v + c'w + \delta'r = 0.$$

On voit que l'on passe des sommets aux faces du polyèdre en échangeant x et u , ..., a et a' , ..., δ et δ' .

9. Considérons la quadrique S' circonscrite au polyèdre considéré. Comme elle passe aux points A, B, C, A', B', C' , son équation est de la forme

$$(ax + by + cz + dt)t + Ayz + Bzx + Cxy = 0.$$

La section de cette conique par le plan $A''B''C''$ est sur le cône

$$(d - \delta) \frac{(ax + by + cz)^2}{\delta^2} + Ayz + Bzx + Cxy = 0.$$

En écrivant que ce cône contient le point A'' , on a

$$(d - \delta) d'^2 + A b' c' + B c' \left[a' + \frac{d}{a} (\delta' - d') \right] + C b' \left[a' + \frac{d}{a} (\delta' - d') \right] = 0$$

ou

$$(d - \delta) d'^2 + A b' c' + B c' a' + C a' b' + \frac{d}{a} (\delta' - d') (B c' + C b') = 0;$$

les points B'' et C'' donnent deux relations analogues, que l'on peut remplacer par celles-ci :

$$\frac{B c' + C b'}{a} = \frac{C a' + A c'}{b} = \frac{A b' + B a'}{c};$$

on conclut de là, en tenant compte de (R),

$$\frac{A}{a'(bb' + cc' - aa')} = \frac{B}{b'(cc' + aa' - bb')} = \frac{C}{c'(aa' + bb' - cc')} = \frac{\lambda'}{a'b'c'},$$

$$\lambda' = \frac{d'^2(d - \delta)}{(dd' + d'\delta - d\delta')}.$$

Si l'on pose

$$p = bb' + cc' - aa', \quad q = \dots, \quad r = \dots,$$

l'équation de la quadrique S' est donc, en doublant,

$$(S') \quad 2a'b'c'(ax + by + cz + dt)t + 2\lambda'(a'p yz + b'q zx + c'r xy) = 0,$$

λ' ayant la valeur ci-dessus.

La quadrique S inscrite au polyèdre a de même pour équation tangentielle

$$(\Sigma) \ 2abc(a'u + b'v + c'w + d'r)r + 2\lambda(apvw + bqwu + cruv) = 0,$$

avec

$$\lambda = \frac{d^2(d' - \delta')}{dd' + d\delta' - d'\delta}.$$

10. Comme les constantes δ et δ' , liées aux autres par la relation (R), n'entrent que dans λ et λ' , cette relation (R) équivaut à une relation entre λ , λ' et les autres constantes $a, \dots, d, a', \dots, d'$. Les expressions de λ' et de λ donnent

$$\begin{aligned} (\lambda' + d').d'\delta - \lambda'.d\delta' &= dd'(d' - \lambda'), \\ -\lambda.d'\delta + (\lambda + d).d\delta' &= dd'(d - \lambda), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} d'\delta &= dd' \frac{-2\lambda\lambda' + d'\lambda + dd'}{d\lambda' + d'\lambda + dd'}, \\ d\delta' &= dd' \frac{-2\lambda\lambda' + d\lambda' + dd'}{d\lambda' + d'\lambda + dd'}; \end{aligned}$$

la relation (R) devient

$$(R') \quad 4dd'\lambda\lambda' - (d\lambda' + d'\lambda)\Sigma aa' = dd'(dd' + \Sigma aa'),$$

le signe Σ s'étendant à a, b, c , ou encore

$$(R'') \quad (4d\lambda' - \Sigma aa')(4d'\lambda - \Sigma aa') = (2dd' + \Sigma aa')^2.$$

IV.

11. Il s'agit de vérifier la relation

$$\frac{1}{4} \theta^2 - \varphi = \pm 2\sqrt{\delta\delta'}.$$

On a d'abord

$$\delta' = \begin{vmatrix} 0 & \lambda'c'r & \lambda'b'q & a'b'c'a \\ \lambda'c'r & 0 & \lambda'a'p & a'b'c'b \\ \lambda'b'q & \lambda'a'p & 0 & a'b'c'c \\ a'b'c'a & a'b'c'b & a'b'c'c & 2a'b'c'd \end{vmatrix}.$$

Divisons les trois premières lignes par $\lambda'b'c'$, $\lambda'c'a'$, $\lambda'a'b'$, la

dernière par $a'b'c'$, et multiplions les trois premières colonnes par a' , b' , c' , la dernière par $2\lambda'$; il vient

$$\frac{\delta'}{a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & r & q & 2aa' \\ r & 0 & p & 2bb' \\ q & p & 0 & 2cc' \\ aa' & bb' & cc' & 4d\lambda' \end{vmatrix}.$$

A cause de $q + r = 2aa'$, retranchons de la dernière colonne la somme des trois premières; nous avons

$$\frac{\delta'}{a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} \times (4d\lambda' - \Sigma aa'),$$

le signe Σ s'étendant à a , b , c . Finalement :

$$\delta' = a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2 \times pqr \times (4d\lambda' - \Sigma aa'),$$

On a pour δ une expression analogue. Par suite, en tenant compte de la relation (R''), le produit $\delta\delta'$ est un carré, comme cela est nécessaire :

$$\sqrt{\delta\delta'} = abc \cdot a'b'c' \cdot \lambda\lambda' \cdot pqr \times (2dd' + \Sigma aa').$$

12. On a ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \theta &= abc \cdot a'b'c' (2dd' + \Sigma aa') \\ &\quad + \lambda\lambda' (aa'p^2 + bb'q^2 + cc'r^2). \end{aligned}$$

13. Reste le polynome φ . L'équation (S') manquant de terme en x^2 , y^2 , z^2 , l'équation (Σ) manquant de termes en u^2 , v^2 , w^2 , on a (fin du n° 4)

$$\begin{aligned} \varphi &= l^2 l'^2 + \dots \\ &\quad + f^2 f'^2 + \dots \\ &\quad + 2(gm - hn)(g'm' - h'n') + \dots \\ &\quad + 2ll'(gg' + hh') + \dots \\ &\quad + 2gh \cdot g'h' + \dots \\ &\quad + 2(fd - mn)(f'd' - m'n') + \dots; \end{aligned}$$

la quatrième ligne contient les termes qui proviennent de la quatrième et de la cinquième ligne dans l'expression générale de φ .

On trouve, en développant,

$$\varphi = (ll' + mm' + nn' + ff' + gg' + hh')^2 + 2K,$$

avec

$$\begin{aligned} K = & -f'l'(gm + hn - fl) - \dots - \dots \\ & + dd'(ff' + gg' + hh') \\ & - mnf'd' - \dots - \dots \\ & - m'n'fd' - \dots - \dots, \end{aligned}$$

d représentant ici le coefficient de r^2 dans l'équation (Σ) , c'est-à-dire $2abcd'$, etc; on en déduit

$$\varphi = [abc.a'b'c'\Sigma aa' + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \dots)]^2 + 2K,$$

ou

$$\varphi = \left(\frac{1}{2}\theta - 2abc.a'b'c'.dd'\right)^2 + 2K.$$

14. La relation à vérifier devient, en prenant le signe + devant le radical,

$$\begin{aligned} 2abc.a'b'c'.dd'.\theta - 4a^2b^2c^2.a'^2b'^2c'^2.d^2d'^2 - 2K \\ = 2abc.a'b'c'.\lambda\lambda'.pqr \times (2dd' + \Sigma aa'), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{K}{abc.a'b'c'} &= dd'(\theta - 2abc.a'b'c'.dd') - \lambda\lambda'pqr(2dd' + \Sigma aa') \\ &= 2dd'[abc.a'b'c'(dd' + \Sigma aa') + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \dots)] \\ &\quad - \lambda\lambda'pqr(2dd' + \Sigma aa'). \end{aligned}$$

Or on a, d'après l'expression de K donnée au n° 13,

$$\begin{aligned} K = & -\lambda\lambda'.abc.a'b'c'[aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) + \dots + \dots] \\ & + 4\lambda\lambda'.abc.a'b'c'.dd'[aa'p^2 + \dots + \dots] \\ & - 2a^2b^2c^2.a'^2b'^2c'^2(d\lambda' + d'\lambda)(p + q + r), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $p + q + r$ par $\Sigma aa'$, et en tenant compte de (R') ,

$$\begin{aligned} \frac{K}{abc.a'b'c'} &= -\lambda\lambda'[aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) + \dots + \dots] \\ &\quad + 4\lambda\lambda'.dd'(aa'p^2 + \dots + \dots) \\ &\quad - 2abc.a'b'c'[4dd'.\lambda\lambda' - dd'(dd' + \Sigma aa')]; \end{aligned}$$

il faut donc vérifier que le second membre de cette égalité ne diffère pas de l'expression

$$2dd'[abc.a'b'c'(dd' + \Sigma aa') + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \dots)] - \lambda\lambda'pqr(2dd' + \Sigma aa').$$

Les termes indépendants du produit $\lambda\lambda'$ sont d'abord identiques. Il reste à vérifier :

$$-aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) - \dots - \dots \\ + 2dd'(aa'p^2 + \dots + \dots - 4abc.a'b'c') = -pqr(2dd' + \Sigma aa').$$

Pour les termes indépendants du produit dd' , si l'on pose

$$aa' = \alpha, \quad bb' = \beta, \quad cc' = \gamma,$$

d'où

$$p = \beta + \gamma - \alpha, \quad \dots, \quad \dots,$$

on a, par exemple,

$$bb'q + cc'r - aa'p = \beta(\gamma + \alpha - \beta) + \gamma(\alpha + \beta - \gamma) - \alpha(\beta + \gamma - \alpha) \\ = \alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 = (\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma),$$

et l'on doit vérifier

$$-\alpha(\beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) - \dots - \dots = -pqr\Sigma\alpha,$$

ce qui est une identité.

Pour les termes en dd' , on doit vérifier

$$\alpha(\beta + \gamma - \alpha)^2 + \beta(\gamma + \alpha - \beta)^2 + \gamma(\alpha + \beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta\gamma = -pqr;$$

or, le premier membre admet le facteur p , comme on le voit en y faisant $\alpha = \beta + \gamma$, etc.; il est donc divisible par pqr , et les deux membres de l'égalité ne peuvent différer que par une constante; ils ne diffèrent pas, puisque les termes en α^3 par exemple sont les mêmes.

SUR QUELQUES GROUPES D'ORDRE p^6 ;

Par M. M. POTRON.

Cette Note a pour but de rectifier et de compléter les résultats obtenus dans ma Thèse de Doctorat touchant les g_{p^6} (groupes d'ordre p^6), et de réparer en particulier une omission de quelque importance, commise dans la détermination des types de figure (11) (1111) dans le cas de $p > 2$ (Thèse, p. 94, 95).

Il s'agit des types de $g_{p^6}G$ ayant pour commutant le central et ne contenant pas de g_{p^6} de figure (111) (11). Leurs équations

peuvent toujours (Thèse, p. 92) être mises sous la forme

$$\begin{aligned} a^p &= b^p = 1, & c^p &= b\beta a^\alpha, & d^p &= b\beta', & e^p &= b\beta'', & f^p &= b\beta''', \\ & & & & & & & & & (\alpha = 0, 1), \\ d^{-1}cd &= c, & e^{-1}ce &= ca, & f^{-1}cf &= cb, & e^{-1}de &= db^N, \\ & & & & & & & & & f^{-1}df = da, & f^{-1}ef &= e. \end{aligned}$$

Nous n'avons à nous occuper ici que du cas (Thèse, p. 93) $\alpha = 1$, β' ou β'' ou $\beta''' \neq 0$.

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme (Thèse, p. 76)

$$\begin{aligned} a_1 &= b\eta a\xi, & b_1 &= b\eta' a\xi', \\ c_1 &= f^u e^z d^r c^x b^k a^h, & d_1 &= f^{u'} e^{z'} d^{r'} c^{x'} b^{k'} a^{h'}, \\ e_1 &= f^{u''} e^{z''} d^{r''} c^{x''} b^{k''} a^{h''}, & f_1 &= f^{u'''} e^{z'''} d^{r'''} c^{x'''} b^{k'''} a^{h'''}, \end{aligned}$$

avec les conditions (Thèse, p. 89, 90, 91, N désigne un non carré arbitraire) :

$$\begin{aligned} \xi' &\equiv \omega\eta, & \eta' &\equiv \omega N\xi, & \omega N &= \pm 1, \\ x' &\equiv \omega N^2 y, & y' &\equiv \omega N x, & z' &\equiv \omega N z, & u' &\equiv \omega N^2 z, \\ x'' &\equiv \omega N y', & y'' &\equiv \omega x', & z'' &\equiv \omega u', & u'' &\equiv \omega N z', \\ \xi &\equiv xz' - zx' + yu' - uy', & \eta &\equiv xu' - ux' + N(yz' - zy'), \\ (\xi^2 - N\eta^2) &[(x^2 - N y^2)(N z^2 - u^2) \\ &+ (x''^2 - N y''^2)(N z''^2 - u''^2) + 2N(xy' - yx')(zu' - uz')] \neq 0, \end{aligned}$$

et il opère sur les exposants des équations de G une transformation définie (Thèse, p. 94) par

$$\begin{aligned} \xi + \beta_1 \omega \eta &\equiv x, & \eta + \beta_1 \omega N \xi &\equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u, \\ \beta_1 \eta &\equiv N^2 y, & \beta_1' \xi &\equiv \beta N y + \beta' x + \beta'' u + \beta''' N z, \\ \beta_1'' \omega \eta &\equiv x'', & \beta_1'' \omega N \xi &\equiv \beta x'' + \beta' y' + \beta'' z'' + \beta''' u', \\ \beta_1''' \eta &\equiv N y', & \beta_1''' N \xi &\equiv \beta N y' + \beta' x' + \beta'' u' + \beta''' N z'. \end{aligned}$$

Si l'on fait $\beta'_1 = \beta''_1 = 0$, il vient

$$x'' \equiv y' \equiv \beta'' z'' + \beta''' u' \equiv \beta'' u' + \beta''' N z' \equiv 0,$$

donc $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$; ainsi on peut faire $\beta'_1 = \beta''_1 = 0$ toujours et seulement si $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$.

Supposons d'abord β'' ou $\beta''' \neq 0$; en prenant

$$\begin{aligned} \eta = y = x' = y' = u' &= 0, & \xi = x = z' &= 1, \\ \beta + \beta'' z + \beta''' u &\equiv \beta' + N \beta''' z + \beta'' u \equiv 0, \end{aligned}$$

on peut faire $\beta_1 = \beta'_1 = 0$, et le calcul s'achève comme dans la Thèse (p. 94, 95).

Supposons maintenant $\beta_1 = \beta'_1 = \beta'' = \beta''' = 0$ donc $\beta' \beta'_1 \neq 0$ et

$$\begin{aligned} x'' = y'' = 0, \quad \xi &\equiv xz' + yu'', \quad \eta \equiv xu'' + Nyz'', \\ (\xi^2 - N\eta^2)(Nx''^2 - u''^2)(x^2 - Ny^2) &\neq 0, \\ \xi + \beta_1 \omega \eta &\equiv x, \quad \eta + \beta_1 \omega N\xi \equiv \beta x + \beta' y, \\ \beta'_1 \eta &\equiv N^2 y, \quad \beta'_1 \xi \equiv \beta N y + \beta' x. \end{aligned}$$

L'élimination de ξ, η puis de x, y entre les quatre dernières équations donne

$$(b) \quad N(\beta' \beta'_1 - \beta^2 \beta'_1) + (N^2 - \beta' \beta'_1)(\beta'_1 - \beta') = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que (β_1, β'_1) fournisse le même type de G que (β, β') .

Considérée comme une équation en β'_1 , l'équation (b) a des solutions rationnelles toujours et seulement si

$$(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 + 4N\beta'^2(\beta_1^2 - N)$$

est carré ou $\equiv 0$. On pourra donc faire $\beta_1 = 0$ toujours et seulement si $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ que l'on peut écrire

$$[(\beta' + N)^2 - N\beta^2][(\beta' - N)^2 - N\beta^2]$$

est carré ou $\equiv 0$.

Supposons d'abord cette condition remplie et soit $\beta_1 = \beta = 0$, la condition (b) qui devient $(\beta'_1 - \beta')(\beta' \beta'_1 - N^2) \equiv 0$ montre qu'il y a pour G $\frac{p+1}{2}$ types qui, en prenant pour N une racine primitive i de p , correspondent à (Cf. Thèse, p. 94)

$$\beta = 0, \quad \beta' = i, i^2, \dots, i^{\frac{p+1}{2}}, \quad \beta'' = \beta''' = 0.$$

Supposons maintenant $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ non carré, donc $\beta\beta' \neq 0$, les types distincts de G correspondent aux systèmes (β, β') vérifiant cette condition et tels que

$$N(\beta'_h \beta_k^2 - \beta_h^2 \beta'_k) + (N^2 - \beta'_h \beta'_k)(\beta'_k - \beta'_h) \neq 0, \quad h \neq k.$$

Pour trouver le nombre des types de G , cherchons d'abord le

nombre des systèmes (β_1, β'_1) solutions de (b). En posant

$$x = \beta'_1 - \frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2\beta'}, \quad y = \beta_1,$$

(b) devient

$$x^2 - Ny^2 \equiv \frac{1}{4\beta'^2} [(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2]$$

et l'on sait (1) que cette équation admet $p+1$ systèmes de solutions. Cherchons ensuite le nombre des systèmes (β, β') tels que $(\beta'^2 - N\beta^2 + N^2)^2 - 4N^2\beta'^2$ soit non carré, c'est-à-dire tels que $\left(\frac{\beta'^2 - N\beta^2 + N^2}{2N\beta'}\right)^2$ soit précédé d'un non carré. L'équation

$$\beta'^2 - N\beta^2 - 2cN\beta' + N^2 = 0,$$

où $c^2 - 1$ désigne un non carré et qui, en posant

$$x = \beta' - cN, \quad y = \beta,$$

devient

$$x^2 - Ny^2 \equiv N^2(c^2 - 1),$$

a comme précédemment $p+1$ systèmes de solutions pour une valeur donnée de c . Comme $c^2 - 1$ parcourt (2) $\frac{1}{4}(p + \epsilon - 2)$ (ϵ désignant le caractère quadratique de -1) valeurs distinctes auxquelles il faut ajouter la valeur -1 si $\epsilon = -1$, il en résulte que c parcourt toujours $\frac{p-1}{2}$ valeurs distinctes. Les $\frac{p^2-1}{2}$ systèmes (β, β') que nous avons à considérer se répartissant en catégories de $p+1$ qui fournissent pour G le même type, il y a exactement pour G $\frac{p-1}{2}$ types distincts.

Dans la liste des g_p (Thèse, p. 164) il faut donc supprimer dans les types (27) celui qui correspond à $\beta' = 0$ et ajouter les $\frac{p-1}{2}$ types pour lesquels les seconds membres des équations sont

$$1, \quad 1, \quad b\beta^2a, \quad b\beta^2, \quad 1, \quad 1, \quad c, \quad ca, \quad cb, \quad db^2N, \quad da, \quad e,$$

(1) DE SÉQUIER, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 44.

(2) Il y a $\frac{1}{4}(p + \epsilon - 2)$ non carrés $\neq 0$ suivis d'un carré $\neq 0$ (DE SÉQUIER, *loc. cit.*).

β_h et β'_h parcourant pour $h = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ les $\frac{1}{2}(p-1)$ systèmes de valeurs telles que l'on ait

$$\begin{aligned} & (\beta_h^2 N \beta_h^2 + N^2)^2 - 4 N^2 \beta_h'^2 \text{ non carré,} \\ & N(\beta'_h \beta_k^2 - \beta_h^2 \beta'_k) + (N^2 - \beta'_h \beta'_k)(\beta'_k - \beta'_h) \neq 0 \text{ pour } h \neq k \\ & \left(h, k = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \right). \end{aligned}$$

LES G_{p^m} (p PREMIER) DONT TOUS LES $G_{p^{m-1}}$ SONT ABÉLIENS;

Par M. POTRON.

1. Ayant rencontré dans ma Thèse de doctorat quelques types de g_{p^m} (p premier) caractérisés par cette propriété, j'ai été amené ⁽¹⁾ à chercher tous les g_{p^m} (p premier) qui la possèdent; je me suis toutefois restreint aux groupes métabéliens. De nouvelles recherches m'ont permis de m'affranchir de cette restriction et d'arriver à la détermination complète des g_{p^m} (p premier) caractérisés par la propriété énoncée. Je les expose dans le présent travail, me bornant à rappeler ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ les résultats partiels obtenus dans ma Thèse, afin de les relier ⁽¹²⁾ au résultat général.

2. Outre les théorèmes de la théorie des groupes employés et cités dans ma Thèse ⁽²⁾, je me servirai principalement des suivants :

I ⁽³⁾. Si C désigne le commutant et P le p. p. c. m. des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des éléments de G , le groupe CP est p. g. c. d. des $g_{p^{m-1}}$ de G . $G|CP$ est d'ailleurs abélien principal.

II ⁽⁴⁾. Soit a_{ij_i} ($i = 1, \dots, v$; $j = 1, \dots, n_i$) une base d'un g_{p^m} abélien G ; pour qu'un système d'éléments $b_{kl_k} = \Pi_{ij_i} a_{ij_i}^{x_{ij_i}^{kl_k}}$ forme

⁽¹⁾ *Thèse*, n° 17-24, p. 30-69, 159, 160, 162. (Paris, Gauthier-Villars, 1904.) Pour la terminologie et les notations, voir ma *Thèse* et DE SÉQUIER, *Éléments de la Théorie des groupes abstraits*.

⁽²⁾ *Thèse*, n° 2.

⁽³⁾ BAGNERA, *R. A. L. R.*, 1898, *A. D. M.* (III^e série), t. II, p. 264.

⁽⁴⁾ *Thèse*, n° 14, p. 24, 25.

un système de générateurs de G , il faut et suffit que la matrice des x soit mod p de rang Σn_i .

III ⁽¹⁾. Pour que tout diviseur d'un g_{p^m} non abélien G soit abélien, il faut et suffit que $G|A$ soit principal d'ordre p^2 et que, en désignant par $\{Ad, Ae\}$ une base de $G|A$, c'est-à-dire par d, e deux éléments non permutables de G , on ait $A = \{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}$. En appliquant le théorème II, la deuxième condition s'exprime ainsi : d et e désignant deux éléments non permutables de G , la matrice des exposants des générateurs d'une base de A dans les expressions $d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de$ est mod p de rang égal au nombre des générateurs d'une base de A . On a d'ailleurs évidemment $G = \{d, e\}$.

3. Parmi les g_{p^m} dont tous les $g_{p^{m-1}}$ sont abéliens figurent évidemment les g_{p^4} et les g_{p^m} dont tous les diviseurs sont abéliens. Ces groupes ayant été déterminés ⁽²⁾, je les laisserai ici de côté et je désignerai toujours par G un g_{p^m} (p premier, $m > 4$) dont tout $g_{p^{m-1}}$ est abélien et dont un $g_{p^{m-1}}$ au moins n'est pas abélien. Soit alors Az_j ($j = 1, \dots, \mu$) un système de générateurs indépendants de $G|A$, je distinguerai les deux cas : $\mu > 2, \mu = 2$.

4. Soit d'abord $\mu > 2$. Quel que soit j , les

$$G_{jk} = \{A, z_j, z_k\} \quad (k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, \mu)$$

sont tous $< G$ et ne peuvent être tous abéliens sans quoi z_j serait dans A . Soit G' un G_{jk} non abélien ; G' est d'indice p dans G et a tous ses diviseurs abéliens, G' peut donc (n° 2, théorème III) être engendré par deux générateurs d, e ; son central A' est

$$\{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}$$

(on a d'ailleurs $A' \geq A$), et G s'obtient en adjoignant à G' un élément f tel que f^p soit dans G' . On a donc

$$G' = \{d, e\} = \{A, d, e\}, \quad G = \{d, e, f\} = \{A, d, e, f\}.$$

En considérant les trois groupes $\{A, d, e\}, \{A, d, f\}, \{A, e, f\}$

⁽¹⁾ Thèse, n° 13, p. 24.

⁽²⁾ Thèse, n° 13-16, p. 23-30.

dont tous les diviseurs sont abéliens, on voit que d^p, e^p, f^p sont permutables à d, e, f , donc dans A ; f^p qui appartient à G' appartient donc à A' ; or A' d'indice p^2 dans G' est d'ordre p^{m-2} ; f étant hors de G' et par suite de A' , $\{A', f\}$ est d'ordre p^{m-2} donc abélien, donc $A' \leq A$. On a donc $A' = A$ et $|G, A| = p^3$.

Les groupes $\{A, d, e\}$ et $\{A, d, f\}$ sont abéliens ou métabeliens; dans ce dernier cas leurs centraux respectifs contenant A et étant d'ordre p^{m-2} sont égaux à A . Les trois groupes $\{A, d, e\}$, $\{A, d, f\}$, $\{A, e, f\}$ étant ou abéliens ou métabeliens de central A , G est métabelien. L'hypothèse $\mu > 2$ ne fournit donc que des types déterminés dans ma Thèse ⁽¹⁾.

5. Soit désormais $\mu = 2$, $G = \{A, e, f\}$; le groupe non abélien $\{e, f\}$ est dans G d'indice $\leq p$. Laisant de côté le cas $\{e, f\} < G$ traité dans ma Thèse ⁽²⁾, je supposerai $\{e, f\} = G$, d'où $CP = \{C, e^p, f^p\}$, donc $(G, CP) \leq p^2$; comme d'autre part il faut $(G, CP) > p$ sans quoi G serait cyclique ⁽³⁾, on a $(G, CP) = p^2$ et CP est abélien. Soit alors $e^{-1}f^{-1}ef = c$; si A contient c , le commutant est $\{c\}$ et G est métabelien; ce cas étant traité dans ma Thèse ⁽⁴⁾, je supposerai que A ne contient pas c et je distinguerai deux cas suivant que le commutant C est cyclique ou non.

6. Supposons C cyclique $= \{d\}$; soit

$$f^{-1}ef = ed^{\delta} \quad (\delta \text{ hors de } A), \quad e^{-1}de = d^{\alpha}, \quad f^{-1}df = d^{\beta};$$

on en tire

$$e^{-\gamma} d^{\alpha} e^{\gamma} = d^{\alpha \gamma}, \quad f^{-z} d^{\beta} f^z = d^{\beta z}, \quad f^{-z} e^{\gamma} f^z = e^{\gamma} d^{\frac{(2\gamma-1)(\beta-1)}{(2-1)(\beta-1)}}.$$

Comme CP est abélien, il faut que d soit permutable à e^p, f^p ; donc

⁽¹⁾ Ces types sont de figure $(s1)(111)$ ou $(s11)(111)$. Leurs équations seront données au n° 12.

⁽²⁾ Thèse, n° 17, p. 30-31. Cette hypothèse conduit à des produits directs et à un type de figure $(rs2)(11)$ dont les équations seront données au n° 12.

⁽³⁾ BURNSIDE, *Theory of groups*, n° 62, 63; DE SÉQUIER, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 137, p. 115. Le théorème complet est : un $g_{p,m}G$ ayant un seul $g_{p,s}$ est cyclique, sauf si l'on a à la fois $p = 2, s = 1, m \geq 3$, auquel cas G est cyclique ou dicyclique. L'exception ne peut se présenter ici où $s = m - 1 > 3$.

⁽⁴⁾ Thèse, n° 17, p. 32. Ces types sont de figure $(rs)(22)$. Leurs équations seront données au n° 12.

que $d^{\alpha} = d^{\beta} = d$. Comme les groupes $\{CP, e\} = \{d, e, f^p\}$ et $\{CP, f\} = \{d, e^p, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens, il faut que d^p (et non d^{δ}), e^{p^2} , f^{p^2} soient permutables à e, f ; donc que

$$d^p \alpha = d^p \beta = d, \quad d^{\delta \frac{\alpha^p - 1}{\alpha - 1}} = d^{\delta \frac{\beta^p - 1}{\beta - 1}} = 1, \quad \delta \neq 0,$$

en sorte que l'on peut supposer $\delta = 1$. En désignant par $p\gamma$ l'ordre de d il faut donc

$$\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{p\gamma^{-1}}, \quad \alpha^p \equiv \beta^p \equiv 1 \pmod{p\gamma}, \quad \frac{\alpha^p - 1}{\alpha - 1} \equiv \frac{\beta^p - 1}{\beta - 1} \equiv 0 \pmod{p\gamma}.$$

Il faut donc d'abord $\gamma > 1$, car, en supposant $\gamma = 1$, les conditions $\alpha^p \equiv \beta^p \equiv 1$ exigeraient $\alpha \equiv \beta \equiv 1$ et d serait normal contrairement à l'hypothèse. Posons alors

$$\alpha = 1 + hp\gamma^{-1}, \quad \beta = 1 + kp\gamma^{-1}, \quad h \text{ ou } k \neq 0;$$

on en tire ⁽¹⁾ (sauf si $p\gamma^{-1} = 2$, auquel cas $\gamma = 2$)

$$\alpha^{p^2} = 1 + h'p\gamma^{-1}, \quad \beta^{p^2} = 1 + k'p\gamma^{-1}, \quad h' \text{ ou } k' \neq 0;$$

les conditions $\frac{\alpha^{p^2} - 1}{\alpha - 1} \equiv \frac{\beta^{p^2} - 1}{\beta - 1} \equiv 0 \pmod{p\gamma}$ exigent donc $\gamma \leq 2$. On a donc toujours $\gamma = 2$ et d est d'ordre p^2 .

Un élément quelconque de G étant de la forme $f^z e^x d^y$ est dans A toujours et seulement si

$$(\alpha - 1)x - \frac{\beta^z - 1}{\beta - 1} \equiv (\beta - 1)y + \frac{\alpha^y - 1}{\alpha - 1} \equiv 0 \pmod{p^2},$$

d'où

$$\frac{\alpha^y - 1}{\alpha - 1} \equiv \frac{\beta^z - 1}{\beta - 1} \equiv 0,$$

et par suite $y \equiv z \equiv 0$; tout élément de A est donc de la forme $f^{p^2} e^{p\gamma} d^x$, donc A divise CP . D'ailleurs le p. p. c. m. des commu-

(1) Si $g\gamma = 1 + hp^2$ (p premier ne divisant pas h , $p \geq 1$), on aura

$$g^{p^2} = 1 + p^{s+1+\eta}(hx + kp)$$

(x premier à p , $\eta = 0$ sauf si l'on a à la fois $p = 2$, $p = 1$, $s \geq 1$ auquel cas η est l'exposant de la plus haute puissance de 2 divisant $h + 1$). [DE SÉQUIER, *Éléments*, n° 25, p. 28, note (2).]

tateurs de e^p, f^p, d avec e, f divise $|d^p|$ et par suite A ; $CP|A$ divise donc le central de $G|A$; comme $CP|A$ est d'indice p^2 dans le groupe non abélien $G|A$, $CP|A$ est exactement le central de $G|A$ et CP est la deuxième central de G .

7. Cherchons à déterminer $G|A$. Soit d'abord $p > 2$. On a toujours $\frac{(\alpha^p-1)(\beta^p-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, donc e^p et f^p ne sont pas normaux; ils sont d'ailleurs indépendants mod A , car, si

$$f^p \equiv e^p \pmod{A},$$

f^p permutable à e et f serait normal; ainsi A est d'indice p^2 dans $\{A, e^p, f^p\}$; je dis que A est aussi d'indice p^2 dans

$$CP = \{A, e^p, f^p, d\},$$

c'est-à-dire que d est dans $\{A, e^p, f^p\}$. Dans l'hypothèse contraire en effet A est d'indice p^3 dans G , on a mod A

$$\begin{aligned} c_1^p &\equiv c_2^p \equiv d^p \equiv 1, & e^p &\equiv c_1, & f^p &\equiv c_2, \\ d^{-1}c_1d &\equiv e^{-1}c_1e \equiv f^{-1}c_1f \equiv c_1, & d^{-1}c_2d &\equiv e^{-1}c_2e \equiv f^{-1}c_2f \equiv c_2, \\ e^{-1}de &\equiv f^{-1}df \equiv d, & f^{-1}ef &\equiv ed; \end{aligned}$$

et l'on a dans G , en tenant compte de toutes les conditions et hypothèses,

$$\begin{aligned} a^p &\equiv 1, & d^p &\equiv a, & e^p &\equiv c_1, & f^p &\equiv c_2, \\ d^{-1}c_1d &\equiv e^{-1}c_1e \equiv c_1, & f^{-1}c_1f &\equiv c_1a, \\ d^{-1}c_2d &\equiv c_2, & e^{-1}c_2e &\equiv c_2a^{-1}, & f^{-1}c_2f &\equiv c_2, \\ e^{-1}de &\equiv da^\lambda, & f^{-1}df &\equiv da^{\lambda'}, & f^{-1}ef &\equiv ed, & (\lambda \text{ ou } \lambda' \not\equiv 0). \end{aligned}$$

Tout élément de G est donc mod A de la forme $f^ve^ud^zc_2^xc_1^x$; A étant d'indice p^3 dans G il faut que l'égalité $f^ve^ud^zc_2^xc_1^x \equiv 1 \pmod{A}$ entraîne $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv v \equiv 0$. Or cette condition n'est pas remplie, car $da^\lambda c_1^{-\lambda'}$ est normal. Ainsi $G|A$ est de figure (11)(11); comme e^p et f^p sont indépendants mod A , un seul des types d'ailleurs connus ⁽¹⁾ des g_p convient, et les équations de $G|A$ peuvent s'écrire

$$\left. \begin{aligned} c^p &\equiv d^p \equiv 1, & e^p &\equiv c, & f^p &\equiv d \\ d^{-1}cd &\equiv e^{-1}ce \equiv f^{-1}cf \equiv c, & e^{-1}de &\equiv f^{-1}df \equiv d, & f^{-1}ef &\equiv ed \end{aligned} \right\} \pmod{A}.$$

(1) DE SÉQUIER, *Éléments*, n° 148, p. 130.

Soit maintenant $p = 2$. On a

$$f^{-1}e^2f = e^2d^{\alpha+1}, \quad f^{-2}ef^2 = ed^{\beta+1}, \quad (\alpha, \beta = 1, 3).$$

On ne peut avoir $\alpha = \beta = 1$, car d serait normal. Si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = 3$, f^2 est normal et $CP = \{A, e^2, d\}$. Le $g_{2^{m-1}}$

$$\{CP, f\} = \{e^2, f, d\}$$

ayant tous ses diviseurs abéliens, on a $\{e^2, f, d\} = \{f, d\}$, donc e^2 est de la forme f^2d^x ; la condition de permutabilité $e^{-1}e^2e = e^2$ exige $x \equiv 0$, et la condition $f^{-1}e^2f = e^2d^2$ exige $x \equiv 1$; e^2 est donc dans $\{A, d\}$ et A est d'indice 2 dans $CP = \{A, d\}$. $G|A$ est donc de figure (1) (11) et a des équations de la forme

$$d^2 \equiv 1, \quad e^2 \equiv d^6, \quad f^2 \equiv 1, \quad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \quad f^{-1}ef \equiv ed, \quad \text{mod } A,$$

que l'on peut toujours ramener à la forme (obtenue dans l'hypothèse $\alpha = \beta = 3$)

$$d^2 \equiv e^2 \equiv f^2 \equiv 1, \quad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \quad f^{-1}ef \equiv ed.$$

8. Achéons de déterminer G . Soit d'abord $p > 2$. Les conditions d'ordre et de figure, jointes aux conditions nécessaires déjà trouvées, donnent

$$\begin{aligned} c^{-1}d^{-1}cd &= c^{-1}e^{-1}ce = d^{-1}f^{-1}df = 1, \\ d^p &= c^{-1}f^{-1}cf = e^{-1}d^{-1}ed \neq 1, \quad d^{p^2} = 1. \end{aligned}$$

Un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est

$$G_{zu} = \{CP, f^ue^z\} = \{A, c, d, f^ue^z\} \quad (z \text{ ou } u \neq 0);$$

on voit directement que G_{zu} (z ou $u \neq 0$) n'est pas abélien et a pour central $\{A, d^uc^z\}$. Alors pour que tout $g_{p^{m-1}}$ de G soit abélien il faut et suffit que tout G_{zu} (z ou $u \neq 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, c'est-à-dire que l'on ait pour tout système de valeurs non simultanément $\equiv 0$ de z, u

$$\begin{aligned} \{A, d^uc^z\} &= \{c^p, d^p, f^{pu}e^{pz}, d^{-pz}, d^{pu}\} \\ &= \{c^p, d^p, f^{pu}e^{pz}\} = \{c^p, d^p, d^uc^za_{zu}\}, \end{aligned}$$

a_{zu} étant dans A . Comme A est d'indice p dans $\{A, d^uc^z\}$, comme $\{c^p, d^p, d^{pu}c^{pz}a_{zu}^p\}$ ou $\{c^p, d^p, a_{zu}^p\}$ divise A et est d'indice p dans

$\{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\}$, l'égalité $\{A, d^u c^z\} = \{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\}$ équivaut à $A = \{c^p, d^p, a_{zu}^p\}$, exige que a_{zu} soit dans $\{c^p, d^p\}$ et équivaut par suite à $A = \{c^p, d^p\}$. Ainsi pour que tout $g_{p^{p-1}}$ de G soit abélien il faut et suffit maintenant que $A = \{c^p, d^p\}$; A étant par suite de figure (s) ou $(s1)$, G est de figure $(s)(11)(11)$ ou $(s1)(11)(11)$.

Parmi les types tous connus ⁽¹⁾ de figure $(s)(11)(11)$ un et un seul satisfait aux conditions énoncées; ses équations sont (type II 2) ⁽²⁾.

$$\begin{aligned} a^{p^2} &= 1, & b^p &= a, & c^p &= a^{p^{p-1}}, & d^p &= b, & e^p &= c, \\ c^{-1}bc &= d^{-1}bd = b, & e^{-1}be &= ba^{p^{p-1}}, \\ d^{-1}cd &= ca^{-p^{p-1}}, & e^{-1}ce &= c, & e^{-1}de &= dc. \end{aligned}$$

Si G est de figure $(s1)(11)(11)$, ses équations peuvent s'écrire, en tenant compte des conditions d'ordre et de figure et changeant un peu les notations,

$$\begin{aligned} a^{p^2} &= b^p = 1, & c^p &= b\beta a^\alpha, & d^p &= b\beta' a^\alpha p^{p-1}, \\ e^p &= c, & f^p &= d\beta' a^\alpha, \\ d^{-1}cd &= e^{-1}ce = c, & f^{-1}cf &= cb\beta' a^\alpha p^{p-1}, \\ e^{-1}de &= db^{-\beta'} a^{-\alpha} p^{p-1}, & f^{-1}df &= d, & f^{-1}ef &= ed. \end{aligned}$$

La condition $A = \{c^p, d^p\}$ qui équivaut à $\alpha\beta' - \beta\alpha' p^{p-1} \not\equiv 0$ montre que l'on peut prendre c^p pour a et d^p pour b , c'est-à-dire faire $\alpha = \beta' = 1$, $\beta = \alpha' = 0$; en prenant ensuite $a^{1-p\beta'}$ pour a , $ca^{-\beta'}$ pour c , $ec^{-\beta'}$ pour e , $fd^{-\beta'}c^{-\alpha'}$ pour f , on peut faire $\alpha' = \beta'' = 0$. Donc pour chaque valeur de s un $g_{p^{p+1}}$ et un seul de figure $(s1)(11)(11)$ a tous ses diviseurs d'indice p^2 abéliens; ses équations sont

$$\begin{aligned} a^{p^2} &= b^p = 1, & c^p &= a, & d^p &= b, & e^p &= c, & f^p &= d, \\ d^{-1}cd &= e^{-1}ce = c, & f^{-1}cf &= cb, & e^{-1}de &= db^{-1}, \\ f^{-1}df &= d, & f^{-1}ef &= ed. \end{aligned}$$

Soit maintenant $p = 2$. Les conditions d'ordre et de figure de G jointes aux conditions nécessaires précédemment trouvées

⁽¹⁾ Thèse, n° 11, p. 17-21, 157; DE SÉQUIER, *Éléments*, n° 158.

⁽²⁾ Ce type présente par erreur l'équation $d^p = 1$ au lieu de $d^p = c$.

donnent

$$d^2 = d^{-1} e^{-1} d e = d^{-1} f^{-1} d f \neq 1, \quad d^3 = 1.$$

Un $g_{2^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{A, d, f^z e^y\} (y \text{ ou } z \equiv 1)$; G_{yz} est non abélien toujours et seulement si $y \not\equiv z$, et en ce cas G_{yz} a pour central A . Alors, pour que tout $g_{2^{m-1}}$ de G soit abélien, il faut et suffit que tout $G_{yz} (y \not\equiv z)$ ait tous ses diviseurs abéliens, c'est-à-dire que l'on ait, pour tout système y, z vérifiant $y + z \equiv 1$,

$$A = \{d^2, (f^z e^y)^2, d^{-1} (f^z e^y)^{-1} d f^z e^y\} = \{d^2, f^{1z} e^{1y}\}.$$

Donc, pour que tout $g_{2^{m-1}}$ de G soit abélien, il faut et suffit maintenant

$$A = \{d^2, e^2\} = \{d^2, f^2\}.$$

A étant par suite de figure (s) ou $(s1)$, G est de figure $(s) (1)$ $(11) (s > 1)$ ou $(s1) (1) (11)$.

Les $g_{2^{m+1}}$ de figure $(s) (1) (11) (1)$ et les $g_{2^{m+1}}$ de figure $(s1) (1) (11) (2)$ sont tous connus. Les conditions trouvées montrent que, pour chaque valeur de s , un $g_{2^{m+1}}$ de figure $(s) (1) (11)$ et un seul $(s > 1)$ dont les équations sont

$$a^{2^s} = 1, \quad b^2 = a^{2^{s-1}}, \quad c^2 = d^2 = a, \quad c^{-1} b c = d^{-1} b d = b a^{2^{s-1}}, \quad d^{-1} c d = c b$$

ainsi que deux $g_{2^{m+1}}$ de figure $(s1) (1) (11)$ et seulement deux dont les équations sont (types 22)

$$a^{2^s} = b^2 = 1, \quad c^2 = b, \quad d^2 = a (1), \quad e^2 = b \beta^s a \quad (\beta^s = 0, 1), \\ d^{-1} c d = e^{-1} c e = c b, \quad e^{-1} d e = d c$$

ont tous leurs diviseurs d'indice 4 abéliens.

9. Supposons maintenant C non cyclique, et soit

$$e^{-1} d e = d b, \quad f^{-1} d f = d c, \quad f^{-1} e f = e d, \quad e^{-1} c e = c c', \quad f^{-1} b f = b b'.$$

L'égalité $f^{-1} e^{-1} d e f = f^{-1} d b f$ donne

$$b' = c';$$

(1) DE SÉQUIER, *Éléments*, n° 150, p. 130-132.

(2) *Thèse*, n° 9, p. 11-14, 159.

(3) Dans ma *Thèse*, l'équation indiquée (p. 156) pour le type 22 de la figure $(s1) (1) (11)$ est par erreur $d^2 = 1$.

soit donc

$$b' = c' = a.$$

Les deux groupes $\{CP, e\} = \{C, e, f^p\}$ et $\{CP, f\} = \{C, e^p, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens, donc a, b, c^p, d^p, f^{p^2} sont permutables à e , et a, b^p, c, d^p, e^{p^2} sont permutables à f , en sorte que $a, b^p, c^p, d^p, e^{p^2}, f^{p^2}$ sont normaux; on trouve d'ailleurs par récurrence

$$\begin{aligned} e^{-u} c^p e^u &= c^p a^p u, & f^{-v} b^p f^v &= b^p a^p v, \\ e^{-u} d^p e^u &= d^p b^p u, & f^{-v} d^p f^v &= d^p c^p v, & f^{-v} e^p f^v &= e^p d^{uv} c^{\binom{v}{2}} b^{\binom{v}{2}}; \end{aligned}$$

il faut donc

$$a^p = b^p = c^p = d^p = 1.$$

Comme d n'est pas normal on peut supposer par exemple $b \neq 1$, il faut donc $\{CP, e\} = \{d, e\}$, donc c est dans $\{d, e\}$; soit

$$c = e^{\gamma} d^{\beta} b^{\alpha},$$

l'égalité $e^{-1} c e = c a$ donne $b^{\beta} = a$, d'où

$$b^{\beta} = a = 1$$

(si $a \neq 1$, b ne serait pas normal et il faudrait $\beta \neq 0$, en sorte que b^{β} ne pourrait être normal). Ainsi b et c sont normaux et $C = \{b, c, d\}$, d non normal ne pouvant être dans $\{b, c\}$. Tout élément de G peut s'écrire $f^v e^u d^z c^p b^x$; cet élément sera normal toujours et seulement si

$$d^{-v} c^{-\binom{v}{2}} b^{z-uv} = d^u c^z b^{\binom{v}{2}} = 1,$$

ce qui exige $u \equiv v \equiv 0$, donc A divise CP .

Pour la suite de la discussion, je distinguerai deux cas, suivant que G contient ou non hors de CP un élément $f^x e^y$ permutable à tout élément de C .

10. Dans la première de ces deux hypothèses, on peut prendre cet élément pour f , c'est-à-dire supposer $c = 1$. Alors $C = \{b, d\}$ et tout élément de G peut s'écrire $f^u e^z d^p b^x$. De $\{CP, e\} = \{d, e\}$ on tire

$$f^p = e^{\gamma} d^{\beta} b^{\alpha}$$

et la formule $f^{-p}ef^p = ed^p$ donne

$$b^{-\beta} = d^p,$$

ce qui (C n'étant pas cyclique) exige $b^{-\beta} = d^p = 1$. Ainsi $d^p = 1$, et C est un g_p principal. Il faut $p > 2$; car, si $p = 2$, on a $f^{-1}e^2f = e^2b$, le $g_{2^{m-1}} \mid \text{CP}, f \mid$ contient le diviseur non abélien $\{e^2, f\}$, et l'on a $\{e^2, f\} < \mid \text{CP}, f \mid$; si, en effet, $\{e^2, f\} = \mid \text{CP}, f \mid$, d serait dans $\{e^2, f\}$ donc de la forme $f^\gamma e^{2\beta} b^\alpha$ et permutable à e^2 et à f , ce qui exige $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, d serait donc normal contrairement à l'hypothèse.

Soit donc

$$p > 2.$$

Tout élément de G pouvant s'écrire mod A $f^u d^z e^y$, G/A est engendré par Ad, Ae, Af, et comme on a

$$d^p \equiv e^p \equiv f^p \equiv 1, \quad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \quad f^{-1}ef \equiv ed \quad \text{mod A},$$

G/A est de figure (1) (11). On a

$$\text{CP} = \{b, d, e^p, f^p\};$$

mais $f^p = e^\gamma b^\alpha$, et, la formule $f^{-1}df^p = d$ exigeant $\gamma \equiv 0$, f^p est dans $\{e^p, b\}$; ainsi $\text{CP} = \{b, d, e^p\}$; un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{b, d, e^p, f^z e^y\}$ (y ou $z \not\equiv 0$); G_{yz} est non abélien toujours et seulement si $y \not\equiv 0$, et en ce cas G_{yz} a pour central A, car $G_{yz} > A$ et $(G_{yz}, A) = p^2$. Pour que tout $g_{p^{m-1}}$ de G soit abélien il faut et suffit que tout G_{yz} ($y \not\equiv 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, donc que l'on ait, quels que soient y ($\not\equiv 0$) et z ,

$$A = \{(f^z e^y)^p, d^{-1}(f^z e^y)^{-1}df^z e^y\} = \{f^{pz} e^{py}, b^y\}$$

on, en tenant compte de $f^p = e^{p\alpha} b^\alpha$, que l'on ait, quels que soient y ($\not\equiv 0$) et z ,

$$A = \{e^{p(\gamma + \gamma z)}, b^y\}.$$

Il faut donc $A = \{e^p, b\}$, en sorte que G est de figure (s) (1) (11) ($s > 1$) ou (s1) (1) (11). Je laisse de côté le cas où e^p est dans b , donc A d'ordre p et G d'ordre p^4 . Alors, pour que l'on ait, quels que soient y ($\not\equiv 0$) et z ,

$$\{e^p, b\} = \{e^{p(\gamma + \gamma z)}, b^y\}$$

il faut et suffit que $\gamma \equiv 0$, c'est-à-dire que f^p soit dans $\{e^{p'}, b\}$.

Les $g_{p^{k+1}}$ de figure (s) (1) (11) (1) et les $g_{p^{k+1}}$ de figure (s 1) (1) (11) (2) sont tous connus. En tenant compte de toutes les conditions, on voit que, pour chaque valeur de s , un $g_{p^{k+1}}$ ($p > 2$) de figure (s) (1) (11) et un seul ($s > 1$) dont les équations sont

$$\begin{aligned} a^{p'} &= 1, & b^p &= 1, & c^p &= a, & d^p &= 1, \\ c^{-1}bc &= ba^{p'-1}, & d^{-1}bd &= b, & d^{-1}cd &= cb, \end{aligned}$$

ainsi que trois $g_{p^{k+1}}$ ($p > 2$) de figure (s 1) (1) (11) et seulement trois dont les équations sont (3)

$$\begin{aligned} a^{p'} &= b^p = 1, & c^p &= 1, & d^p &= a, & e^p &= b^\beta & (\beta = 0, 1, N), \\ d^{-1}cd &= cb, & e^{-1}ce &= c, & e^{-1}de &= dc \end{aligned}$$

ont tous leurs diviseurs d'indice p^2 abéliens.

11. Supposons maintenant qu'aucun élément de G hors de CP n'est permutable à tous les éléments de $C = \{b, c, d\}$. Comme b et c sont normaux (9), il faut et suffit pour cela que G n'ait aucun élément hors de CP permutable à d , c'est-à-dire, comme $e^{-r}f^{-z}df^ze^r = dc^zbx$, que b et c soient indépendants. A n'est donc pas cyclique.

Comme $\{CP, e\}$ et $\{CP, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens il faut $\{CP, e\} = \{d, e\}$, $\{CP, f\} = \{d, f\}$; ainsi e^p est dans $\{d, f\}$ et par suite de la forme $f^r d^\beta c^\alpha$, f^p est dans $\{d, e\}$ et par suite de la forme $e^r d^{\beta'} b^{\alpha'}$. En tenant compte des formules

$$e^{-p}de^p = f^{-p}df^p = d, \quad f^{-1}e^p f = e^p d^p b^e, \quad f^{-p}ef^p = ed^p c^z$$

et des conditions de permutabilité

$$e^{-1}e^p e = e^p, \quad f^{-1}f^p f = f^p,$$

on voit qu'il faut

$$\gamma = \gamma' \equiv 0, \quad (d^p c^e)^{-\gamma p^{-1}} b^\beta = (d^p b^e)^{\gamma' p^{-1}} c^{\beta'} = 1, \quad c^\beta = d^p b^e, \quad b^{-\beta'} = d^p c^e,$$

d'où en éliminant d^p ,

$$c^{\beta+\epsilon} b^{\beta'+\epsilon} = 1, \quad \text{donc} \quad \beta + \epsilon \equiv \beta' + \epsilon \equiv 0.$$

(1) DE SÉGUIER, *Éléments*, n° 150, p. 130-132.

(2) *Thèse*, n° 9, p. 11-14, 156.

(3) Ces types ont été par erreur omis dans ma *Thèse*, p. 13, 156.

Si donc $p > 2$, il faut $\beta \equiv \beta' \equiv 0$, $d^p = 1$; le commutant est un g_{p^2} abélien principal. Si $p = 2$, il faut $\beta \equiv \beta' \equiv 1$, $d^2 = bc$; mais G a toujours des diviseurs non abéliens d'indice 4, on a en effet $|d, fe| < |CP, fe|$, car, si $|d, fe| = |CP, fe|$, e^2 serait dans $|d, fe|$, donc de la forme $(fe)^z d^x (cb)^x$, la condition $e^{-2} d e^2 = d$ exigerait $z \equiv 0$, et, $(fe)^2$ étant normal, la condition $f^{-1} e^2 f = e^2 d^2 b = e^2 c$ exigerait $b^x = c$, ce qui ne se peut.

Soit donc

$$p > 2.$$

Tout élément de G peut s'écrire mod A $f^z e^x d^z$, donc G/A est engendré par $A d, A e, A f$; on a d'ailleurs mod A

$$d^p \equiv e^p \equiv f^p \equiv 1, \quad e^{-1} d e \equiv f^{-1} d f \equiv d, \quad f^{-1} e f \equiv e d,$$

donc G/A est de figure (1) (11). Un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{CP, f^z e^x\}$, y ou $z \not\equiv 0$; d'après les hypothèses faites, G_{yz} (y ou $z \not\equiv 0$) n'est jamais abélien et a pour central A , car $G_{yz} > CP > A$, $(G_{yz}, A) = p^2$. Alors, pour que tout $g_{p^{m-1}}$ de G soit abélien, il faut et suffit que tout G_{yz} (y ou $z \not\equiv 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, donc que l'on ait pour tout système de valeurs de y, z non simultanément $\equiv 0$

$$A = \{(f^z e^x)^p, d^{-1} (f^z e^x)^{-1} d f^z e^x\} = \{f^{p^2} e^{p^2} x, c^z b^y\}.$$

Il faut donc $A = \{e^p, b\} = \{f^p, c\}$; A , n'étant pas cyclique, est de figure (s 1) et G est de figure (s 1) (1) (11). En tenant compte des diverses conditions trouvées et changeant un peu les notations, les équations de G peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a^p &= b^p = 1, & c^p &= 1, & d^p &= b^{\beta} a^{\alpha}, & e^p &= b^{\beta'} a^{\alpha'}, \\ d^{-1} c d &= c b^{\mu} a^{\lambda} p^{-1}, & e^{-1} c e &= c b^{\mu'} a^{\lambda'} p^{-1}, & e^{-1} d e &= d c, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} (\lambda \mu' - \mu \lambda') &\not\equiv 0, \\ \{a, b\} &= \{b^{\beta} y + \beta' z a^{\alpha y + \alpha' z}, b^{\mu y + \mu' z} a^{(\lambda y + \lambda' z) p^{-1}}\} \quad (y \text{ ou } z \not\equiv 0); \end{aligned}$$

la deuxième équivaut (n° 2) à

$$(x y + x' z) (\mu y + \mu' z) - (\beta y + \beta' z) (\lambda y + \lambda' z) p^{s-1} \not\equiv 0 \quad (y \text{ ou } z \not\equiv 0)$$

et exige $s = 1$; G est donc de figure (11) (1) (11); la première

condition montre que l'on peut prendre $b^{\mu}a^{\lambda}$ pour a , $b^{\mu'}a^{\lambda'}$ pour b , c'est-à-dire supposer $\lambda = \mu' = 1$, $\lambda' = \mu = 0$; la deuxième condition devient alors

$$\beta y^2 + (\beta' - 1)yz - \alpha' z^2 \neq 0 \quad (y \text{ ou } z \neq 0)$$

et équivalent à

$$(x - \beta')^2 + 4\beta x' \text{ non carré.}$$

Ainsi les $\frac{1}{2}(p+1) g_{p^m}$ ($p > 2$) de figure (11) (1) (11) vérifiant cette condition, dont les équations sont (1)

$$\begin{aligned} a^p &= b^p = 1, & c^p &= 1, & d^p &= b, & e^p &= b\beta' a^x, \\ d^{-1}cd &= ca, & e^{-1}ce &= cb, & e^{-1}de &= dc, \\ \left[\beta' = 1, \alpha' = \frac{1}{4}(i^{2n-1} - 1) \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right); \beta' = 0, \alpha' = N \right] \end{aligned}$$

et ceux-là seuls ont tous leurs g_{p^m} abéliens.

12. Ainsi l'ensemble des g_{p^m} (p premier, $m > 4$) dont tous les $g_{p^{m-1}}$ sont abéliens sans que tous les $g_{p^{m-1}}$ le soient et qui ne sont pas produits directs comprend :

un type de figure (rs2) (11) ($r \geq s \geq 1$) (2)

$$(1) \quad a^{p^r} = b^{p^r} = c^{p^r} = 1, \quad d^p = a, \quad e^p = b, \quad e^{-1}de = ec^p;$$

un type de figure (s1) (111) ($m > 5$, donc $s > 1$) (3)

$$(2) \quad \begin{cases} a^{p^r} = b^p = 1, & c^p = b, & d^p = 1, & e^p = a, \\ d^{-1}cd = c, & e^{-1}ce = ca^{p^{r-1}}, & e^{-1}de = db; \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(p+3)$ types de figure (11) (111) ($m = 5$, $p > 2$) (4)

$$\begin{aligned} (3) & \quad \left\{ \begin{array}{l} c^p = 1, d^p = a, e^p = b^{-1}, \\ c^p = b, d^p = a^N, e^p = 1, \end{array} \right. \\ (4) & \quad a^p = b^p = 1, \left\{ \begin{array}{l} c^p = b, d^p = a^N, e^p = 1, \\ c^p = b, d^p = ba^{\frac{1}{2}(i^{2n-1}-1)}, e^p = 1, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} d^{-1}cd = c, \\ e^{-1}ce = ca, \\ e^{-1}de = db; \end{array} \right. \\ (5) & \quad \left\{ \begin{array}{l} c^p = b, d^p = ba^{\frac{1}{2}(i^{2n-1}-1)}, e^p = 1, \end{array} \right. \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right) \end{aligned}$$

(1) DE SÉQUIER, *Éléments*, n° 157, p. 141.

(2) *Thèse*, n° 17.

(3) *Thèse*, n° 19, type (7) de la figure (s1) (111) ($s > 1$), p. 160.

(4) *Thèse*, n° 19.

deux types de figure (11) (111) ($m = 5, p = 2$) (1)

$$\begin{aligned} 6) \quad & a^2 = b^2 = 1, c^2 = b, \left\{ \begin{array}{l} d^2 = a, \quad e^2 = a, \\ d^2 = ba, \quad e^2 = 1, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad e^{-1}de = db; \\ \end{array} \right. \\ 7) \quad & \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}(p+1)$ types de figure (s11) (111) ($p > 2$) (2)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{p'} = b^p = c^p = 1, \quad d^p = c, \quad e^p = c\gamma b\beta, \\ \left[\beta = N, \gamma = 0; \beta = \frac{1}{2}(i^{2n-1}-1), \gamma = 1 \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right) \right], \\ e^{-1}de = d, \quad f^{-1}df = db, \quad f^{-1}ef = ec; \end{array} \right.$$

un type de figure (s11) (111) ($p = 2$) (3)

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad d^2 = c, \quad c^2 = cb, \quad f^2 = a, \\ e^{-1}de = d, \quad f^{-1}df = db, \quad f^{-1}ef = ec; \end{array} \right.$$

un, deux ou trois types de figure (rs) (22) ($r \geq s \geq 2$) (4)

$$\begin{aligned} (10) \quad & \left\{ \begin{array}{l} d^{-1}cd = cb^{p'-1}, \quad (r \geq s); \\ d^{-1}cd = cb^{p'-1}a^{p'-1}, \quad (r-1 \geq s); \\ d^{-1}cd = ca^{p'-1}, \quad (r-1 > s); \end{array} \right. \\ (11) \quad & a^{p'} = b^{p'} = 1, \quad c^{p'} = b, \quad d^{p'} = a \\ (12) \quad & \end{aligned}$$

un type de figure (s) (1) (11) ($s > 1, p > 2$) (n° 10)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{p'} = b^p = 1, \quad c^p = a, \quad d^p = 1, \\ c^{-1}bc = ba^{p'-1}, \quad d^{-1}bd = b, \quad d^{-1}cd = cb; \end{array} \right.$$

un type de figure (s) (1) (11) ($s > 1, p = 2$) (n° 8)

$$(14) \quad a^2 = b^2 = 1, c^2 = d^2 = a, c^{-1}bc = d^{-1}bd = ba^{2'-1}, d^{-1}cd = cb;$$

trois types de figure (s1) (1) (11) ($p > 2$) (n° 10)

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{p'} = b^p = c^p = 1, \quad d^p = a, \quad e^p = b\beta \quad (\beta = 0, 1, N), \\ d^{-1}cd = cb, \quad e^{-1}ce = c, \quad e^{-1}de = dc, \end{array} \right.$$

(1) Thèse, n° 19, p. 40.

(2) Thèse, n° 20-23, types (1) et (2) de la figure (s11) (111) ($s > 1$), p. 161, types (26) et (27) de la figure (111) (111), p. 162.

(3) Thèse, n° 20-23, type (3) de la figure (s11) (111) ($s > 1$), p. 161, type (30) de la figure (111) (111), p. 162.

(4) Thèse, n° 24, types (1), (2), (3) de figure (rs) (22), p. 163.

$\frac{1}{2}(p+1)$ types de figure (11) (1) (11) $(p > 2, m = 5) (n^o 11)$

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} a^p = b^p = c^p = 1, \quad d^p = b, \quad e^p = b^2 a^2, \\ \left[\alpha = N, \beta = 0; \alpha = \frac{1}{4} (i^{2n-1} - 1), \beta = 1, \left(n = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \right) \right], \\ d^{-1}cd = ca, \quad e^{-1}ce = cb, \quad e^{-1}de = dc; \end{array} \right.$$

deux types de figure (s1) (1) (11) $(p = 2) (n^o 8)$

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} a^{2^p} = b^2 = 1, \quad c^2 = b, \quad d^2 = a, \quad e^2 = b\beta^2 a \quad (\beta^2 = 0, 1), \\ d^{-1}cd = e^{-1}ce = cb, \quad e^{-1}de = dc, \end{array} \right.$$

un type de figure (s) (11) (11) $(p > 2) (n^o 8)$

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} a^{p^p} = 1, b^p = a, c^p = a^{p^{p-1}}, d^p = b, e^p = c, \\ c^{-1}bc = d^{-1}bd = b, e^{-1}be = ba^{p^{p-1}}, d^{-1}cd = ca^{-p^{p-1}}, \\ e^{-1}ce = c, e^{-1}de = dc; \end{array} \right.$$

un type de figure (s1) (11) (11) $(p > 2) (n^o 8)$

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} a^{p^p} = b^p = 1, c^p = a, d^p = b, e^p = c, f^p = d, \\ d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, f^{-1}cf = cb, e^{-1}de = db^{-1}, f^{-1}df = d, \\ f^{-1}ef = ed. \end{array} \right.$$

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE FINI;

Par M. GEORGES REMOUNDOS.

1. Dans un travail, qui a paru récemment dans les *Arkiv för matematik, astronomi och fysik utgifvet af k. svenska Vetenskapsakademien* (Band 1) sous le titre *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières*, M. A. Wiman a signalé un certain défaut dans le complément apporté par M. Maillet ⁽¹⁾ au théorème bien connu de M. Hadamard sur le module minimum d'une fonction entière. Ce défaut consiste en ce que les cercles décrits par M. Maillet autour des zéros avec un rayon constant, donné d'avance, peuvent recouvrir tout le plan dans le cas où le genre est supérieur à zéro, et alors le théorème n'aurait pas de sens.

⁽¹⁾ Voir *Journal de M. Jordan*, 1902. *Sur les fonctions entières et quasi-entières*

M. Wiman remplace le théorème de M. Maillet par le suivant :

Si l'on décrit autour de chaque zéro a_n un cercle de rayon égal à r_n^{-k} , k étant un nombre aussi grand que l'on voudra, tous les points du plan, qui sont à l'extérieur de ces cercles, satisfont à l'inégalité

$$(1) \quad |F(z)| > e^{-r^{\rho+1}},$$

$F(z)$ étant la fonction entière et ρ son ordre.

M. Wiman ajoute l'énoncé suivant :

Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r assez grand des parties dont la somme est inférieure à une partie quelconque (arbitrairement petite) des arcs restants, tous les autres points satisfont à l'inégalité (1).

En étudiant quelques propriétés ⁽¹⁾ des fonctions à croissance régulière j'ai eu l'occasion de me servir du théorème de M. Hadamard complété et j'ai constaté que la démonstration même que donne M. Maillet dans son Mémoire permet d'établir une proposition plus précise que celle de M. Wiman.

En effet, M. Maillet, suivant l'ordre d'idées de M. Borel, montre que si l'on décrit autour des zéros $a_1, a_2, \dots, a_m$ ⁽²⁾ des cercles de rayon η , l'inégalité

$$(2) \quad |F(z)| > e^{-r^{\sigma+\varepsilon}} \quad (\sigma = \rho + \varepsilon_1)$$

sera satisfaite, s'il en est de même de l'inégalité

$$(3) \quad 2\sigma \left(\log \frac{r}{\eta} + \log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma} \right) < r^\varepsilon.$$

Or, cette dernière inégalité est satisfaite dès que l'on prend

$$\eta = e^{-r^{\varepsilon_1}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

⁽¹⁾ Voir *Comptes rendus*, 20 juin 1904 : *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes*.

⁽²⁾ Je conserve ici les notations de M. Maillet et je prie le lecteur de s'y reporter pour la signification de l'entier m .

Étudions maintenant les arcs qui seront mis à part, sur la circonférence de rayon r , par les cercles exclus de rayon $e^{-r^{\frac{1}{2}}}$.

Chacun de ces arcs sera évidemment inférieur à la circonférence du cercle exclu, qui lui correspond, et dont la longueur est égale à $2\pi e^{-r^{\frac{1}{2}}}$.

D'autre part, le nombre de ces arcs est égal à m , qui est inférieur à $(2r)^{\sigma}$; donc, la somme totale des arcs qui seront exclus est inférieure à

$$2^{\sigma+1} \pi r^{\sigma} e^{-r^{\frac{1}{2}}} < e^{-r^{\frac{1}{2}}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 < \varepsilon_2.$$

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Si l'on exclut sur la circonférence de rayon r , assez grand, certains arcs de longueur totale inférieure à

$$e^{-r^{\alpha}},$$

α étant un nombre positif quelconque inférieur à ε , tous les autres points de la circonférence satisfont à l'inégalité

$$|F(z)| > e^{-r^{\alpha+1}}.$$

Ce théorème est visiblement plus précis que l'énoncé analogue de M. Wiman. C'est là, semble-t-il, la précision la plus extrême que l'on puisse exiger du théorème de M. Hadamard.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUILLET 1904.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. R. de Montessus : *Sur la résolution numérique des équations.*

M. Zervos : *Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée.*

M. Remoundos : *Sur les points singuliers des équations différentielles.*

SÉANCE DU 20 JUILLET 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communication :

M. Carvallo expose les grandes lignes d'un ouvrage sur l'Électricité qu'il va publier prochainement.

SÉANCE DU 3 NOVEMBRE 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communications :

M. Fontené : *Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet, au moyen de polyèdres de genre un.*

M. Bricard : *Sur une classe de cubiques gauches.*

M. Laisant : *Au sujet de l'enquête actuellement poursuivie sur la méthode de travail des mathématiciens.*

SÉANCE DU 17 NOVEMBRE 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Élections :

M^{lle} Mantell, présentée par MM. Carvallo et Bricard ;

MM. K. Miwa, présenté par MM. Carvallo et Laisant ;

Sudria, » Carvallo et Bricard ;

Potron, » de Séguier et d'Ocagne ;

Van Deuren, » Appell et Kœnigs ;

K. Halberstadt, » Ralfy et Grévy ;

Fréchet, » Painlevé et Borel ;

sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Touche : *Sur les travaux de Duchemin.*

M. Humbert : *Sur l'extension à l'espace du théorème de Poncelet*

M. Bricard : *Sur un théorème de M. Fontené.*

SÉANCE DU 1^{er} DÉCEMBRE 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Communication :

M. Painlevé : *Conférence sur la théorie moderne de l'irréductibilité des équations différentielles.*

SÉANCE DU 13 DÉCEMBRE 1904.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Élections :

MM. Fatou, présenté par MM. André et Borel ;
Lemoine, » Brocard et Bioche ;
Voronoi, » Autonne et Hadamard ;
sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Raffy : *Sur la double inversion singulière.*

M. Carvallo : *Sur le flux magnétique à travers le contour d'une surface unilatérale.*

ERRATA.

Dans le Mémoire de M. de Montcheuil : *Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis* (suite), inséré au présent Volume, p. 152, il faut lire : *demi-somme des rayons de courbure*, partout où il y a écrit *segment focal*.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du
Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.)

	Pages.
État de la Société mathématique au commencement de 1904.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[D4b]	Baire (R.). — Sur les séries à termes continus et tous de même signe.....	125
[M,5h, R1e]	Bricard (R.). — Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur des systèmes articulés qui s'y rattachent.	
[H9d]	Clairin (J.). — Remarque sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre...	149
[X8]	Estanave (E.). — Sur un hyperbolographe à liquide.	58
[Q1a]	Fontené (G.). — Les six équations distinctes du triangle en métrique aninvolutive	128
[L'ea]	Fontené (G.). — Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, par des polyèdres de genre <i>un</i>	284
[O6p]	Genty (E.). — Note de Géométrie vectorielle sur les systèmes orthogonaux.....	211
[H9e]	Hadamard (J.). — Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique.....	242
[L'47e z, L'48b]	Humbert (G.). — Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques.....	135
[K6a]	Laisant (C.-A.). — Influence de la forme des équations en Géométrie analytique.....	56
[D1a]	Lebesgue (H.). — Une propriété caractéristique des fonctions de classe <i>un</i>	229
[R7a z]	Lecornu (L.). — Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide.....	55
[O8c]	Lévy (L.). — Sur les déplacements d'une figure plane	

		Pages.
	invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des lignes sphériques.....	303
[C 1 a]	Lucas (F.) . — Sur les dérivées modulaires des polynomes.....	185, 189
[D 4 c]	Mittag-Leffler (G.) . — Sur le théorème de M. Jensen.	1
[O 7 b]	Montoheuil (M. de) . — Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis (<i>suite</i>).....	152
[X 3]	Ocagne (M. d') . — Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques.....	196
[D 4 b]	Petrovitch (M.) . — Remarques sur les zéros des fonctions entières.....	65
[E 5]	Petrovitch (M.) . — Sur les fonctions représentées par une classe étendue d'intégrales définies.....	67
[I 2 c]	Polignac (C. de) . — Recherches sur la divisibilité du nombre $\frac{1.2...nx}{(1.2...x)^n}$ par les puissances de la factorielle $1.2...n$	5
[J 4 d]	Potron (M.) . — Sur quelques groupes d'ordre p^2	296
[J 4 d]	Potron (M.) . — Les g_{p^m} (p premier) dont tous les $g_{p^{m-1}}$ sont abéliens.....	300
[D 3 f b]	Remoundos (G.) . — Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes.....	44
[D 4 b x]	Remoundos (G.) . — Sur les fonctions entières de genre fini.....	314
[J 4 a x]	Séguier (J. de) . — Sur certains groupes de Mathieu.	116
[H 5 j x]	Suchar (P.-J.) . — Sur les équations différentielles réciproques du second ordre.....	103

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

Comptes rendus des séances.....	63, 145 et	316
Table des matières du Tome XXXII.....		319

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXII.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de dix francs; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de vingt francs pour les membres résidents, et de quinze francs pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de trois cents francs, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, avant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

HERMITE et STIELTJES. — Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. BAILLAUD, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et H. BOUGER, Maître de Conférences à l'Université, Astronome adjoint à l'Observatoire de Toulouse, avec une *Préface* de ÉMILE PICARD, Membre de l'Institut.
2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

TOME I (8 novembre 1882 au 22 juillet 1889), Volume de xx-477 pages avec deux portraits; 1905..... 16 fr.

TOME II (*Sous presse.*)

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 4).

Mémoires et Communications.

	Pages.
[D 1a] LEBESGUE (H.). — Une propriété caractéristique des fonctions de classe <i>un</i>	229
[H 9e] HADAMARD (J.). — Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique.....	242
[M ² 5h, R 1e] BRICARD (R.). — Sur une certaine classe de cubiques gauches et sur des systèmes articulés qui s'y rattachent.....	269
[L ² 17eα] FONTENÉ (G.). — Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, par des polyèdres de genre <i>un</i>	284
[J 4d] POTRON (M.). — Sur quelques groupes d'ordre p^4	296
[J 4d] POTRON (M.). — Les g_{p^m} (p premier) dont tous les $g_{p^{m-1}}$ sont abéliens.....	300
[D 4bα] REMOUNDOS (G.). — Sur les fonctions entières de genre fini.	314
Comptes rendus des Séances (juillet à décembre 1904).....	316
Table des matières du Tome XXXII.....	319

AVIS. — Prière de s'adresser dorénavant, pour tout ce qui concerne la rédaction du *Bulletin*, à M. RAFFY, (rue Pierre-Nicole, 7, Paris, 5^e), qui a été élu Secrétaire de la Société mathématique, à la séance du 5 janvier 1905, en remplacement de M. BRICARD, démissionnaire.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

BAIRE (René), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier. — *Leçons sur les fonctions discontinues*, rédigées par A. DENJOY, Elève à l'Ecole Normale supérieure. In-8° (25 × 16) de viii-128 pages avec 29 figures; 1905..... 3 fr. 50 c.

BOREL (E.), Maître de Conférences à l'Ecole Normale supérieure. — *Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynômes*, professées à l'Ecole Normale supérieure et rédigées par MAURICE FRÉCHET, avec des *Notes* par Paul Painlevé et Henri Lebesgue (Collection de monographies sur la théorie des fonctions). Grand in-8 (25 × 16) de 162 pages avec figures; 1904. 4 fr. 50 c.

SÉGUIER (A. de), Docteur ès sciences mathématiques. — *Théorie des groupes finis. Eléments de la théorie des groupes abstraits*. Grand in-8 (25 × 16), de vi-176 pages; 1904..... 5 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

3634) Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-TROISIÈME. — ANNÉE 1905

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ
A LA SORBONNE.
1905

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, Paris (5°);
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6°.

TOME XXXIII. — FASCICULE I.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1903

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*,
banquier, rue de Trévis, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jendis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1° Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2° Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3° Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de une figure pour quatre pages de texte imprimé.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1905 (*).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MANNHEIM. MITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.
Président.....	MM. BOREL.
Vice-Présidents	BIOCHE. BLUTEL. BRICARD. HADAMARD.
Secrétaires	GRÉVY. RAFFY.
Vice-Secrétaires.....	ESTANAVE. LEAU.
Archiviste.....	SERVANT.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil(*).	ANDOYER, 1907. ANDRÉ, 1907. BOURLET, 1908. CARVALLO, 1908. FONTENÉ, 1908. FOURET, 1907. KOENIGS, 1906. LECORNU, 1906. MAILLET, 1908. PAINLEVÉ, 1907. PERRIN (R.), 1906. TOUCHE, 1906.

(*) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétaria les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(*) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17°).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig.
1893. **ADAM** (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris (7°).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. **ANDoyer**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5°).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, 1, rue de la Mouillière, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6°).
1901. **ANGIBOUST**, rue d'Assas, 104, à Paris (6°).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6°).
1900. **AURIC**, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1900. **BAIRE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1396. **BAKER**, professeur à l'Université, à Toronto (Canada).
1894. **BALITRAND**, ingénieur, à Métlaoui (Tunisie).
1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 22, à Paris (7°).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1904. **BERNSTEIN**, docteur ès sciences, rue de la Tombe-Issoire, 144, à Paris (14°).
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), inspecteur général du génie maritime en réserve, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6°).
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9°).
1898. **BLAKE** (Edwin-M.), Université d'Arizona, à Tucson (Arizona, États-Unis).
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), docteur en philosophie, Schwanallée, 7, à Marbourg (Allemagne).
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14°).
1902. **BOBERG** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
1895. **BOREL**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, boulevard Arago, 2, à Paris (13°).
1896. **BOULANGER**, maître de conférences à l'Université, rue Caumartin, 78, à Lille (Nord).
1896. **BOURGET** (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. **BOURLET**, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14°).
1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris.
1904. **BOUTROUX** (P.), docteur ès sciences, rond-point Bugeau 1, 5, à Paris (16°).
1900. **BREIFLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14°).
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.
1901. **BURL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Villefranche, 4, à Montpellier (Hérault).

Dans
de
l'admission.

1893. BURKHARDT, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).
 1897. CABREIRA, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.
 1894. CAHEN, professeur au collège Rollin, 32, rue de la Pompe, à Paris (16°).
 1893. CALDERERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme.
 1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16°).
 1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
 1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17°).
 1896. CARTAN, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.
 1887. CARVALLO, examinateur desortie à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5°).
 1890. CALDERCREUTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), Unionsgatan, 4, à Helsingfors.
 1892. CELLÉNIER (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).
 1887. CERRUTI, professeur à l'Université, piazza S. Pietro in vincoli, 5, à Rome (Italie).
 1888. CHAILAN (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5°).
 1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris (10°).
 1896. CHARVE, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
 1881. CHENIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris (8°).
 1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
 1901. CLAIRIN, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 bis, à Lille (Nord).
 1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9°).
 1890. COLOT, château du Seuil, à Cérons (Gironde).
 1898. COMBÉBIAC, capitaine du génie, docteur ès sciences, à Limoges.
 1900. COMTE (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).
 1896. COSSERAT (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.
 1896. COSSERAT (F.), ingén. en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10°).
 1900. COTTON (Émile), professeur adjoint à l'Université de Grenoble.
 1904. CURTISS, Lawrence street, 220, New-Haven (Connecticut, États-Unis).
 1872. DARBOUT, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5°).
 1885. DAUTHÉVILLE, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier (Hérault).
 1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
 1901. DELASSUS, professeur à la Faculté des Sciences, chemin de Chastre-Monjoux, à Besançon.
 1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.
 1899. DELENER, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille (Nord).
 1885. DENARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
 1892. DEMOULIN (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).
 1897. DENIS (Henry), élève libre à l'École d'application du Génie maritime, rue de Fleury, 23, à Paris (6°).
 1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
 1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
 1900. DICKSTEIN, Marszałkowska, 117, Varsovie.
 1902. DIEGUEZ (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3°, à La Corogne (Espagne).

Date
de
l'admission.

1899. **DRACH** (Jules), chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue des Carmélites. 68, à Poitiers.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, à Zurich (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1897. **DURAN-LORIGA**, command. d'artillerie, plaza de Maria Pita. 20, à la Corogne (Espagne).
1885. **DYCK** (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).
1902. **EGOROFF** (Dimitri), professeur à l'Université, Razgoulai, 2^e gymnase, à Moscou (Russie).
1903. **ESPANET**, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5^e).
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5^e).
1900. **ESTIENNE**, capitaine au 19^e régiment d'artillerie, à Nice.
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, ingénieur aux Forges de Denain (Nord).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier (Hérault).
1904. **FATOU**, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue des Ursulines, 15, à Paris (5^e).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1892. **FERR** (Henri), professeur à l'Université, rue Ph.-Plantamour, 19, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS** (J.), professeur de mathématiques, Liberty street, 21, à Hamilton (Canada).
1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. **FONTANEAU**, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5^e).
1891. **FONTVILANT** (DE), professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris (16^e).
1903. **FORD** (WALTER B.), à Williamstown (Massachusetts, États-Unis).
1889. **FOUCHÉ**, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1872. **FOURÉ**, examinateur à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17^e).
1903. **FRAISSÉ**, agrégé de l'Université, boulevard Saint-Germain, 203, à Paris (6^e).
1904. **FRÉCHET**, agrégé de Mathématiques, rue Bausset, 7, à Paris.
1892. **PROLOV** (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).
1903. **FUETER**, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 14, à Paris (5^e).
1900. **GALDEANO** (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse.
1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17^e).
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6^e).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7^e).
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1896. **GIRARDVILLE**, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16^e).

Date
de
l'admission.

1881. **COURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 270, à Paris (14°).
1896. **GREENHILL**, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Saint-Placide, 62, à Paris (6°).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 bis, à Paris (7°).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1900. **GUICHARD**, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.
1891. **GUINARRES**, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris (7°).
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris (16°).
1882. **HABICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. **HADAMARD**, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14°).
1904. **HALBERSTADT**, ingénieur des Arts et Manufactures, rue des Boulangers, 44, à Paris (5°).
1894. **HALSTED**, professeur à Kenyon Collège, à Gambier (Ohio, États-Unis).
1901. **HANCOCK** (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1900. **HARDEL**, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-Inférieure).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1893. **HIoux**, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1879. **HOLST** (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Høvik, près Christiania (Norvège).
1895. **HOTT** (Stanislas), professeur à l'École S^{ve}-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15°).
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, 33, boulevard Voltaire, à Paris (11°).
1903. **ISSALY** (l'abbé), rue Poquelin-Molière, 9, à Bordeaux.
1896. **JACQUET** (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.
1898. **JAHYKE**, privat docent à l'École Polytechnique de Charlottenburg, Ludwigskirstrasse, 6, à Berlin W¹³ (Allemagne).
1898. **JARRY** (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12°).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5°).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1890. **KÖBB** (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. **KÖCH** (H. vox), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).

Date
de
l'admission.

1880. **KONIGS**, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).
1897. **LACAUGHIE**, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9°).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16°).
1893. **LANCELIN**, astronome adjoint de l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. **LANDAU** (Edmond), privat-docent à l'Université, Sommerstrasse, 2, Berlin, N. W.
1896. **LAROSE**, ingénieur des télégraphes, cité Martignac, 5, à Paris (7°).
1896. **LAUGEL**, ancien attaché d'ambassade, villa Ensoleillée, à Beaulieu-sur-Mer (Alpes-Maritimes).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6°).
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°).
1896. **LEBEL**, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier.
1902. **LEBESGUE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de la Liberté, 11, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1903. **LEBEUF**, directeur de l'observatoire de Besançon.
1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, boulevard de l'Océan, 51, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, place Pereire, 5, à Paris (17°).
1904. **LEMOYNE** (T.), rue Champollion, 11, à Paris (5°).
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes.
1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, rue Notre-Dame-des-Champs, 27, à Paris (6°).
1891. **LERY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1903. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6°).
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16°).
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Nylandagatan, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri-IV, 12, à Paris (4°).
1903. **LOVETT** (E.-O.), professeur à Princeton University, New-Jersey (États-Unis).
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, ingénieur des manufactures de l'État, Manufacture des Tabacs, à Toulouse.
1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Marbeuf, 8, à Paris (8°).
1886. **LYON**, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5°).
1895. **MAILLET**, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).

Date
de
l'admission.

1872. **MANHEIM**, colonel d'artillerie en retraite, professeur honoraire à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (16°).
1903. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 bis, à Paris (12°).
1884. **MARTIN** (Artemas), N. Street, 915, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5°).
1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, rue Maruix, 22, à Gand (Belgique).
1894. **MAUPIN**, professeur au collège, rue de l'Arceau, 30, à Saintes (Charente-Inférieure).
1897. **MEHNKE**, professeur à l'École technique supérieure, Woisselburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7°).
1902. **MERLIN** (E.), avenue Négrié, 46, à Forest-lès-Bruxelles (Belgique).
1902. **MESXY** (R.), professeur d'hydrographie à Saint-Tropez (Var).
1904. **NETZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1893. **MICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10°).
1899. **MILLER** (D^r G.-A.), professeur à Stanford University, Californie (États-Unis).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1897. **MONTCHEUIL** (l'abbé DE), rue du Vieux-Raisin, 11, à Toulouse (Haute-Garonne).
1898. **MONTESUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).
1903. **MULLER** (J.-O.), Kirchweg, 1°, à Göttingen (Allemagne).
1898. **NAUD** (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris (6°).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).
1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Université, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5°).
1882. **OCAGNE** (M. D^r), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8°).
1873. **OVIDIO** (Enrico D^r), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), professeur à l'Université, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6°).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.
1900. **PERCHOT**, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, avenue de l'Observatoire, 1 (5°).
1874. **PERCIN**, général de division, rue de la Faisanderie, 116, à Paris (16°).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis).
1873. **PERRIN**, inspecteur général des mines, rue de Grenelle, 80, à Paris, (7°).
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17°).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).

Date
de
l'admission.

1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Sabalkansky prospect, 17, log. 15, à Saint-Petersbourg.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6°).
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1896. **PIÉRON**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris (6°).
1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63 (3°).
1894. **POTRON**, docteur ès sciences, rue Cassette, 24, à Paris (6°).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5°).
1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue Laffitte, 17, à Paris (9°).
1898. **RABUT** (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. **RADAU**, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris (6°).
1883. **RAFFY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (5°).
1903. **REMOUDOS**, professeur de mathématiques, rue de Soultani, 17, à Athènes.
1900. **RENARD**, rue de la Tour, 7, à Paris (16°).
1903. **RICHARD**, professeur au lycée de Dijon, place du Rosoir, 1, à Dijon.
1893. **RIVEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8°).
1872. **ROUCHÉ**, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard S'-Germain, 213, à Paris (7°).
1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).
1900. **SALTYKOW**, maître ès sciences mathématiques, professeur à l'Institut Polytechnique, rue Pankovskaia, 10, à Kiew (Russie).
1872. **SANTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL**, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7°).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7°).
1900. **SPARRÉ** (comte Magnus DE), avenue de l'Archevêché, 7, à Lyon.
1879. **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).

Date
de
l'admission.

1901. STETSON (Orlando), à Franklin (Massachusetts, États-Unis).
1898. STÖRNER (Carl), professeur à l'Université, Davesgade, 14, à Christiania (Norvège).
1903. SUCHAR, docteur ès sciences, rue Saint-Lazare, 43, à Paris (8°).
1904. SUDRIA, professeur à l'École pratique d'électricité industrielle, rue Ernest-Renan, 28, à Paris (15°).
1904. SUNDMAN, maître de conférences à l'Université d'Helsingfors, Villagatan, 2, Hos Rosenqvist (Finlande).
1872. SYLÖW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1896. TANNENBERG (DE), rue d'Assas, 118, à Paris (6°).
1875. TANNERY, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1882. TARRY (Gaston), rue d'Isly, 19, à Alger (Algérie).
1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, avenue Léonie, 1, à Saint-Cloud (S.-et-O.).
1899. THYBAUT (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue du Rocher, 101, à Paris (8°).
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. TISSOT, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. TORRES, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. TOUCHÉ, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffaut, 23, à Paris (17°).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du général Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1893. VALLÉE-POUSSIN (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1904. VAN DEUREN, lieutenant du génie, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), docteur de l'Université, rue Polyclète, 5, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, chemin des Granges, 45, à Lyon.
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université, via Lucina, 11, à Rome.
1904. VORONÏ, professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
1900. VUIBERT, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris (16°).
1880. WALCKENAEK, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1879. WEILL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8°).
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8°).
1882. ZAROUDESKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Zuamenkaia, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).
1903. ZERVOS, docteur de l'Université d'Athènes, rue de Lille, 48, à Paris (7°).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Rosenvonget, Saint-Kanulkestrøde, 11, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

ACKERMANN-TEUBNER, à Leipzig. — BENOIST (décédé). — BERDELLÉ, à Rioz. — BERNAYNE (décédé). — BIOCHE, à Paris. — BISCHOFFSHEIM, à Paris. — BOBERIL (vicomte R. de), à Rennes. — BORCHARDT (décédé). — BOREL, à Paris. — BROCARD, à Bar-le-Duc. — CANET, à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHASLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris. — COTTON, à Grenoble. — FOURET, à Paris. — GAUTHIER-VILLARS (décédé). — GOURSAT, à Paris. — HALPHEN (décédé). — HALSTED, à Austin. — HADANARD, à Paris. — HATON DE LA GOUPILLIÈRE, à Paris. — HERMITE (décédé). — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — JORDAN, à Paris. — LAFFON DE LADÉBAT (décédé). — LÉAUTÉ, à Paris. — MAILLET, à Bourg-la-Reine. — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico. — MENCEREAU, à Paris. — D'OCAGNE, à Paris. — PEROTT, à Worcester. — PERRIN, à Paris. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC (prince C. de), à Cannes. — RAFFY, à Paris. — SALTYSKOW, à Kiew. — SÉLIVANOFF, à Saint-Petersbourg. — SPARRÉ, (comte M. de), à Saint-Georges-de-Reneins. — SYLOW, à Frederikshald. — TANNERY (Paul) (décédé). — TARNY (G.), à Alger. — TCHEBICHEF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1875	BIENAIMÉ.	1891	COLLIGNON.
1876	DE LA GOURNERIE.	1892	VICAIRE.
1877	MANNHEIM.	1893	HUMBERT.
1878	DARBOUX.	1894	PICQUET.
1879	O. BONNET.	1895	GOURSAT.
1880	JORDAN.	1896	KÉNIGS.
1881	LAGUERRE.	1897	PICARD.
1882	HALPHEN.	1898	LECORNU.
1883	ROUCHÉ.	1899	GUYOU.
1884	PICARD.	1900	POINCARÉ.
1885	APPELL.	1901	D'OCAGNE.
1886	POINCARÉ.	1902	RAFFY.
1887	FOURET.	1903	PAINLEVÉ.
1888	LAISANT.	1904	CARVALLO.

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Pays-Bas.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	Suisse.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	États-Unis.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Cambridge.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	Massachusetts.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas.</i>	
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Portugal.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Danemark.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Autriche.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Grande-Bretagne.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Belgique.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	N ^{lle} -Écosse (Canada)
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Allemagne.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Hollande.
Kansas.....	Université de Kansas.	Finlande.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	États-Unis.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
La Haye.....	Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Pays-Bas.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Allemagne.

Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei.</i>	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Russie.
Varsovie.....	Prace Matematyczno Fizyczne.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Washington.....	Philosophical Society.	États-Unis.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

Sever Fund BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 JANVIER 1903.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et à l'élection de membres du Conseil.

Elle entend et approuve le Rapport de la Commission des finances sur l'exercice 1903-1904.

Communications :

M. Laisant : *Sur les surfaces unilatérales.*

M. Fatou : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.*

M. Raffy : *Sur la condition générale d'isothermie des lignes de courbure.*

SÉANCE DU 19 JANVIER 1903.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Andoyer : *Sur la sommation des séries.*

M. Denjoy : *Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles.*

M. Fatou : *Sur les nombres premiers.*

M. Lebesgue : *Sur la convergence des séries de Fourier.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES MOUVEMENTS D'UNE NAPPE SOUTERRAINE, PARTICULIÈREMENT DANS LES TERRAINS PERMÉABLES, SPONGIEUX ET FISSURÉS ⁽¹⁾;

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Nous déterminerons ici principalement :

1° Les équations indéfinies du mouvement de la nappe dans un pareil terrain, particulièrement dans les périodes où il ne reçoit pas d'apports extérieurs.

2° Les formes du fond de la nappe pour lesquelles il y a un régime où l'épaisseur de la nappe ne dépend que du temps. Il y a alors un régime où le débit de chaque source est de la forme

$$Q = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$
$$(\alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1, \alpha_2, C_1, C_2 \text{ const.}).$$

3° Le cas d'un fond horizontal.

II.

Considérons une nappe souterraine dont le fond a pour équation (dans un système d'axes rectangulaires, Oz étant vertical)

$$(1) \quad z_0 = f_0(x, y),$$

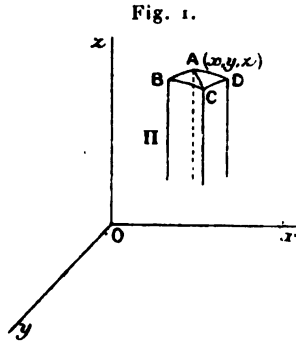
et la surface

$$(2) \quad z = f(x, y, t).$$

Supposons qu'en chaque point l'élément de surface de la nappe dont la projection sur Oxy est $dx dy$ reçoive un apport superficiel venant de l'extérieur $\chi dx dy dt$, pendant le temps dt (χ fonction de x, y et t).

(1) Ce Mémoire a été déposé à la séance du 17 novembre 1904. (*Note de la Réd.*)

Considérons alors ce qui se passe à l'intérieur du prisme indéfini Π dont $dx dy$ est la section droite (fig. 1).



Nous admettons, d'après les expériences de Dupuit, que la vitesse horizontale moyenne v_l sur la verticale en un point A est dirigée dans le plan tangent vertical à la ligne de plus grande pente AC de la surface et proportionnelle à la pente de cette ligne, c'est-à-dire

$$(3) \quad v_l = k \frac{\partial z}{\partial l}$$

(k constante spécifique du terrain) ; elle est orientée du côté où z décroît sur la surface de la nappe ; l désigne une longueur comptée suivant la tangente en (x, y) à la projection P de la ligne de plus grande pente sur Oxy . On a alors

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l},$$

et, si n indique une direction normale à l en (x, y) dans le plan Oxy ,

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial n} = 0 = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n},$$

puisque l est pris sur une ligne de plus grande pente.

Soit α l'angle de Ox et de la tangente à P en (x, y) :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial l} = \cos \alpha = \frac{\partial y}{\partial n}, \\ \frac{\partial y}{\partial l} = \sin \alpha = -\frac{\partial x}{\partial n}; \end{cases}$$

d'après (5),

$$\frac{\partial z}{\partial x} \sin \alpha = \frac{\partial z}{\partial y} \cos \alpha,$$

et, d'après (4),

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Si v_x et v_y sont les composantes de v_l suivant Ox et Oy , d'après (3),

$$(6) \quad \begin{cases} v_x = v_l \cos \alpha = k \frac{\partial z}{\partial x}, \\ v_y = v_l \sin \alpha = k \frac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

Ceci posé, cherchons l'équation de continuité, en examinant ce qui se passe dans le prisme Π pendant le temps dt .

Le volume qui entre à travers la face AB , parallèle à Oyz , est

$$-k\varphi \, dy \, dt (z - z_0) \frac{\partial z}{\partial x};$$

il faut le signe —, car l'expression doit être positive quand $\frac{\partial z}{\partial x}$ est négatif; φ est la proportion du vide par unité de surface dans le terrain.

Le volume qui sort à travers la face CD est

$$-k\varphi \, dy \, dt \left\{ (z - z_0) \frac{\partial z}{\partial x} + dx \frac{\partial}{\partial x} \left[(z - z_0) \frac{\partial z}{\partial x} \right] \right\}.$$

Le prisme perd ainsi

$$-k\varphi \, dx \, dy \, dt \frac{\partial}{\partial x} \left[(z - z_0) \frac{\partial z}{\partial x} \right].$$

Il perd, à travers les faces parallèles à Oxz ,

$$-k\varphi \, dx \, dy \, dt \frac{\partial}{\partial y} \left[(z - z_0) \frac{\partial z}{\partial y} \right].$$

Le prisme gagne d'autre part

$$\chi \, dx \, dy \, dt,$$

apport des parties du terrain non comprises dans la nappe au

temps t et situées au-dessus de la surface libre de celle-ci; cet apport se fait par le haut.

Enfin, à la partie supérieure, le volume de la nappe contenu dans le prisme augmente de

$$\varphi \, dx \, dy \, dt \, \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Il en résulte

$$(7) \quad \frac{\chi}{\varphi} = \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[k(z - z_0) \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[k(z - z_0) \frac{\partial z}{\partial y} \right].$$

Cette équation, quand on y fait $\chi = 0$, se réduit à une équation indiquée par M. Boussinesq ⁽¹⁾; quand on y suppose les mouvements parallèles au plan Oxz , elle se réduit, χ étant quelconque, à une équation indiquée par moi ⁽²⁾.

Elle permettra, par exemple, d'aborder l'étude du mouvement dans une nappe alimentée par les pluies ⁽³⁾, quand on suppose que le mouvement se fait parallèlement à Oxz .

Elle permet encore d'étudier les mouvements d'une nappe dans un terrain perméable et spongieux. Nous allons nous occuper d'un des cas que l'on peut y rencontrer.

III.

Nous supposerons dorénavant un terrain perméable formé de masses de petites dimensions susceptibles de s'imbiber d'eau à certains moments ou de restituer à d'autres moments cette eau d'imbibition. L'eau qui pénètre dans ce terrain, l'eau de pluie par exemple, imbibé en partie les masses qu'elle rencontre, gagne en partie la partie inférieure ⁽⁴⁾ où l'eau circule entre les vides des

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 22 juin 1903, p. 1511. Nous suivons ici une marche assez analogue; nous supposons, dans ce qui précède, k constant; mais (7) subsiste évidemment quand k varie dans l'étendue de la nappe.

⁽²⁾ Équation (21 bis), p. 55 de mes *Essais d'Hydraulique souterraine et fluviale*. Paris, Hermann, 1904.

⁽³⁾ *Ibid.*

⁽⁴⁾ Voir mes *Essais d'Hydraulique* précités, p. 136, 201-205 et 216. Dans le terrain considéré, la nappe est la partie où non seulement les masses en question sont complètement imbibées, mais encore où l'eau remplit tous les intervalles entre ces masses, intervalles qui forment des canaux capillaires.

masses. Voyons ce qui se passe quand il n'y a plus d'apports extérieurs (par la surface du terrain par exemple), ou quand ils sont négligeables.

Sur la verticale qui se projette au point (x, y) , au temps t , la nappe occupe l'espace compris entre le fond, d'ordonnée z_0 , et la surface libre de la nappe, d'ordonnée z . Au-dessus, jusqu'au point d'ordonnée z_1 , par exemple, règne un terrain imbibé qui laisse échapper d'une manière continue son eau d'imbibition suivant une certaine loi. Dans cette partie, un petit volume ω , en (x, y, z_2) , perd, pendant le temps dt , la quantité d'eau d'imbibition

$$k_1 \omega \Phi(t, z_2) dt, \quad (k \text{ const.}),$$

que nous admettons ⁽¹⁾, par hypothèse, être proportionnelle au volume d'eau d'imbibition $\omega \Phi(t, z_2)$ contenu au temps t dans ω . On aura ainsi

$$k_1 \omega \Phi(t, z_2) dt + \omega \Phi'_t(t, z_2) dt = 0$$

ou

$$(8) \quad k_1 \Phi(t, z_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

On peut alors considérer l'apport $\gamma dx dy dt$ dans le prisme Π comme étant au temps t , la somme des apports des masses $dx dy dz$ situées dans ce prisme entre z et z_1 , l'eau perdue par les masses ω étant supposée se mouvoir verticalement vers le bas, et ne pas profiter aux masses ω inférieures situées au-dessus de la surface libre de la nappe; on négligera le temps relativement faible que met l'apport $k_1 \omega \Phi(t, z_2) dt$ pour parvenir en (x, y, z) . On aura alors

$$(9) \quad \begin{aligned} \gamma dx dy dt &= dx dy dt \int_z^{z_1} k_1 \Phi(t, z_2) dz_2, \\ \gamma &= k_1 \int_z^{z_1} \Phi(t, z_2) dz_2. \end{aligned}$$

Cette hypothèse paraît assez plausible *dans des terrains spongieux très fissurés verticalement*.

⁽¹⁾ Comp. *Essais* ci-dessus, p. 204; $\Phi(t, z_2)$ peut dépendre de x et y .

Faisons croître t de dt ; on a, d'après (9),

$$\begin{aligned}\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} dt &= k_1 \int_{z + \frac{\partial z}{\partial t} dt}^{z_1} \Phi(t + dt, z_2) dz_2 \\ &= k_1 \int_z^{z_1} \Phi(t, z_2) dz_2 + k_1 dt \int_z^{z_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz_2 \\ &\quad + k_1 \int_{z + \frac{\partial z}{\partial t} dt}^z \Phi(t, z_2) dz_2,\end{aligned}$$

ou

$$\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} dt = \chi - k_1 dt \int_z^{z_1} k_1 \Phi(t, z_2) dz_2 - k_1 \Phi(t, z) \frac{\partial z}{\partial t} dt,$$

ou

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -k_1 \chi - k_1 A \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (A \text{ const.}),$$

puisque, au contact de la nappe, dont le niveau est supposé s'abaisser, l'imbibition des volumes π que la nappe vient d'abandonner est encore complète, et que $\Phi(t, z) = A = \text{const.}$ L'équation permettant de définir χ est donc

$$(10) \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} + k_1 \chi + k_1 A \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Les équations indéfinies du mouvement dans le terrain perméable, spongieux et fissuré verticalement sont ici les équations (7) et (10).

IV.

Mouvements où l'épaisseur de la nappe ne dépend que du temps. — On peut encore se proposer de chercher quelles sont les formes de nappes où l'épaisseur peut ne dépendre que du temps (c'est-à-dire être la même partout à chaque instant), comme nous l'avons fait pour les nappes en terrains perméables, mais non spongieux ⁽¹⁾ (sensiblement). Posons

$$z = z_0 + \psi,$$

où ψ ne dépend que de t ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{d\psi}{dt}.$$

(1) *Essais d'Hydraulique* précités, p. 48, 53, 55.

(7) et (10) deviennent

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\chi}{\varphi} - \frac{d\psi}{dt} + k\psi \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} + k_1 \chi + k_1 \Lambda \frac{d\psi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Éliminons χ : nous adjoindrons à ces deux équations la première équation (11) dérivée par rapport au temps :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{d^2 \psi}{dt^2} + k \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right) = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi} & 0 & -\frac{d\psi}{dt} + k\psi \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right) \\ k_1 & 1 & k_1 \Lambda \frac{d\psi}{dt} \\ 0 & \frac{1}{\varphi} & -\frac{d^2 \psi}{dt^2} + k \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Développons :

$$(12) \quad \frac{1}{\varphi} \left[-\frac{d^2 \psi}{dt^2} + k \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{k_1}{\varphi} \left[-\frac{d\psi}{dt} + k\psi \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{k_1}{\varphi^2} \Lambda \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$$(12) \quad k \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} \right) \left[\frac{d\psi}{dt} + k_1 \psi \right] = \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} \left(k_1 + k_1 \frac{\Lambda}{\varphi} \right).$$

Il en résulte de suite que l'on a : soit

$$(13) \quad \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 2c = \text{const.},$$

soit

$$(14) \quad \frac{d\psi}{dt} + k_1 \psi = 0.$$

Premier cas : (14) a lieu. — On devra avoir en même temps, d'après (12) :

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1 \frac{\Lambda}{\varphi} \right) \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} + k_1 \psi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + k_1 \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

d'où

$$k_1 \frac{A}{\varphi} \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$\psi = \text{const.} = 0 = \gamma$, ce qui est absurde, ou $A = 0$, ce qui est impossible, le terrain étant spongieux. Finalement, (14) n'a pas lieu.

Deuxième cas : (13) a lieu. — (12) devient

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc \right) \frac{d\psi}{dt} - 2kk_1c\psi = 0.$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants, dont l'intégrale générale est (sauf un cas particulier où $\alpha_1 = \alpha_2$),

$$\psi = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

α_1, α_2 étant les racines de l'équation

$$x^2 - \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc \right) x - 2kk_1c = 0.$$

Nous supposons $c < 0$. Alors

$$\begin{aligned} \delta &= \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc \right)^2 + 8kk_1c \\ &= (k_1 - 2kc)^2 + 2(k_1 - 2kc) \frac{k_1 A}{\varphi} + \frac{k_1^2 A^2}{\varphi^2} + 8kk_1c \\ &= (k_1 + 2kc)^2 + 2(k_1 - 2kc) \frac{k_1 A}{\varphi} + \frac{k_1^2 A^2}{\varphi^2} \end{aligned}$$

est essentiellement positif ⁽¹⁾, et α_1, α_2 sont réels; d'après $c < 0$, α_1, α_2 sont positifs.

Les surfaces (13) ont leur équation de la forme

$$z_0 = f(x + yi) + f_1(x - yi) + c \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

(1) Dans la pratique, $2kc$ sera sans doute parfois petit par rapport à k_1 (voir mes *Essais d'Hydraulique* précités, p. 194, 202-203, 204-206, par exemple), et l'expression δ sera > 0 , d'où $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Il en résulte pratiquement qu'une des racines α_1 est petite par rapport à l'autre α_2 . Alors, dans les limites de la pratique, une expression de la forme $\psi = C_1 + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ pourra représenter γ avec une approximation suffisante. Une expression analogue pourra également suffire pour représenter à peu près le débit d'une source issue de la nappe.

Toutefois, d'après moi, cette théorie semblerait pouvoir plutôt s'appliquer aux sources à variation de débit assez rapide. Ce n'est d'ailleurs qu'une opinion provisoire.

Un cas particulièrement intéressant est celui où le mouvement le fait parallèlement à Oxz , le fond étant un cylindre de génératrices parallèles à Oy . Alors, d'après (13),

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = 2c,$$

$$z_0 = a + bx + cx^2 \quad (c < 0).$$

Le fond est un cylindre parabolique convexe. A la limite amont de la nappe, au sommet de la parabole, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} = b + 2cx = 0$; le débit

$$Q = B(z - z_0) \frac{\partial z}{\partial x}$$

y est nul. Le débit par unité de largeur de la nappe en un point quelconque est

$$Q = B_1 \psi(b + 2cx);$$

par suite, sous certaines hypothèses ⁽¹⁾, le débit d'une source alimentée par cette nappe est de la forme $Q = B_2 \psi$. Donc, appelant encore *régime propre ou non influencé de la nappe en terrain spongieux et fissuré verticalement* celui où elle ne reçoit d'autres apports extérieurs que les pertes d'eau d'imbibition faites par le terrain spongieux situé au-dessus de cette nappe, nous pouvons dire :

Soit une nappe en terrain perméable spongieux et fissuré verticalement dont le fond est un cylindre parabolique convexe de génératrices parallèles à Oy , d'ordonnée

$$z_0 = a + bx + cx^2 \quad (c < 0);$$

il existe pour cette nappe un régime propre ou non influencé où l'épaisseur ψ de la nappe est à l'instant t la même dans toute l'étendue de la nappe ⁽²⁾. On a en général

$$\psi = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

⁽¹⁾ *Essais d'Hydraulique* précités, p. 9. Dans le régime considéré ici, d'après (11), χ est fonction de t seul.

⁽²⁾ Comme dans le cas où $A = \chi = 0$. *Comp. Essais d'Hydraulique* précités, p. 48.

avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Au voisinage d'une verticale quelconque donnée, le débit est proportionnel à ψ .

Dans un cas étendu, le débit d'une source alimentée par cette nappe est proportionnel à ψ .

Nous pouvons encore chercher à étudier si ces nappes peuvent avoir, à la suite d'une pluie uniforme tombant dans leur étendue, le même régime, avec, au besoin, des valeurs différentes des constantes C_1 et C_2 .

Aussitôt après la cessation de la pluie, la fonction $\Phi(t, z_2)$, peut-être aussi la limite z_1 , vont se trouver modifiées; mais l'on voit encore que les mêmes calculs sont applicables. La solution trouvée reste encore valable; les valeurs de C_1 et C_2 pourront être modifiées.

On peut encore chercher les solutions de (7) et (10), où χ est fonction du temps seul. D'après (10), $\frac{\partial z}{\partial t}$ est fonction du temps seul, et

$$z = z_0 + \zeta + \psi,$$

où ψ est fonction de t , ζ fonction de x et y .

On substituera dans (7), et, pour continuer, on s'inspirera de ce que nous avons fait ailleurs (1). On retrouvera, bien entendu, la solution précédente où $\zeta = 0$.

V.

Cas d'un fond horizontal $z_0 = 0$. — Comme l'a fait remarquer M. Boussinesq (2) pour le cas où

$$\Lambda = \chi = 0,$$

on peut encore ici chercher une solution z de la forme

$$z = \psi(t)\zeta(x, y),$$

où ζ ne dépend pas de t , ψ ne contenant que t .

(1) Surtout dans le cas où $\frac{\partial z_0}{\partial y} = 0$; voir *Essais d'Hydraulique* précités, p. 45 et suiv.

(2) *Comptes rendus*, 6 juillet 1903, p. 5 et suivantes.

(7) et (10) deviennent

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\chi}{\varphi} = \zeta \frac{d\psi}{dt} - k\psi^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} + k_1 \chi + k_1 \Lambda \zeta \frac{d\psi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Éliminons χ , en adjoignant aux équations (15) la première de ces deux équations dérivée par rapport à t :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial t} = \zeta \frac{d^2 \psi}{dt^2} - 2k\psi \frac{d\psi}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right],$$

d'où

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi} & 0 & \zeta \frac{d\psi}{dt} - k\psi^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] \\ k_1 & 1 & -k_1 \Lambda \zeta \frac{d\psi}{dt} \\ 0 & \frac{1}{\varphi} & \zeta \frac{d^2 \psi}{dt^2} - 2k\psi \frac{d\psi}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] \end{vmatrix},$$

ou

$$\begin{aligned} & \zeta \frac{d^2 \psi}{dt^2} - 2k\psi \frac{d\psi}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] \\ & + k_1 \left\{ \zeta \frac{d\psi}{dt} - k\psi^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{k_1 \Lambda}{\varphi} \zeta \frac{d\psi}{dt} = 0, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\zeta \left\{ \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1 \frac{\Lambda}{\varphi} \right) \frac{d\psi}{dt} \right\} = \left(2k\psi \frac{d\psi}{dt} + k k_1 \psi^2 \right) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right].$$

On en conclut, λ étant une constante,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \lambda \zeta, \\ & \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1 \frac{\Lambda}{\varphi} \right) \frac{d\psi}{dt} - 2k\lambda\psi \frac{d\psi}{dt} - k k_1 \lambda \psi^2 = 0. \end{aligned}$$

La première de ces deux équations est identique à celle que M. Boussinesq a trouvée par une méthode semblable dans le cas où $\Lambda = \chi = 0$. Quand les mouvements se font parallèlement à Ox , on a encore comme solution une valeur de ζ qui s'exprime par les fonctions elliptiques. Mais la valeur de ψ , qui renfermera deux constantes arbitraires, paraît plus compliquée.

REMARQUES SUR UN CAS DE SYMÉTRIE DANS L'ESPACE;

Par M. CH. BIOCHE.

1. Il est facile de voir que, si une figure de l'espace admet pour axes de symétrie deux droites rectangulaires OX et OY, elle admet un troisième axe OZ perpendiculaire aux deux premiers; mais elle n'admet pas nécessairement pour centre de symétrie le sommet O du trièdre, ou pour plan de symétrie le plan d'une des faces. Le paraboloïde équilatère

$$XY = aZ$$

donne l'exemple le plus simple de surface admettant cette symétrie.

Je vais indiquer, relativement aux courbes gauches, quelques résultats curieux.

2. D'abord, je ferai remarquer que les équations

$$X = F_1(\tan^2 \theta) \cos \theta, \quad Y = F_2(\tan^2 \theta) \sin \theta, \quad Z = F_3(\tan^2 \theta) \tan \theta,$$

où F_1 , F_2 , F_3 sont des fonctions arbitraires, représentent des courbes ayant pour axes de symétrie OX, OY, OZ; les points symétriques du point correspondant à une valeur θ du paramètre correspondent aux valeurs $-\theta$, $\pi - \theta$, $\pi + \theta$ de ce paramètre.

On peut voir qu'une courbe représentée par les équations précédentes n'admet pas, en général, l'origine comme centre de symétrie. Il en résulte qu'elle n'a pas non plus pour plan de symétrie le plan d'une des faces, car l'existence d'un plan de symétrie et d'un axe perpendiculaire entraînerait celle d'un centre, pied de cet axe sur le plan.

3. Mais une courbe ayant pour axes de symétrie OX, OY, OZ et n'ayant pas pour centre de symétrie O, peut avoir des plans de symétrie autres que les faces du trièdre. Ainsi, tandis que la courbe

$$X = a \cos \theta, \quad Y = b \sin \theta, \quad Z = c \tan \theta,$$

n'a aucun plan de symétrie, la courbe

$$X = a \cos \theta, \quad Y = a \sin \theta, \quad Z = c \sin 2\theta,$$

a pour plans de symétrie ⁽¹⁾ les plans

$$X - Y = 0, \quad X + Y = 0.$$

4. Parmi les courbes ayant trois axes de symétrie rectangulaires et pas de centre ou de plan de symétrie, je citerai les lignes de striction des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. Ces lignes ont pour équations

$$\begin{aligned} \frac{X}{a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \cos \theta} &= \frac{Y}{b\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) \sin \theta} = \frac{Z}{c\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin \theta \cos \theta} \\ &= \pm \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} + \frac{1}{c^2}}, \end{aligned}$$

le signe à prendre dans la dernière expression dépendant du système de génératrices; θ est ici l'anomalie excentrique du pied de la génératrice sur le plan du cercle de gorge.

5. Il est encore curieux de noter que, parmi les courbes algébriques à torsion constante obtenues par M. E. Fabry (*Annales de l'École Normale*, juin 1892), il y en a possédant trois axes de symétrie rectangulaires, sans avoir un centre ou un plan de symétrie.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES;

Par M. J. CLAIRIN.

J'ai indiqué récemment ⁽²⁾ une proposition qui complète sur un point les résultats démontrés par M. Goursat, relativement au nombre des invariants que peut posséder un système de caracté-

⁽¹⁾ Les points symétriques correspondent aux valeurs θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ ou θ et $\frac{3\pi}{2} - \theta$ du paramètre.

⁽²⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXII, p. 149.

en posant, d'une manière générale,

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{n-i} - \frac{\partial f}{\partial p_{n-1,1}} \lambda^{n-i-1} + \dots + (-1)^{n-i} \frac{\partial f}{\partial p_{i,n-i}}.$$

Supposons qu'il existe k invariants distincts d'ordre $n + h$: $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k$. Les dérivées partielles de deux quelconques de ces fonctions par rapport aux dérivées d'ordre $n + h$ de z étant proportionnelles, on peut exprimer $\Phi_2, \dots, \Phi_k$ à l'aide de x, y, z , des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n + h - 1$ et de Φ_1 .

Considérons une caractéristique quelconque d'ordre $n + h - 1$, cette caractéristique est contenue dans une infinité de caractéristiques d'ordre $n + h$ dépendant d'une constante arbitraire : choisissons une de ces caractéristiques d'ordre $n + h$, de telle sorte que Φ_1 soit égale à une constante C_1 qui peut être prise arbitrairement, au moins entre certaines limites. D'après la définition des invariants, $\Phi_2, \dots, \Phi_k$ sont égales à certaines constantes $C_2, \dots, C_k$ quand on remplace les lettres qui y figurent par les quantités correspondantes à la caractéristique considérée. Mais $\Phi_2, \dots, \Phi_k$ dépendent seulement de $x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \dots, p_{0,n+h-1}$ et de C_1 ; ce sont donc $k - 1$ invariants d'ordre $n + h - 1$ du système (C).

Nous avons supposé que (C) possédait k invariants d'ordre $n + h$ et nous avons établi qu'il existait alors $k - 1$ invariants d'ordre $n + h - 1$; il en résulte que tous les invariants d'ordre $n + h$ s'expriment en fonction de l'un d'entre eux et des invariants d'ordre inférieur, ce que nous voulions démontrer. La démonstration s'applique aux invariants d'ordre n si le système (C) se compose de caractéristiques d'ordre $n - 1$; en effet, dans ce cas, une caractéristique d'ordre $n - 1$ est contenue dans une infinité de caractéristiques d'ordre n .

On pourrait, par une méthode toute semblable, établir une proposition analogue relative aux systèmes non singuliers d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes dans lesquels le nombre des fonctions inconnues est égal au nombre des équations.

**DÉTERMINATION DES SURFACES DE RÉVOLUTION ADMETTANT
UNE SURFACE DE RÉVOLUTION DONNÉE POUR SURFACE MOYENNE;**

Par M. DE MONTCEUIL.

Désignons par S la surface donnée, par S_1 les surfaces cherchées; par $r, z; r_1, z_1$ les coordonnées respectives des méridiens des deux surfaces.

On vérifie les relations suivantes :

$$r_1 = 2r - \frac{2}{\sqrt{1 + \left(r \int \frac{dz}{r^2}\right)^2}} \int dr \sqrt{1 + \left(r \int \frac{dz}{r^2}\right)^2},$$

$$z_1 = z - r^2 \int \frac{dz}{r^2} + \frac{2r \int \frac{dz}{r^2}}{\sqrt{1 + \left(r \int \frac{dz}{r^2}\right)^2}} \int dr \sqrt{1 + \left(r \int \frac{dz}{r^2}\right)^2},$$

qui donnent la solution du problème.

Deux constantes arbitraires y figurent. L'une d'elles caractérise les diverses surfaces S_1 normales à une même congruence.

Désignons par K la seconde constante, par γ l'angle de la normale à une surface S_1 avec l'axe des z , par α une valeur particulière quelconque de r , par γ_α la valeur correspondante de γ .

On vérifie la relation

$$(1) \quad r \int_a^r \frac{dz}{r^2} + Kr + \cot \gamma = \sigma.$$

D'où

$$K = -\frac{\cot \gamma_\alpha}{\alpha}.$$

Cette expression représente la valeur de la projection sur l'axe des z de la portion de normale à une surface S_1 comprise entre cet axe et son point de rencontre avec S .

Soient d', d'', d''' trois de ces projections, relatives à trois surfaces quelconques S_1 admettant la même surface moyenne S ; d'_a, d''_a, d'''_a celles de ces projections qui passent par le point de S pour lequel on a

$$r = a.$$

Des formules (1) on déduit la relation

$$\frac{(d_a'' - d_a'') d_a'}{d'} + \frac{(d_a' - d_a''') d_a''}{d''} + \frac{(d_a'' - d_a''') d_a'''}{d'''} = 0.$$

Cette formule permet, deux congruences de normales à des surfaces S_1 étant données, de déterminer toutes les autres par une construction purement géométrique. Elle permet, en effet, de déterminer les points où les normales de ces congruences rencontrent l'axe des z .

SUR LES COURBES GAUCHES DE 4^e ORDRE ET DE 4^e CLASSE;

Par M. CH. BIOCHE.

I. — DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS DES COURBES EN QUESTION.

1. Si l'on projette une courbe gauche d'ordre n et de classe k sur un plan, le centre de projection étant un point O de la courbe ne présentant aucune singularité, on obtient une courbe d'ordre $n - 1$. Celle-ci admet pour points d'inflexion :

- 1^o Les projections des points de contact des $k - 3$ plans osculateurs qu'on peut mener de O à la courbe ;
- 2^o Les projections des points d'*inflexion linéaire*, c'est-à-dire des points où la tangente a trois points confondus avec la courbe.

Si $n = 4$, la courbe est une biquadratique ou une quartique, intersection partielle d'une quadrique et d'une surface de 3^e ordre. Dans ce dernier cas, la courbe admet des sécantes triples et elle est unicursale, un plan passant par une sécante triple ne coupant plus la courbe qu'en un point. Si la courbe est une biquadratique, elle ne peut admettre de point d'inflexion linéaire ; sa projection a donc $k - 3$ points d'inflexion ; si $k = 4$, cette projection est une cubique à point de rebroussement, elle est donc unicursale et il en est de même de la courbe de l'espace.

Les coordonnées des points d'une courbe gauche de 4^e ordre et de 4^e classe étant exprimables rationnellement en fonction d'une variable λ , l'équation qui donne les points d'intersection de cette courbe avec un plan contient un paramètre de moins que

n'en comporte l'équation générale du 4^e degré; il en résulte qu'il existe entre les coefficients de l'équation une relation linéaire indépendante du plan considéré. On peut écrire cette relation

$$(1) \quad \alpha + \beta S_1 + \gamma S_2 + \delta S_3 + \epsilon S_4 = 0,$$

S_p représentant la somme des produits p à p des racines.

Si le plan devient osculateur, soit λ la valeur de la variable correspondant au point de contact et λ' la valeur correspondant au point où le plan coupe la courbe, la relation précédente peut s'écrire

$$(2) \quad \alpha + \beta(3\lambda + \lambda') + 3\gamma\lambda(\lambda + \lambda') + \delta\lambda^2(\lambda + 3\lambda') + \epsilon\lambda^3\lambda' = 0.$$

2. Pour que la courbe considérée soit de 4^e classe, il faut et il suffit que la relation précédente se réduise à une relation homographique entre λ et λ' . Or on peut, par une transformation homographique à coefficients réels ou imaginaires, effectuée sur la variable λ , ramener la relation homographique qui doit exister entre λ et λ' à la forme

$$(3) \quad \lambda' = h\lambda.$$

La relation (2) devant se réduire à la relation (3), on doit obtenir une identité si l'on remplace dans la première λ' par $h\lambda$; on voit facilement qu'on ne peut obtenir que les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \alpha = \gamma = \delta = \epsilon = 0, & \quad h = -3, \\ \alpha = \beta = \delta = \epsilon = 0, & \quad h = -1, \\ \alpha = \beta = \gamma = \epsilon = 0, & \quad h = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La relation homographique entre λ et λ' doit donc être l'une des suivantes :

$$\lambda' + 3\lambda = 0, \quad \lambda' + \lambda = 0, \quad 3\lambda' + \lambda = 0$$

et la relation (1) se réduit alors, suivant les cas, à l'une des relations

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0.$$

On voit immédiatement que le premier et le troisième cas reviennent l'un à l'autre si l'on change λ en $\frac{1}{\lambda}$; on n'a donc à con-

sidérer que les deux premiers cas. Ceux-ci sont d'ailleurs essentiellement distincts, puisque, dans le second cas, la relation entre λ et λ' est involutive, tandis qu'elle ne l'est pas dans le premier cas.

3. Dans le premier cas, l'équation en λ qui donne les points d'intersection de la courbe et d'un plan, n'ayant jamais de terme du 3^e degré, les coordonnées d'un point de la courbe ont des expressions de la forme

$$X_i = A_i \lambda^4 + B_i \lambda^3 + C_i \lambda + D_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Des quatre équations on déduit que $\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1$ sont proportionnels à des fonctions linéaires des coordonnées, par suite que les courbes en question sont des transformées homographiques de

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}.$$

On voit de même que les courbes correspondant au second cas sont des transformées homographiques de

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1} \quad (1).$$

II. — PROPRIÉTÉS DES DEUX SORTES DE COURBES DE 4^e ORDRE ET DE 4^e CLASSE.

4. On voit immédiatement que la courbe

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}$$

(¹) Bien que cette Note soit consacrée à des propriétés projectives, je signalerai en passant une propriété métrique curieuse d'une des courbes en question.

Si l'on pose

$$\lambda = e^{i\theta}, \quad X = t + iz, \quad Y = x + iy, \quad Z = x - iy, \quad T = t - iz,$$

on obtient

$$\frac{x}{\cos \theta} = \frac{y}{\sin \theta} = \frac{z}{\sin 2\theta} = \frac{t}{\cos 2\theta}.$$

Si l'on rejette le plan $t = 0$ à l'infini, on obtient une courbe ayant pour axes de symétrie Ox, Oy, Oz et n'ayant ni centre ni plan de symétrie.

est une biquadratique, tandis que la courbe

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}$$

est située sur une seule quadrique, non développable,

$$YZ - XT = 0$$

dont un système de génératrices, celles qui rencontrent les droites $X = 0$, $Z = 0$ et $Y = 0$, $T = 0$, est formé de sécantes triples de la courbe.

Il faut 8 équations de condition pour exprimer qu'une quadrique contient la première courbe et 9 pour exprimer qu'une quadrique contient la seconde courbe. Plus généralement les équations de condition, pour qu'une surface d'ordre m contienne l'une des courbes en question, sont au nombre de $4m$ dans le premier cas, et de $4m + 1$ dans le second.

En effet, soit

$$F(X, Y, Z, T) = 0$$

l'équation générale de degré m ; on a à écrire que l'une des expressions

$$F(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1) \quad \text{ou} \quad F(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1)$$

est identiquement nulle. Or, la première expression est un polynôme en λ où manque le terme d'ordre $4m - 1$, tandis que la seconde est un polynôme complet de degré $4m$.

5. La biquadratique a un point de rebroussement

$$Y = Z = T = 0,$$

la tangente en ce point étant

$$Z = 0, \quad T = 0.$$

La projection de la courbe, faite d'un point quelconque de celle-ci, est une cubique à rebroussement dont l'unique tangente d'inflexion est la trace du plan osculateur mené par le centre de projection.

La quartique à sécantes triples a deux points d'inflexion linéaire,

$$X = Y = Z = 0, \quad Y = Z = T = 0,$$

les tangentes étant

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{et} \quad Z = 0, \quad T = 0.$$

La projection faite d'un point de la courbe est, en général, une cubique à point double dont les tangentes d'inflexion sont : la trace du plan osculateur mené du centre de projection, et les projections des tangentes aux points d'inflexion linéaire.

Si la projection se fait d'un des points d'inflexion linéaire, on obtient une cubique à rebroussement; l'unique tangente d'inflexion est la projection de la tangente au second point d'inflexion linéaire.

6. Il est facile de reconnaître que la développable formée par les tangentes d'une biquadratique de 4^e classe est du 5^e ordre; tandis que la développable des tangentes à l'autre quartique de 4^e classe est du 6^e ordre.

Les cordes qui joignent le point de contact d'un plan osculateur à cette dernière courbe au point d'intersection engendrent une surface du 3^e ordre à directrices rectilignes distinctes

$$XZ^2 - Y^2T = 0;$$

les courbes asymptotiques sont des courbes de même nature que la quartique considérée. Cette propriété est bien connue.

Les cordes de la biquadratique qui joignent le point de contact d'un plan osculateur au point d'intersection engendrent une surface du 5^e ordre. Il est facile d'exprimer les coordonnées des points de cette surface au moyen de λ et d'une autre variable; si la biquadratique est donnée par

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^2, \quad Z = \lambda,$$

la surface en question se représente par

$$X = \lambda^4 + 20\lambda^2\mu, \quad Y = \lambda^2 + 2\lambda\mu, \quad Z = \lambda - \mu,$$

ou, si l'on élimine λ et μ entre ces équations, par

$$8Z^2(2XZ^2 - 5Y^2 + XY) + (7Y^2 - 3X)^2 = 0.$$

On constate facilement que la ligne double de la surface, qui doit être du 6^e ordre, puisque les sections planes sont des courbes

unicursales du 5^e ordre, se compose de la biquadratique et de la conique

$$Z = 0, \quad 7Y^2 - 3X = 0,$$

conique qu'on obtient d'ailleurs dans le premier mode de représentation en faisant $\mu = \lambda$.

La surface contient une autre conique contenue dans le plan $X = 0$.

Les lignes asymptotiques sont données par les équations

$$X = \lambda^4 + \frac{40\lambda^4}{A\lambda^4 - 1}, \quad Y = \lambda^2 + \frac{4\lambda^2}{A\lambda^4 - 1}, \quad Z = \lambda - \frac{2\lambda}{A\lambda^4 - 1},$$

A étant une constante. Elles sont en général du 8^e ordre; pour A infini, on retrouve la biquadratique et pour $A = 0$ une courbe de même nature.

7. Si sur une biquadratique de 4^e classe on prend un point M_0 , si l'on mène le plan osculateur dont le point de contact n'est pas M_0 , on obtient un point M_1 ; en continuant cette construction on obtient des points $M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ en nombre infini. Le $n^{\text{ième}}$ point tend vers celui pour lequel le plan osculateur coupe la courbe en 4 points confondus, qui correspond à $\lambda = 0$.

Si, au contraire, l'on mène le plan osculateur en M_0 qui coupe la courbe en M'_1 , on obtient des points $M'_2, \dots, M'_n$ en nombre infini, le $n^{\text{ième}}$ point tendant vers le point de rebroussement, qui correspond à $\lambda = \infty$.

On a ainsi une propriété analogue à une propriété des courbes planes du 3^e ordre et de 3^e classe étudiée par Clebsch (1).

Pour l'autre quartique de 4^e classe le point de contact et le point d'intersection d'un plan osculateur se correspondant involutivement, ces points se déduisent alternativement l'un de l'autre.

III. — REMARQUES RELATIVES A DES THÉORÈMES DE M. HALPHEN.

8. Dans un Mémoire inséré au Tome III des *Acta mathematica*, M. Halphen déduit de l'étude des équations différentielles

(1) *Leçons de Géométrie*, trad. Benoist, t. II, p. 345.

du 4^e ordre, sans second membre, diverses conséquences géométriques. Il donne en particulier des propriétés des courbes *anharmoniques*, c'est-à-dire des courbes pouvant se transformer homographiquement en elles-mêmes; les courbes anharmoniques algébriques peuvent se représenter par les équations

$$\frac{X}{\lambda^{\alpha}} = \frac{Y}{\lambda^{\beta}} = \frac{Z}{\lambda^{\gamma}} = \frac{T}{1},$$

α, β, γ étant des entiers positifs, premiers entre eux dans leur ensemble.

M. Halphen démontre que :

1^o Si une courbe appartient par ses tangentes à un complexe linéaire et est anharmonique, elle est tracée sur une surface du second degré;

2^o Si une courbe appartient par ses tangentes à un complexe linéaire et est tracée sur une surface du second degré, elle est anharmonique.

La condition pour qu'une courbe anharmonique appartienne par ses tangentes à un complexe linéaire s'exprime, si l'on suppose $\alpha > \beta > \gamma$, par

$$\alpha = \beta + \gamma;$$

on voit alors que la courbe est située sur la quadrique, non développable,

$$YZ - XT = 0.$$

Les courbes que j'ai étudiées sont anharmoniques; la biquadratique n'appartient pas à un complexe linéaire, l'autre quartique appartient à un complexe linéaire.

9. On peut se proposer de chercher dans quels cas une courbe anharmonique algébrique tracée sur une quadrique n'appartient pas à un complexe linéaire.

Il suffit de former l'équation qui donne les λ des points d'intersection d'une courbe anharmonique avec une quadrique, et de chercher dans quel cas cette équation se réduit à une identité. En supposant, pour fixer les idées, $\alpha > \beta > \gamma$, ce qu'on peut toujours

faire, on obtient les cas suivants :

$\alpha = \beta + \gamma$	quadrique :	$YZ - XT = 0,$
$\alpha = 2\beta$	»	$XT - Y^2 = 0,$
$\alpha + \gamma = 2\beta$	»	$XZ - Y^2 = 0,$
$\alpha = 2\gamma$	»	$XT - Z^2 = 0,$
$\beta = 2\gamma$	»	$YT - Z^2 = 0.$

On voit que, dans les quatre derniers cas, la quadrique est développable et qu'elle ne l'est pas dans le premier; et l'on peut conclure de ce qui précède que :

1° Si la courbe est sur une seule quadrique, *non développable*, elle appartient à un complexe linéaire;

2° Si la courbe est une seule quadrique *développable*, elle n'appartient pas à un complexe linéaire;

Enfin, si la courbe est sur deux quadriques, ce ne peut être qu'une cubique gauche ou une biquadratique.

On sait qu'une cubique gauche appartient à un complexe linéaire; d'ailleurs pour la cubique gauche on aurait

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1,$$

et l'équation

$$\alpha = \beta + \gamma$$

exprime la condition en question.

Pour une biquadratique on aurait $\alpha = 4$ et l'on ne pourrait prendre que

$$\beta = 3, \quad \gamma = 2 \quad \text{ou} \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1,$$

ce qui donne les courbes

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda^2} = \frac{T}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}.$$

Or, si l'on change λ en $\frac{1}{\lambda}$, ces équations se déduisent les unes des autres en permutant X et T d'une part, Y et Z d'autre part.

On déduit de cette discussion que *la biquadratique de 4^e classe est la seule courbe anharmonique algébrique par laquelle on puisse faire passer une quadrique, non développable, sans que les tangentes de la courbe appartiennent à un complexe linéaire.*

LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS;

Par M. R. DE MONTESSUS.

Hoéné Wronski ⁽¹⁾ a fondé la réduction numérique des équations *algébriques* sur les fonctions *aleph*. Ces fonctions sont un cas particulier de fonctions plus générales, permettant de résoudre, comme celles-ci, la question posée.

Qui plus est, ces fonctions générales donnent la solution des équations numériques *transcendantes*, au lieu que les fonctions *aleph* n'y sauraient prétendre.

Je vais brièvement exposer la méthode de résolution des équations numériques, telle qu'elle résulte de travaux récents ⁽²⁾, et comparer les résultats de cette méthode avec ceux que H. Wronski avait énoncés *quatre-vingt-dix ans* plus tôt.

Je suppose que l'équation à étudier ne possède que des racines simples. *Deux cas sont à distinguer.*

I. *Les modules des deux racines les plus proches du point $z = 0$ sont différents l'un de l'autre.*

Soit

$$F(z) = 0$$

l'équation proposée et soit α , la racine de moindre module. Si $\Phi(z)$ est une fonction assujettie aux seules conditions : 1° de n'avoir aucun pôle dans le cercle de rayon $|\alpha|$; 2° que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série de puissances entières

$$(1) \quad s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots,$$

on sait que le rapport $\frac{s_p}{s_{p+1}}$ tendra, p croissant indéfiniment, vers la racine α ⁽³⁾.

⁽¹⁾ H. WRONSKI, *Résolution générale des équations de tous les degrés* (*Messianisme*, t. III).

⁽²⁾ HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 90.

⁽³⁾ HADAMARD, *loc. cit.*, p. 38.

Si $F(z)$ est un polynome, on pourra prendre pour $\Phi(z)$ un polynome quelconque. On déterminera alors la série (1) en identifiant les termes de l'identité

$$\Phi(z) = F(z) \times (s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots).$$

On vérifiera *sans peine* que, si

$$F(z) = z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} - \dots + (-1)^m A_m,$$

les coefficients s_m sont déterminés de la manière suivante :

1° Les premiers $s_0, s_1, \dots, s_p$ dépendent du polynome $\Phi(z)$, c'est-à-dire, pour l'objet qui nous préoccupe, sont *arbitraires*; on peut prendre arbitrairement, quel que soit le nombre fini p , les coefficients $s_0, s_1, \dots, s_p$.

2° Les coefficients $s_{p+1}, s_{p+2}, \dots$ vérifient la loi de récurrence

$$(2) \quad -A_m s_n + A_{m-1} s_{n-1} + \dots + (-1)^m A_1 s_{n-(m-1)} + (-1)^{m+1} s_{n-m} = 0 \quad (n < p).$$

Semblablement, le calcul de la racine de plus grand module, à la supposer seule de ce module, peut se faire comme il suit :

Faisant sur l'équation la transformation $z = \frac{1}{Z}$, on est ramené au cas précédent.

Si

$$\sigma_0 + \sigma_1 Z + \sigma_2 Z^2 + \dots$$

est le développement en série de la fonction

$$\frac{\Phi_1(Z)}{F_1(Z)},$$

où $F_1(Z) = 0$ est la transformée de $F(z) = 0$ par la substitution $z = \frac{1}{Z}$,

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$$

tend vers la racine en question.

Ici les fonctions σ vérifient la loi de récurrence

$$(3) \quad \sigma_n - A_1 \sigma_{n-1} + A_2 \sigma_{n-2} - \dots + (-1)^m A_m \sigma_{n-m} = 0.$$

J. Bernoulli connaissait ce procédé de calcul des racines de

plus petit et plus grand module *dans le cas où l'équation est algébrique.*

Wronski de même. Ce dernier employé à cet effet les fonctions *aleph*. Les fonctions *aleph positives* correspondent aux fonctions σ et sont définies par les conditions

$$\text{Aleph de zéro} = \mathfrak{A}_0(0) = \mathfrak{A}_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^0 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)^0 = 1,$$

$$\text{Aleph de un} = \mathfrak{A}_0(1) = \mathfrak{A}_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)^1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m,$$

$$\text{Aleph de deux} = \mathfrak{A}_0(2) = \mathfrak{A}_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)^2 = \Sigma \alpha_i^2 + \Sigma \alpha_i \alpha_j,$$

$$\text{Aleph de trois} = \mathfrak{A}_0(3) = \mathfrak{A}_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)^3 = \Sigma \alpha_i^3 + \Sigma \alpha_i^2 \alpha_j + \Sigma \alpha_i \alpha_j \alpha_k,$$

où le symbole $()_1$ indique que, dans le développement de

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)^p,$$

on doit remplacer tous les facteurs p , $\frac{p(p-1)}{1.2}$, $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$, ... par l'unité.

Les fonctions $\mathfrak{A}$ vérifient les relations de récurrence (3) et la limite de $\frac{\mathfrak{A}(p+1)}{\mathfrak{A}(p)}$, quand p croît indéfiniment, n'est autre que la racine de plus grand module de l'équation, *si toutes les autres racines ont des modules moindres.*

Le calcul de la racine de moindre module, à supposer que toutes les autres racines soient plus grandes en modules, se fait de même par les fonctions *aleph négatives*, définies comme il suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(-1) &= \mathfrak{A}(-2) = \mathfrak{A}(-3) = \dots = \mathfrak{A}[-(m-1)] = 0, \\ -A_m \mathfrak{A}[-(n+m)] &+ A_{m-1} \mathfrak{A}[-(n+m-1)] \\ &- A_{m-2} \mathfrak{A}[-(n+m-2)] + \dots \\ &+ (-1)^{m-1} \mathfrak{A}[-(n+1)] + (-1)^{m-1} \mathfrak{A}(-n) = 0, \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la relation de récurrence (2).

II. *Les modules des deux racines les plus proches de l'origine sont identiques.*

Si les modules des racines de l'équation, algébrique ou non, vérifient les inégalités

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| < |\alpha_3| \leq |\alpha_4| \leq \dots,$$

on peut former l'équation du second degré admettant les racines α_1, α_2 , sous condition qu'il existe une fonction $\Phi(z)$ n'ayant aucun

pôle dans le cercle de rayon $|\alpha_2|$ et telle que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série suivant les puissances entières de la variable z . En effet, on peut écrire

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)} = \frac{A}{z_1 - z} + \frac{B}{z_2 - z} + \frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} \quad \text{où} \quad F_1(z) = \frac{F(z)}{(z_1 - z)(z_2 - z)},$$

$$\frac{A}{\alpha_1 - z} = \frac{A}{\alpha_1} + \frac{A z}{\alpha_1^2} + \frac{A z^2}{\alpha_1^3} + \dots + \frac{A z^{n-1}}{\alpha_1^n} + \dots,$$

$$\frac{B}{\alpha_2 - z} = \frac{B}{\alpha_2} + \frac{B z}{\alpha_2^2} + \frac{B z^2}{\alpha_2^3} + \dots + \frac{B z^{n-1}}{\alpha_2^n} + \dots,$$

$$(4) \quad \frac{\Phi(z)}{F(z)} = s'_0 + s'_1 z + s'_2 z^2 + \dots + s'_n z^n + \dots,$$

et si

$$\frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots + s_n z^n + \dots :$$

1°

$$s_n = \frac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n;$$

2° Les quantités $\alpha_1^n s'_n$, $\alpha_2^n s'_n$ tendent vers zéro quand n croît indéfiniment.

Car la série (4) converge par hypothèse dans un cercle de rayon $> |\alpha_2|$, puisque les pôles de $\Phi(z)$ [ou $\Phi_1(z)$] et les zéros de $F_1(z)$ sont extérieurs au cercle de rayon $|\alpha_2|$. Donc les séries $\Sigma \alpha_1^n s'_n$, $\Sigma \alpha_2^n s'_n$ convergent, ce qui justifie la proposition. Cela posé, étudions le déterminant

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{A}{\alpha_1^n} + \frac{B}{\alpha_2^n} + s'_{n-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \frac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la deuxième colonne par α_1^p et retranchant de la première, il vient

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} \frac{B}{\alpha_2^n} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la première colonne par $\frac{1}{\alpha_2^p}$ et retranchant de la deuxième, multipliée au préalable par $1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}$,

$$D_{n,p} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \left| \begin{array}{cc} \frac{B}{\alpha_2^n} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_{n-1} + s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_n + s'_{n+p} \end{array} \right|$$

d'où

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \left| \begin{array}{cc} B \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) + \alpha_2 \alpha_2^{n-1} s'_{n-1} - \alpha_1 \frac{\alpha_1^{p-1}}{\alpha_2^p} \alpha_2^{n-1} s'_{n+p-1} & A \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) - \alpha_1 \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \alpha_2^{n-1} s'_{n-1} + \alpha_1 \alpha_2^{n+p-1} s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) + \alpha_2 s'_n - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \alpha_2^{n+p} s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \alpha_2^n s'_n + \alpha_2^{n+p} s'_{n+p} \end{array} \right|$$

Les expressions *soulignées* tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, p restant fini et bien déterminé.

Donc

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p} = \frac{AB}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} & 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \\ \frac{1}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) & \frac{1}{\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) \end{array} \right| + R_{n,p} = AB \left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) + R_{n,p}$$

où $R_{n,p}$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment, p restant fini, et

$$\alpha_1^{n+p+1} \alpha_2^{n+p+1} D_{n,p} = AB (\alpha_2^p - \alpha_1^p) (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}.$$

On en conclut

$$\frac{\alpha_1^{n+p+1} \alpha_2^{n+p+1} D_{n,p}}{\alpha_1^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} D_{n+1,p}} = \frac{AB (\alpha_2^p - \alpha_1^p) (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}}{AB (\alpha_2^p - \alpha_1^p) (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n+1,p}};$$

d'où

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+p} \\ s_{n+1} & s_{n+p+1} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2.$$

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n \\ s_n & s_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2$$

On en conclut encore

$$\frac{\alpha_2^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} D_{n,p+1}}{\alpha_1^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} D_{n+1,p}} = \frac{AB(\alpha_2^{p+1} - \alpha_1^{p+1})(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+2} R_{n,p+1}}{AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^p R_{n+1,p}};$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p} \\ s_n & s_{n+p+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+p} \\ s_{n+1} & s_{n+p+1} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_2^{p+1} - \alpha_1^{p+1}}{\alpha_2^p - \alpha_1^p}.$$

En particulier,

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+1} \\ s_n & s_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Ainsi, quand n croît indéfiniment, les racines de l'équation

$$(7) \quad x^2 - \frac{s_n s_{n+1} - s_{n-1} s_{n+2}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} x + \frac{s_n^2 - s_{n-1} s_{n+1}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} = 0$$

tendent vers α_1, α_2 .

On peut de même construire l'équation ayant pour racines les deux racines de plus grand module α_1, α_2 sous condition que leurs modules soient plus grands que les modules de toutes les autres racines.

Wronski, au moyen des fonctions *aleph* composées, qui sont aux fonctions *aleph* simples ce que les coefficients de l'équation en α_1, α_2 sont à $s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$, a formé semblablement l'équation (7) et l'équation donnant les deux racines de plus grands modules.

III Les modules des $p(p > 2)$ racines les plus proches du point $z = 0$ sont identiques.

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leq |\alpha_{p+2}| \leq \dots$$

Dans ce cas, comme dans le cas de $p = 2$, on peut former ⁽¹⁾, et Wronski l'avait fait, l'équation de degré p admettant les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; Wronski avait aussi formé l'équation admettant les racines $\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_m$ si $|\alpha_q| > |\alpha_{q+1}| \leq |\alpha_{q+2}| \leq \dots \leq |\alpha_m|$.

Il est plus simple d'observer qu'une substitution $z = a + Z$ où a est convenablement choisi, et d'ailleurs facile à choisir, fait que une ou deux racines seulement se trouvent sur le cercle de convergence de $\frac{\Phi(Z)}{F(Z)}$.

La méthode indiquée donnera donc, dans tous les cas, soit *une*, soit *deux* racines : je parle de valeurs approchées. D'où formation possible d'une équation approchée, admettant comme racines des valeurs approchées des autres racines de la proposée. On pourra calculer ainsi des valeurs *approchées* des racines de l'équation proposée. Cela permettra de construire un cercle C de centre $x = h$, $y = k$ à l'intérieur duquel sera la *seule* racine α_λ que l'on voudra calculer avec telle approximation fixée à l'avance. Faisant, en effet, sur l'équation, la substitution

$$x + iy = z = X + h + i(Y + k),$$

l'équation transformée en Z aura la *seule* racine $\alpha_\lambda + h + ik$ dans le cercle C ayant son centre au point $Z = 0$. Dès lors, la méthode exposée au paragraphe I permettra de calculer $\alpha_\lambda + h + ik$, d'où α_λ , avec telle approximation que l'on voudra.

IV. Dans la méthode exposée, le choix des indéterminées

$$s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$$

influe sur la convergence plus ou moins rapide des rapports déterminant les racines. *Nous n'avons actuellement aucun moyen d'étudier A PRIORI la rapidité de la convergence. Si nous remarquons que dans les équations traitées par Wronski (et ces équations ne peuvent avoir été choisies à cet effet) la convergence s'affirme comme TRÈS RAPIDE, nous devons conclure que le CHOIX DES FONCTIONS ALEPH EST, selon toute vraisemblance, PARFAITEMENT APPROPRIÉ A LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.*

(¹) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 41.

Conclusion. — H. Wronski avait indiqué, voici près d'un siècle, la méthode de réduction des équations numériques algébriques que de récents travaux ont retrouvée, seule méthode qui atteigne pleinement le but proposé.

A vrai dire, Wronski n'avait pas fait la discussion de sa méthode : mais les notions restreintes que les géomètres ses contemporains avaient de l'Analyse ne lui permettaient pas de faire cette discussion.

Du moins, Wronski a-t-il eu le mérite d'indiquer une *base*, les fonctions *aleph*, permettant de construire des expressions rapidement convergentes, ce que nul après lui n'a tenté.

Cependant, l'exposé de Wronski est à ce point... *obscur* et plus, qu'il ne pouvait guère être compris tel qu'il est. *Il était nécessaire*, pourrait-on dire, *que les résultats de l'énigmatique Polonais fussent retrouvés par une voie nouvelle.*

SUR L'INTERPOLATION;

Par M. S. BERNSTEIN.

M. Borel a soulevé récemment au Congrès de Heidelberg la question de la convergence des séries de polynômes qu'on obtient par l'interpolation. Cette question a déjà été traitée d'une façon détaillée par M. Runge (¹). Le résultat de cette étude peut se résumer ainsi : les polynômes approchés d'une fonction continue donnés par la formule de Newton ne convergent, en général, vers aucune limite. Cette étude met une fois de plus en évidence le fait qu'en général la possibilité du développement d'une fonction en une série de polynômes sur un segment dépend essentiellement de la régularité de la fonction (supposée analytique) dans une région déterminée entourant ce segment.

Le praticien (qui ne trouverait pas le calcul de la formule de Newton trop embarrassant) pourrait évidemment objecter que l'expérience immédiate ne lui défend pas d'identifier sa fonction à

(¹) *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1901.

un polynome et de lui attribuer ainsi toute la régularité désirable dans le domaine complexe.

Mais justement à la circonstance théorique signalée plus haut correspond ce fait pratiquement important qu'une *variation inappréciable des données expérimentales conduit à une variation considérable des valeurs des polynomes approchés en certains points intermédiaires*. En réalité, les praticiens préfèrent se servir comme courbes représentatives approchées de leur fonction des lignes polygonales qui passent par des points déterminés expérimentalement. Il est clair que ce dernier mode d'interpolation permet de représenter la fonction avec toute la précision que comportent les mesures directes. Il m'a paru intéressant de ramener le calcul de ces lignes brisées à un algorithme analytique. La chose est aisée; nous verrons qu'il suffit d'introduire la fonction $|x|$ qui signifie comme toujours *valeur absolue de x* .

Soit $y = F(x)$ une fonction uniforme et continue lorsque x varie de 0 à 1. Considérons la ligne brisée ayant pour sommets les points

$$P_0[0, F(0)]; \quad P_1\left[\frac{1}{n}, F\left(\frac{1}{n}\right)\right]; \quad P_2\left[\frac{2}{n}, F\left(\frac{2}{n}\right)\right]; \quad \dots; \quad P_n[1, F(1)].$$

Si l'équation de cette ligne brisée est

$$y_n = F_n(x),$$

il est évident que la série

$$y = y_{\alpha_1} + (y_{\alpha_1} - y_{\alpha_1}) + \dots + (y_{\alpha_k} - y_{\alpha_{k-1}}) + \dots$$

converge uniformément sur le segment 01, pourvu que α_k croisse indéfiniment avec k . Cherchons donc l'expression de $F_n(x)$. Il est clair que

$$(1) \quad F_n(x) = A_0|x| + A_1\left|x - \frac{1}{n}\right| + \dots + A_n|x - 1|,$$

avec

$$(2) \quad A_x = \frac{n}{2} \left\{ F\left(\frac{x+1}{n}\right) + F\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2F\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

et

$$(3) \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{2} \left\{ F(1) + nF\left(\frac{1}{n}\right) - (n-1)F(0) \right\}, \\ A_n = \frac{1}{2} \left\{ F(0) + nF\left(\frac{n-1}{n}\right) - (n-1)F(1) \right\}. \end{cases}$$

Ces formules sont une conséquence immédiate de la propriété de la fonction $|x|$ que ses différences secondes sont nulles partout sauf pour $x = 0$. On voit que l'usage et la démonstration de ces formules n'exigent que des connaissances tout à fait élémentaires. Si l'on veut sortir du domaine des mathématiques élémentaires il est aisé de rattacher nos formules au calcul intégral. Supposons que $F(x)$ admette des dérivées des deux premiers ordres. On a évidemment pour $n = \infty$

$$(2 \text{ bis}) \quad A_x = \frac{1}{2} F'' \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{n},$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) + F'(0) \}, \\ A_n = \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) - F'(1) \}. \end{cases}$$

De sorte que

$$(1 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 F''(z) |x - z| dz + \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) + F'(0) \} |x| \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) - F'(1) \} |1 - x| \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 F''(z) |x - z| dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) - F'(1) \} + \frac{x}{2} \{ F'(0) + F'(1) \}. \end{aligned} \right.$$

L'égalité (1 bis) est facile à vérifier directement. L'interpolation des fonctions continues de plusieurs variables se fait d'une façon toute semblable en introduisant à la place de la fonction élémentaire $|x|$ les fonctions $|x, y|$ ou $|x, y, z|$ etc. Le calcul des coefficients ainsi que les diverses opérations ne présentent pas de difficulté. Les lignes au moyen desquelles nous avons cherché à approcher notre fonction continue admettent des tangentes discontinues; c'étaient celles qui se présentent géométriquement le plus naturellement. Mais, si l'on voulait interpoler au moyen de fonctions discontinues, on obtiendrait des formules encore plus simples.

Supposons, en effet, qu'on nous donne les valeurs $F(0)$, $F\left(\frac{1}{n}\right)$, ..., $F(1)$ et construisons la fonction discontinue $F_n(x)$ qui

de 0 à $\frac{1}{n}$ ($\frac{1}{n}$ exclu) égale $F(0)$, de $\frac{1}{n}$ à $\frac{2}{n}$ ($\frac{2}{n}$ exclu) égale $F(\frac{1}{n})$ et ainsi de suite, enfin $F_n(1) = F(1)$. Si nous introduisons la fonction $\lambda(x)$ telle que $\lambda(x) = 0$ pour $-\infty < x < 0$ et $\lambda(x) = 1$ pour $0 \leq x < \infty$, on a évidemment :

$$F_n(x) = A_0 h(x) + A_1 \lambda\left(x - \frac{1}{n}\right) + \dots + A_n \lambda(x - 1),$$

où

$$A_0 = F(0),$$

$$A_1 = F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0),$$

.....,

$$A_n = F(1) - F\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Tous les calculs, avec ces séries, se font avec le plus haut degré de simplicité. La généralisation pour le cas de plusieurs variables est immédiate. Il est aisé encore de reconnaître que ce procédé d'interpolation se rattache à la formule

$$F(x) = \int_0^1 F'(z) \lambda(x - z) dz + F(0).$$

.

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES;

Par M. H. ANDOYER.

La méthode qui se présente naturellement pour obtenir la somme d'une série numérique consiste à calculer directement la somme d'un certain nombre de termes à partir du premier, et à fixer, quand on le peut, une limite de l'erreur ainsi commise. Malheureusement, il arrive trop souvent que cette méthode n'a aucune valeur pratique : c'est ainsi qu'en calculant exactement la somme des vingt mille premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

et en supposant que les calculs eux-mêmes ne donnent lieu à

aucune erreur, on obtient un résultat dont l'erreur atteint encore 0,000025 environ.

Cependant les ouvrages classiques en usage de nos jours sont muets sur les méthodes à employer pour obtenir des résultats plus satisfaisants. Il ne semblera donc peut-être pas inutile d'indiquer comment on peut procéder pour obtenir rapidement, avec une grande précision, facile d'ailleurs à évaluer, la somme de certaines séries formant une classe très étendue. Le principe de la méthode que nous allons expliquer est indiqué et longuement développé par J. Stirling (*Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, Londres, 1730); nous n'avons fait que le présenter d'une façon générale et approprier son exposition aux habitudes actuelles.

Envisageons la série convergente de terme général u_n , l'indice n prenant successivement les valeurs $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, telle que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit développable suivant les puissances décroissantes de n ; c'est-à-dire que, q étant un entier positif quelconque, on peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_q}{n^q} + \frac{A_{q+1}}{n^{q+1}},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ étant des constantes, et A_{q+1} une fonction de n ayant une limite quand n devient infini.

On a d'ailleurs $|\alpha_0| \leq 1$; de plus, si $\alpha_0 = 1$, il faut, comme on sait d'après la règle de Gauss, $\alpha_1 < -1$; et si $\alpha_0 = -1$, le premier des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ qui n'est pas nul est positif.

Si

$$s_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n-1} + u_n,$$

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots,$$

la somme de la série est

$$S = s_n + r_n.$$

Soit z_n une fonction de n ayant comme limite zéro pour n infini, et faisons

$$u'_n = u_n + z_{n+1} - z_n;$$

la série dont le terme général est u'_n est convergente, et si l'on

fait

$$r'_n = u'_{n+1} + u'_{n+2} + \dots,$$

on a évidemment

$$r_n = s_{n+1} + r'_n;$$

si de plus on pose

$$s_n = u_n t_n,$$

on a

$$u'_n = u_n \left(1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1} \right),$$

avec

$$r_n = u_{n+1} t_{n+1} + r'_n.$$

Le calcul de r_n est ainsi ramené à celui de r'_n ; en choisissant t_n de façon convenable, on pourra, comme nous allons le voir, obtenir une valeur approchée de r_n comprise entre des limites faciles à déterminer, et, en ajoutant à r_n la somme s_n calculée directement, on aura finalement S avec une approximation qu'on peut fixer.

Pour le choix de t_n il est nécessaire de distinguer deux cas, suivant que α_0 est inférieur ou égal à 1.

Supposons d'abord $\alpha_0 < 1$, et faisons

$$t_{n+1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

les β_i étant des constantes, p un entier positif quelconque. On aura par suite

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n-1} + \frac{\beta_2}{(n-1)^2} + \dots + \frac{\beta_{p+1}}{(n-1)^{p+1}},$$

et en développant chaque terme suivant les puissances décroissantes de n , on a

$$\begin{aligned} t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \frac{\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1}{n^3} + \dots \\ + \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\beta_{p-2} + \dots}{n^p} + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}}, \end{aligned}$$

la loi des numérateurs étant évidente, et B_{p+1} étant une fonction de n ayant une limite pour n infini.

Si maintenant nous nous servons de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en y

faisant $q = p$, on voit que l'expression

$$T = 1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}$$

se développe elle-même sous la forme

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots + \frac{\gamma_p}{n^p} + \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$ étant des constantes, et C_{p+1} une fonction de n ayant une limite pour n infini. On voit alors que, à cause de $1 - \alpha_0 \neq 0$, on peut choisir $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ de façon à annuler $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$, et de plus β_{p+1} de façon que la limite de C_{p+1} ait une valeur donnée à l'avance quelconque.

Si l'on a $\alpha_0 = 1$, le calcul précédent est impossible; mais on arrive au même résultat en faisant

$$t_{n+1} = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p},$$

d'où

$$t_n = \beta n + (\beta_0 - \beta) + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \dots + \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \dots}{n^p} + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

comme plus haut; en se servant de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, où l'on fait $q = p + 1$, on peut encore déterminer $\beta, \beta_0, \dots, \beta_{p-1}, \beta_p$ de façon que T ait la forme $\frac{C_{p+1}}{n^{p+1}}$, C_{p+1} ayant une limite arbitraire.

Ainsi, dans tous les cas

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

C_{p+1} ayant une limite quelconque; or, on peut prendre n assez grand pour que la somme r'_n ait le signe de son premier terme u'_{n+1} ; en supposant donc la limite de C_{p+1} successivement positive et négative, on aura deux valeurs de r'_n , fournies par l'expression $u_{n+1} t_{n+1}$, approchées en sens contraire, et d'autant moins différentes que p sera plus grand. Il en sera de même pour la somme S de la série proposée.

Les exemples suivants feront bien comprendre l'esprit de la méthode et son application.

1^{re} Soit

$$u_n = \frac{(-1)^{n-n_0} C}{n-1},$$

C étant une constante.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{1}{n},$$

et l'on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{\beta_1}{n^2},$$

on a

$$C_1 = -\beta_1 \left[1 + \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 - \frac{1}{n} \right] + \frac{n(2n-1)^2}{8(n-1)^2}.$$

Pour $\beta_1 = 0$, la limite de C_1 est positive; pour $\beta_1 = \frac{1}{2}$, elle est négative, en donnant donc successivement ces deux valeurs à β_1 , dans t_{n+1} , la valeur de r_n sera comprise entre les deux valeurs obtenues pour u_{n+1}, t_{n+1} . Faisons par exemple $C=1$, $n_0=2$, $n=10$, de sorte que la série à sommer est

$$\log \text{ nép } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

On a directement

$$s_n = 0,745634920 \dots,$$

et r_n est compris entre $-0,0524875$ et $-0,0524880$; donc S est compris entre

$$0,69314742 \dots \text{ et } 0,69314692 \dots$$

De même en faisant

$$C=2, \quad n_0 = \frac{3}{2}, \quad n = \frac{19}{2},$$

de sorte que la série à sommer est

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

on a directement

$$s_n = 3,25236593 \dots,$$

et r_n est compris entre $-0,11077263 \dots$ et $-0,11077399$; donc

S est compris entre

$$3,14159330\dots \text{ et } 3,14159194\dots$$

2° Soit

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^2},$$

de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2};$$

on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{30n^2} + \frac{\beta_3}{n^3},$$

on a

$$C_3 = \frac{5n^3 - 5n^2}{30(n-1)^3} - \beta_3 \left[\frac{n^3}{(n-1)^3} - n + 2 - \frac{1}{n} \right].$$

Pour $\beta_3 = 0$, la limite de C_3 est positive; pour $\beta_3 = \frac{1}{10}$, elle est négative.

Faisant $n_0 = 2$, $n = 10$, de sorte que la série à sommer est

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

on a directement

$$s_n = 1,539767731\dots,$$

et r_n est compris entre

$$0,105166333\dots \text{ et } 0,105166343\dots;$$

donc S est compris entre

$$1,644934064\dots \text{ et } 1,644934074\dots$$

Pratiquement, on se dispense de calculer la quantité C_{p+1} , et l'allure du développement de t_{n+1} permet de se rendre compte d'une façon suffisante de l'approximation obtenue en arrêtant ce développement à un certain rang.

GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE;

Par M. ÉMILE COTTON.

La première Partie de ce travail concerne les mouvements à plusieurs paramètres de l'espace ordinaire. Je montre comment on passe des formules habituelles définissant les éléments géométriques attachés aux trajectoires aux formules analogues relatives au trièdre mobile : on substitue aux dérivées des coordonnées ordinaires certaines fonctions des paramètres du mouvement; ces fonctions se déterminent de proche en proche par une méthode simple.

Dans la suite, j'attribue au mot *mouvement* un sens plus étendu encore. J'appelle, par exemple, *mouvement d'ensemble* à p paramètres $u_1, \dots, u_p$ d'un espace $E(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à un espace fixe $E'(x'_1, \dots, x'_n)$ une correspondance entre les $2n + p$ variables x, x' et u , obtenue en remplaçant dans les équations

$$x_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

d'un groupe fini continu et transitif G , les paramètres $a_1, \dots, a_r$ par des fonctions des variables $u_1, \dots, u_p$.

Au lieu de supposer le mouvement d'ensemble explicitement donné, on peut le considérer comme déterminé par l'un de ces systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales dont j'ai fait antérieurement l'étude ⁽¹⁾. On parvient alors (II^e Partie) à un principe de passage analogue à celui du début, tant par sa forme que par ses conséquences.

Dans la III^e Partie, je montre que la notion d'élément réduit ⁽²⁾ relatif à une multiplicité de l'espace E' et au groupe G , permet d'attacher à toute multiplicité à p dimensions, un mouvement d'ensemble à p paramètres dont l'étude peut être substituée à celle de la multiplicité.

Cette notion de mouvement auxiliaire permet de présenter sous

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 6 janvier 1902. *Annales de l'Université de Grenoble*, t. XVI, p. 367. Les renvois à ce dernier travail sont indiqués, dans la suite, par les mots *Systèmes* (L).

⁽²⁾ TRESSE, *Acta mathematica*, t. XVIII.

une forme intuitive un résultat donné par M. Vessiot dans l'un de ses beaux Mémoires (1) sur l'application de la théorie des groupes aux systèmes différentiels; il s'agit de la décomposition d'un système différentiel admettant un groupe en un système résolvant et un système automorphe.

Il n'est question ici que de groupes finis; mais ce cas particulier est important en Géométrie. J'espère que le présent travail facilitera l'utilisation des groupes (autres que celui des mouvements) qui se présentent naturellement dans des questions classiques; tel est, par exemple, le groupe de la représentation conforme.

J'indique rapidement, en terminant, de quelle façon on pourrait en tirer parti dans la recherche des systèmes triples orthogonaux.

I. — SUR LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE.

1. Nous dirons qu'un point M est animé par rapport à un trièdre T'(O'x'y'z') d'un *mouvement à deux paramètres* (2) u, v , lorsque les coordonnées x', y', z' de M sont fonctions des deux variables u, v .

Nous appellerons *vitesse* de M relativement à u , le vecteur $\overline{MM}_u$ dont les projections sont $\frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \frac{\partial z'}{\partial u}$; et définirons de même la vitesse $\overline{MM}_v$ relative à v .

Par le point fixe O', menons le vecteur $\overline{O'V_u}$ équipollent à $\overline{MM}_u$; et par M menons des vecteurs $\overline{MM}_{u^2}$, $\overline{MM}_{uv}$ équipollents respectivement aux vitesses de V_u relativement à u et v . Nous dirons que ces vecteurs $\overline{MM}_{u^2}$ ou J_{u^2} et $\overline{MM}_{uv}$ ou J_{uv} sont les accélérations relatives à u^2 et à uv . On définit d'une façon analogue les accélérations J_{vu} et J_{v^2} relatives à vu et à v^2 ; d'ailleurs J_{uv} et J_{vu} sont identiques.

(1) VESSIOT, *Annales de l'École Normale*, 1903 et 1904; *Acta mathematica*, t. XXVIII. Ce dernier Mémoire est le plus important pour le sujet qui nous occupe.

(2) Nous distinguons le *mouvement* d'un point du *déplacement* de ce point. Dans le déplacement on ne s'occupe que de l'ensemble des positions occupées par le point variable; dans le mouvement on tient compte de la relation entre ces positions et les valeurs de certains paramètres. Si l'on remplace u, v par des fonctions de u', v' , les nouvelles expressions de $x'y'z'$ définissent le même déplacement que les anciennes, et un nouveau mouvement.

Des accélérations du premier ordre, que l'on vient de définir, on passe à celles du second ordre J_{u^2} , J_{u^1v} , J_{uv^2} , J_{v^3} , puis à celles du troisième, du quatrième, . . . , du $n^{\text{ième}}$ ordre par le même procédé qui permet de définir les accélérations du premier ordre en partant des vitesses. Les accélérations d'ordre n sont des vecteurs, ayant M pour origine, dont les projections sur $O'x'$ sont les dérivées d'ordre $n + 1$ de x' , et de même pour $O'y'$ et $O'z'$.

2. Imaginons maintenant que le mouvement absolu ⁽¹⁾ de M soit déterminé par l'expression, en fonction des variables u, v , des coordonnées x, y, z de M relativement à un trièdre mobile $Oxyz$ ou T, le mouvement de T par rapport à T' étant donné par un système (L) d'équations linéaires aux différentielles totales, complètement intégrable.

Nous allons calculer les projections des vitesses et des accélérations sur les axes du nouveau trièdre.

Soit

$$(1) \begin{cases} dx + \xi du + \xi_1 dv + (q du + q_1 dv)z - (r du + r_1 dv)y = 0, \\ dy + \eta du + \eta_1 dv + (r du + r_1 dv)x - (p du + p_1 dv)z = 0, \\ dz + \zeta du + \zeta_1 dv + (p du + p_1 dv)y - (q du + q_1 dv)x = 0, \end{cases}$$

le système (L) considéré ⁽²⁾.

D'après la façon même dont on obtient (1), on peut écrire les projections des vitesses

$$(2) \begin{cases} \overline{MM'_u} \quad x_{10} = \frac{\partial x}{\partial u} + \xi + qz - ry, & y_{10} = \frac{\partial y}{\partial u} + \eta + rx - pz, & z_{10} = \frac{\partial z}{\partial u} + \zeta + py - qx, \\ \overline{MM'_v} \quad x_{01} = \frac{\partial x}{\partial v} + \xi_1 + q_1z - r_1y, & y_{01} = \frac{\partial y}{\partial v} + \eta_1 + r_1x - p_1z, & z_{01} = \frac{\partial z}{\partial v} + \zeta_1 + p_1y - q_1x. \end{cases}$$

Nous désignerons, d'une façon générale, par $x_{\alpha\beta}$, $y_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$ les projections sur les axes de T de l'accélération d'ordre $\alpha + \beta - 1$ relative à u^α et v^β . On obtient ces projections en reprenant le rai-

⁽¹⁾ Les mots *mouvement absolu*, *mouvement relatif*, *mouvement d'entraînement* seront employés avec un sens analogue à celui qu'ils ont en Cinématique.

⁽²⁾ Tout système d'intégrales de (1) détermine les coordonnées (relatives à T) d'un point fixé à T'. Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, Chap. VII, et KOENIGS, *Cinématique*, Chap. X.

sonnement classique ⁽¹⁾ qui conduit, en Cinématique, aux formules de Bour et à leur généralisation.

On a ainsi les formules de récurrence

$$(3) \quad \begin{cases} x_{\alpha+1,\beta} = \frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial u} + q z_{\alpha\beta} - r y_{\alpha\beta}, \\ y_{\alpha+1,\beta} = \frac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial u} + r x_{\alpha\beta} - p z_{\alpha\beta}, \\ z_{\alpha+1,\beta} = \frac{\partial z_{\alpha\beta}}{\partial u} + p y_{\alpha\beta} - q x_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x_{\alpha,\beta+1} = \frac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial v} + q_1 z_{\alpha\beta} - r_1 y_{\alpha\beta}, \\ y_{\alpha,\beta+1} = \frac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial v} + r_1 x_{\alpha\beta} - p_1 z_{\alpha\beta}, \\ z_{\alpha,\beta+1} = \frac{\partial z_{\alpha\beta}}{\partial v} + p_1 y_{\alpha\beta} - q_1 x_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

applicables aussi aux accélérations du premier ordre ⁽²⁾. Ces formules ne dépendent que des fonctions x, y, z et des $p, p_1, \dots, \zeta, \zeta_1$, celles-ci satisfaisant aux conditions d'intégrabilité connues.

3. L'emploi des formules précédentes repose sur une remarque bien simple :

Choisissons pour le trièdre fixe T'(O'x'y'z'), resté jusqu'ici arbitraire, la position occupée par le trièdre mobile T pour les valeurs numériques u^0, v^0 de u et v . Les valeurs pour u^0, v^0 des coordonnées x', y', z' de leurs dérivées d'ordre 1, 2, ..., n sont égales aux expressions obtenues en remplaçant u par u^0, v par v^0 dans les fonctions correspondantes $x, y, z, x_{10}, \dots, z_{0n}$.

La remarque antérieure nous donne immédiatement la représentation, par des séries entières, du mouvement absolu de M au voisinage des valeurs u^0 et v^0 de u et v . En développant en série de Taylor les coordonnées x, y, z de M, dont la signification vient

(1) KÖNIGS, *Cinématique*, p. 130 et 149.

(2) Les diverses expressions que l'on peut obtenir pour les projections d'une même accélération sont identiques en vertu des conditions d'intégrabilité.

d'être précisée, on a ⁽¹⁾

$$(5) \quad \begin{cases} x' = x^0 + x_{10}^0(u - u_0) + x_{01}^0(v - v_0) + \frac{1}{2}x_{20}^0(u - u_0)^2 \\ \quad + \frac{1}{2}x_{11}^0(u - u_0)(v - v_0) + \frac{1}{2}x_{02}^0(v - v_0)^2 + \dots, \\ y' = y^0 + \dots, \quad z' = z^0 + \dots \end{cases}$$

Nous désignons par f^0 la valeur d'une fonction f de u et v pour les valeurs numériques u^0, v^0 de ces variables.

4. *Considérons un système S' de relations de la forme* ⁽²⁾

$$\mathfrak{F}(x', y', z', \frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^n z'}{\partial v^n}) = 0$$

définissant, relativement au trièdre fixe T', des éléments géométriques remarquables attachés à la surface trajectoire absolue de M. Ces éléments sont soit des grandeurs (courbure moyenne, courbure totale, ...), soit des surfaces ou lignes remarquables (plan tangent, tangentes asymptotiques, ...).

Le système S' est donné par la Géométrie différentielle ordinaire, le système S donnant les mêmes éléments rapportés au trièdre mobile s'en déduit en remplaçant x', y', z' par x, y, z , et les dérivées $\frac{\partial^{x+\beta} x'}{\partial u^x \partial v^\beta}, \frac{\partial^{x+\beta} y'}{\partial u^x \partial v^\beta}, \frac{\partial^{x+\beta} z'}{\partial u^x \partial v^\beta}$ par $x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta}, z_{\alpha\beta}$.

Par exemple, pour l'origine O du trièdre mobile, on a

$$(6) \quad \begin{cases} x = 0, & x_{10} = \xi, & x_{01} = \xi_1, & x_{20} = \frac{\partial \xi}{\partial u} + q\xi - r\eta, \\ x_{11} = \frac{\partial \xi}{\partial v} + q_1\xi - r_1\eta = \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + q\xi_1 - r\eta_1, & x_{02} = \frac{\partial \xi_1}{\partial v} + q_1\xi_1 - r_1\eta_1, \end{cases}$$

et des formules analogues pour y et z .

5. Des formules habituelles relatives aux coordonnées curvilignes on déduit : l'équation (relative à T) du plan tangent à la trajectoire d'entraînement de O

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = 0;$$

⁽¹⁾ Cf. KÄRNIGS, *Cinématique*, p. 154-156.

⁽²⁾ Nous supprimons l'indice zéro devenu inutile.

l'équation différentielle des lignes asymptotiques, qui s'obtient en remplaçant, dans la précédente, X par

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + q\zeta - r\eta\right) du^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} + q_1\zeta - r_1\eta + \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + q\zeta_1 - r\eta_1\right) du dv + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1\right) dv^2,$$

Y et Z par des expressions analogues. On retrouvera facilement ainsi des résultats connus (1).

Il serait aisé de multiplier les exemples et les applications; d'étudier, par exemple, la distribution des éléments remarquables relatifs aux surfaces trajectoires des différents points M liés au trièdre mobile (2).

II. — EXTENSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

6. Nous utiliserons désormais quelques locutions que nous allons tout d'abord expliquer.

Un point d'un *espace* E' à n dimensions sera déterminé par ses coordonnées, c'est-à-dire par un système de valeurs attribuées à n variables $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$.

Supposons $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ fonctions de p variables $u_1, \dots, u_p$. Nous dirons que ces fonctions définissent un *mouvement à p paramètres* d'un point M par rapport à E'. L'ensemble des points de E' avec lesquels M vient coïncider est la *multiplicité trajectoire* de ce point.

Soient

$$(7) \quad x_i = f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les équations d'un groupe fini et continu G à r paramètres. Nous considérerons souvent une transformation du groupe comme définissant un *changement de coordonnées* (relatif à G) dans l'espace E'.

Résolvons les formules (7) par rapport aux x' et dans les équations

(1) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, p. 382.

(2) La *Géométrie cinématique* de M. Mannheim contient un grand nombre de problèmes de cette nature.

tions

$$(8) \quad x'_i = F_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ainsi obtenues, substituons aux a des fonctions de p variables $u_1, u_2, \dots, u_p$,

$$(9) \quad a_h = g_h(u_1, \dots, u_p) \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

Les x étant regardés comme définissant les points d'un espace E , les formules exprimant les x' en fonction des x et des u définiront un *mouvement d'ensemble de l'espace E par rapport à l'espace E' , relatif à G* , ce mouvement étant à p paramètres.

A chaque point M de E correspond un *mouvement d'entraînement* (par rapport à E').

Le mouvement d'ensemble peut être aussi bien défini par les formules (7) et (9); mais en considérant toujours les x' comme déterminés en fonction des x et des u .

Regardons aussi les x comme des fonctions données des paramètres u ; en d'autres termes, définissons un mouvement à p paramètres d'un point par rapport à E . Nous l'appellerons le mouvement *relatif* et désignerons par mouvement *absolu* celui qui correspond à la superposition du mouvement relatif et du mouvement d'ensemble de E par rapport à E' . Le mouvement absolu se traduit analytiquement par les formules (8) où l'on remplace les x et les a par les fonctions correspondantes des variables u .

7. Au lieu de supposer les fonctions (9) connues, regardons-les comme déterminées par un système d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme

$$(10) \quad da_h = \sum_{j=1}^r \alpha_{jh}(a) l_j(du) \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

Dans ces équations, les expressions $\alpha_{jh}(a)$ sont les coefficients des dérivées $\frac{\partial F}{\partial a_h}$ dans les transformations infinitésimales

$$(11) \quad \Lambda_j F = \sum_{h=1}^r \alpha_{jh}(a) \frac{\partial F}{\partial a_h} \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

du premier groupe des paramètres de G. Les symboles $l_j(du)$ désignent des expressions de Pfaff

$$(12) \quad l_j(du) = \sum_{k=1}^r l_{jk}(u_1, \dots, u_p) du_k \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

construites avec les variables u et leurs différentielles, et choisies de façon que (10) soit complètement intégrable ⁽¹⁾.

A un même système (10) correspond une infinité de systèmes de fonctions α . Connaissant l'un d'eux, représenté par les équations (9), on obtient le système le plus général

$$(13) \quad \alpha'_k = \gamma_k(u_1, u_2, \dots, u_p; c_1, c_2, \dots, c_r) \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

dépendant de r arbitraires c , en remplaçant les α par leurs expressions (9) dans les équations finies

$$(14) \quad \alpha'_k = \varphi_k(c_1, \dots, c_r; \alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

du premier groupe des paramètres ⁽²⁾.

Il semble donc qu'un système (10) définit une infinité de mouvements de E par rapport à E'. Mais *on peut regarder ces mouvements comme identiques*, la différence entre leur représentation analytique tenant au choix des coordonnées auxquelles on rapporte E'.

On peut, en effet, obtenir les transformations relatives aux α'

$$(15) \quad x_i = f_i(x', \alpha'),$$

en effectuant d'abord la transformation

$$(16) \quad x'_i = f_i(x', c),$$

puis les suivantes

$$(17) \quad x_i = f_i(x', \alpha).$$

Mais on peut regarder (16) comme définissant un changement de coordonnées (relatif à G) dans l'espace E'; ce qui établit la proposition.

⁽¹⁾ *Systèmes (I)*, n° 4-5.

⁽²⁾ *Ibid.*, n° 11.

8. Nous supposons que l'on donne : 1° le système (10) déterminant le mouvement d'ensemble de E par rapport à E'; 2° les fonctions x des paramètres u définissant le mouvement relatif d'un point (par rapport à E); et nous chercherons à *déterminer le mouvement absolu au voisinage d'un système donné* $u_1^0, \dots, u_p^0$ de valeurs des paramètres $u_1, u_2, \dots, u_p$. Nous précisons d'abord ces derniers mots.

Soient $a_1^0, \dots, a_r^0$, r nombres choisis arbitrairement. Il existe un système de solutions de (10) et un seul tel que les valeurs initiales des a (valeurs pour $u = u^0$) soient précisément les constantes a^0 données. Au système ainsi défini de solutions de (10) et aux fonctions données x correspondent des fonctions x' bien déterminées des variables u . On se propose de développer ces dernières fonctions en séries entières ⁽¹⁾ par rapport aux différences $u_1 - u_1^0, \dots, u_p - u_p^0$.

Les coefficients de ces séries sont, à des facteurs numériques près, les valeurs pour $u = u^0$ des x' et de leurs dérivées.

Les termes constants des développements s'obtiennent sans difficulté si l'on connaît les équations finies (7) du groupe G.

D'ailleurs, en choisissant, comme nous le ferons plus loin, pour constantes a^0 les valeurs des paramètres correspondant à la substitution identique, nous pourrions nous dispenser de chercher les équations finies de G.

9. Pour calculer les termes du premier ordre, rappelons que les seconds membres des équations (8) satisfont au système complet ⁽²⁾

$$(18) \quad X_j F + A_j F = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

où les $A_j F$ sont les transformations infinitésimales (11) du premier groupe des paramètres de G, et où les expressions

$$(19) \quad X_j F = \sum_{i=1}^n \xi_{ji}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

sont les transformations infinitésimales du groupe G.

⁽¹⁾ Nous nous dispenserons d'énoncer les conditions restrictives qui assureraient la possibilité de ces développements.

⁽²⁾ LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*. t. I, p. 149.

Une fonction des x' devient par la substitution (8) une fonction des x et des a :

$$(20) \quad \Phi'(x'_1, \dots, x'_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r),$$

la fonction Φ est une intégrale du système (18). En différenciant l'identité (20), il vient

$$(21) \quad d\Phi'(x') = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{h=1}^r \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} da_h.$$

Remplaçons dans cette identité les a par le système de solutions de (10) considéré au n° 8, on a

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{h=1}^r \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} \sum_{j=1}^r \alpha_{jh}(a) l_j(du) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^r \Lambda_j \Phi l_j(du), \end{aligned}$$

et, puisque Φ est solution de (18),

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i - \sum_{j=1}^r X_j \Phi l_j(du) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left[dx_i - \sum_{j=1}^r \xi_{ji}(x) l_j(du) \right]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les x comme des fonctions données des paramètres u , Φ' devient une fonction Ψ' de ces paramètres, et l'on a

$$(22) \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left[\frac{\partial x_i}{\partial u_k} - \sum_{j=1}^r \xi_{ji}(x) l_{jk}(u) \right].$$

10. Supposons d'abord que les valeurs initiales α^0 des a correspondent à la substitution identique de (7). Nous désignerons par $y_1, \dots, y_n$ les fonctions $x'_1, \dots, x'_n$ que l'on détermine par ce choix particulier des constantes α^0 .

Lorsque les a prennent ces valeurs α^0 , $\Phi(x; a)$ et ses dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

deviennent respectivement $\Phi'(x_1, \dots, x_n)$ et

$$\frac{\partial \Phi'(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi'(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n}.$$

Dans la formule (22) faisons $\Phi' = \Psi = \gamma_i$, et donnons aux u les valeurs u^0 ; il vient

$$(23) \quad \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}\right)^0 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right)^0 - \sum_{j=1}^r \xi_{ji}(x^0) l_{jk}(u^0) \quad \begin{cases} (i = 1, 2, \dots, n), \\ (k = 1, 2, \dots, p), \end{cases}$$

les nouveaux indices rappelant que l'égalité a lieu pour les valeurs u^0 des paramètres u .

11. Substituons maintenant à $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ d'autres solutions $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ de (10), prenant pour $u = u^0$ des valeurs initiales quelconques $\alpha_1^0, \dots, \alpha_r^0$. Soient x' les fonctions définies par

$$x_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; \alpha'_1, \dots, \alpha'_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les x' et les γ définissent un même mouvement dans l'espace E' , rapporté à deux systèmes distincts de coordonnées. Le changement de coordonnées est, comme on le voit facilement,

$$(24) \quad \gamma_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; \alpha_1^0, \dots, \alpha_r^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les α^0 sont des constantes; on passera donc des dérivées $\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k}$ aux dérivées $\frac{\partial x'_i}{\partial u_k}$ en résolvant, par rapport aux dernières, les formules obtenues en prolongeant une fois le groupe (24). Ce prolongement se fait en regardant les x' comme fonctions des p variables non transformées $u_1, \dots, u_p$.

Remplaçant alors $u_1, \dots, u_p$ par $u_1^0, \dots, u_p^0$ dans les formules obtenues, on a les coefficients des termes du premier ordre des développements cherchés (n° 8).

Nous pouvons énoncer ce résultat d'une autre façon, en observant que les valeurs u^0 sont quelconques.

Appelons *fonctions adjointes d'ordre zéro* les fonctions données $x_1, \dots, x_n$ des variables u ; *fonctions adjointes*

du premier ordre celles que définissent les formules

$$(25) \quad \begin{cases} x_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_p} = \frac{\partial x_i}{\partial u_k} - \sum_{j=1}^r \xi_{ij}(x) l_{jk}(u), \\ \alpha_i = 0 \text{ pour } i \neq k, \quad \alpha_k = 1, \quad [(i = 1, 2, \dots, n) \quad (k = 1, 2, \dots, p)]. \end{cases}$$

Considérons les fonctions x' définies par les équations (7) où l'on a remplacé les x par les fonctions d'ordre zéro, les α par un système *quelconque* de solutions de (10). Les valeurs des x' et de leurs dérivées premières s'obtiennent en prolongeant une fois le groupe (7) (à l'aide des variables u non transformées par ce groupe), remplaçant les x et leurs dérivées premières par les fonctions adjointes correspondantes, les α par le système considéré de solutions de (10), et résolvant les formules par rapport aux x' et à leurs dérivées.

12. Cet énoncé met bien en évidence le fait que le *calcul des x' et de leurs dérivées premières est entièrement analogue au calcul des x' seuls.*

C'est le groupe $G_{1,p}$ obtenu en prolongeant une fois G qui remplace ce dernier groupe; ce sont les $n + np$ fonctions adjointes d'ordre zéro et un qui remplacent les n fonctions adjointes d'ordre zéro.

D'une façon générale, soit $G_{N,p}$ le groupe obtenu en prolongeant G jusqu'à un ordre quelconque N (en regardant les x' comme fonctions de p variables non transformées). Les deux groupes G et $G_{N,p}$ ont même structure et même groupe des paramètres; et, dans les deux groupes, les mêmes valeurs des paramètres donnent la transformation identique.

Il résulte de là que le *calcul des dérivées secondes des x' se fait par un procédé analogue au précédent* : On définira d'abord des *fonctions adjointes du second ordre* en opérant sur les fonctions adjointes d'ordre zéro et un et sur $G_{1,p}$ comme on a opéré sur les fonctions adjointes d'ordre zéro et sur G pour obtenir les adjointes du premier ordre.

On désignera ces fonctions du second ordre par la notation $x_{i; \alpha_1, \dots, \alpha_p}$, les indices α étant positifs ou nuls et leur somme étant égale à 2. Ces fonctions correspondent aux dérivées secondes

des x ; par exemple si x_k et x_h sont égaux à 1, les autres x étant nuls, $x_i; x_1, \dots, x_p$ et $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_h}$ se correspondent.

Au sujet du calcul de ces fonctions, il est bon d'observer que celles d'entre elles qui ont deux indices α non nuls peuvent s'obtenir de deux façons différentes. En tenant compte des conditions d'intégrabilité on pourrait vérifier l'identité des résultats obtenus, mais cette identité est manifeste quand on se reporte à l'interprétation, donnée plus loin, des valeurs numériques des fonctions adjointes.

On définit ensuite des fonctions adjointes d'ordre *trois*, et l'on parvient ainsi de proche en proche à des fonctions adjointes d'ordre quelconque.

On observe que *le calcul des fonctions adjointes utilise seulement les transformations infinitésimales de $G^{(1)}$ et les expressions correspondantes $l_j(du)$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité $(^2)$.*

13. La solution du problème du n° 8 peut être présentée de la façon suivante :

Les coordonnées auxquelles on rapporte l'espace fixe E' étant convenablement choisies, le mouvement absolu, au voisinage d'un système quelconque de valeurs u^0 des paramètres u est défini par les valeurs correspondantes des fonctions adjointes des différents ordres.

Le choix particulier de coordonnées dont il est question ici est tel que, pour les valeurs u^0 , les valeurs des x' soient égales à celles des x de même indice. Dès lors *les valeurs numériques des dérivées des x' sont égales à celles des fonctions adjointes correspondantes.*

Les fonctions adjointes d'ordres 1, 2, 3, ..., n sont évidem-

(¹) Celles des groupes G_N s'en déduisent aisément. Voir dans les *Annales de l'École Normale* (1903) le Mémoire cité de M. Vessiot (n° 4).

(²) Ces conditions peuvent être écrites quand on connaît les transformations infinitésimales de G ; elles ne dépendent, en effet, que des constantes de structure. *Systèmes* (L), n° 4 et 5.

ment analogues aux projections des vitesses et des accélérations d'ordre 1, 2, ..., n - 1 sur les axes du trièdre mobile. Il eût été facile de présenter le calcul de ces dernières de façon à accentuer encore cette analogie.

Le système (10) ne joue évidemment, dans tout ce qui précède, qu'un rôle secondaire; le mouvement d'entraînement est en réalité défini par les expressions $l_j(du)$. On peut d'ailleurs substituer au système (10) le système équivalent (1)

$$(26) \quad dx_i = \sum_{j=1}^r \xi_{ji}(x) l_j(du).$$

Avec le langage que nous avons adopté, on voit que le système (26) détermine les coordonnées, relatives à E, d'un point fixe par rapport à E'. Cela résulte des formules (25).

14. Le résultat énoncé dans le numéro précédent donne évidemment un *principe de passage* permettant de déterminer les éléments géométriques remarquables des trajectoires absolues en rapportant ces éléments à l'espace mobile E; il suffit de remplacer les x' et leurs dérivées par les fonctions adjointes correspondantes dans les formules (supposées connues) qui détermineraient ces éléments remarquables si le mouvement absolu était explicitement donné.

Ce qui précède permettrait d'énoncer, pour des groupes finis quelconques, des propositions analogues à celles que l'on rencontre dans les applications de la Cinématique à la Géométrie. Les plus intéressantes de ces applications, celles qui concernent l'étude des courbes et des surfaces au moyen d'un trièdre mobile, seront généralisées, du moins en partie, dans la suite. Nous n'aurons alors à considérer que le cas du repos relatif (les adjointes d'ordre zéro seront des constantes); toutefois les considérations précédentes auraient été compliquées par l'introduction immédiate de cette hypothèse restrictive.

15. Nous allons calculer rapidement, à titre d'exemple, les fonc-

(1) *Systèmes* (L), n° 11.

tions adjointes d'ordre *un* et *deux* pour le groupe (1)

$$(27) \quad \begin{cases} X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x U, & X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} + y U, & X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z} + z U, \\ X_4 f = z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z}, & X_5 f = x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x}, & X_6 f = y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}, \\ U = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

des transformations projectives laissant invariable la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, et pour les expressions

$$(28) \quad \begin{cases} l_1(du) = -(\xi du + \xi_1 dv), & l_2(du) = -(\eta du + \eta_1 dv), & l_3(du) = -(\zeta du + \zeta_1 dv), \\ l_4(du) = p du + p_1 dv, & l_5(du) = q du + q_1 dv, & l_6(du) = r du + r_1 dv; \end{cases}$$

nous supposons x, y, z constants.

La structure du groupe (27) est donnée par les identités

$$(X_2 X_3) = X_1, \quad (X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = X_3, \quad (X_1 X_6) = -X_2, \quad (X_5 X_6) = X_4,$$

et celles que l'on en déduit par les permutations circulaires des indices 1, 2, 3 d'une part, 4, 5, 6 d'autre part.

Pour que les expressions (28) définissent un mouvement d'ensemble à deux paramètres, il faut que les coefficients des expressions (28) satisfassent aux identités

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta_1 r_1 - \eta_1 r + \zeta_1 q - \zeta q_1, & \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = \eta_1 \zeta_1 - \eta_1 \zeta + q r_1 - q_1 r, \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \zeta p_1 - \zeta_1 p + \xi_1 r - \xi r_1, & \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = \zeta \xi_1 - \zeta_1 \xi + r p_1 - r_1 p, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} = \xi q_1 - \xi_1 q + \eta_1 p - \eta p_1, & \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \xi \eta_1 - \xi_1 \eta + p q_1 - p_1 q. \end{cases}$$

Les formules (25) donnent, pour les fonctions adjointes du premier ordre,

$$(30) \quad \begin{cases} x_{10} = \frac{\partial x}{\partial u} + (1 + x^2) \xi + xy \eta + xz \zeta + qz - ry, \\ x_{01} = \frac{\partial x}{\partial v} + (1 + x^2) \xi_1 + xy \eta_1 + xz \zeta_1 + q_1 z - r_1 y, \end{cases}$$

et des formules analogues pour $y_{10}, y_{01}, z_{10}, z_{01}$.

(1) LIE-ENGEL, *Transformations gruppen*, t. III, p. 410. Ce groupe est celui des mouvements cayleyens, la quadrique étant prise pour absolu.

Voir (pour les nos 15 et 22) une Note de M. Demoulin, *Sur l'emploi d'un tétraèdre mobile en Géométrie Cayleyenne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIX, 8 août 1904).

Pour obtenir les fonctions adjointes du second ordre, nous utiliserons les transformations infinitésimales du groupe prolongé

$$\begin{aligned} X_1^{(1)}f &= X_1f + x_{10} \left(x \frac{\partial f}{\partial x_{10}} + y \frac{\partial f}{\partial y_{10}} + z \frac{\partial f}{\partial z_{10}} \right) + x \left(x_{10} \frac{\partial f}{\partial x_{10}} + y_{10} \frac{\partial f}{\partial y_{10}} + z_{10} \frac{\partial f}{\partial z_{10}} \right) \\ &\quad + x_{01} \left(x \frac{\partial f}{\partial x_{01}} + y \frac{\partial f}{\partial y_{01}} + z \frac{\partial f}{\partial z_{01}} \right) + x \left(x_{01} \frac{\partial f}{\partial x_{01}} + y_{01} \frac{\partial f}{\partial y_{01}} + z_{01} \frac{\partial f}{\partial z_{01}} \right), \\ X_2^{(1)}f &= \dots, \quad X_3^{(1)}f = \dots, \\ X_4^{(1)}f &= X_4f + z_{10} \frac{\partial f}{\partial y_{10}} - y_{10} \frac{\partial f}{\partial z_{10}} + z_{01} \frac{\partial f}{\partial y_{01}} - y_{01} \frac{\partial f}{\partial z_{01}}, \\ X_5^{(1)}f &= \dots, \quad X_6^{(1)}f = \dots \end{aligned}$$

On a ainsi

$$(31) \quad \begin{aligned} x_{20} &= \frac{\partial x_{10}}{\partial u} + (x_{10}x + xx_{10})\xi + (y_{10}x + yx_{10})\eta \\ &\quad + (z_{10}x + zx_{10})\zeta + qz_{10} - ry_{10} \end{aligned}$$

et des formules analogues pour x_{11} , x_{02} , y_{20} , ..., z_{02} .

Les formules (30) et (31) donnent pour l'origine du trièdre mobile ($x = y = z = 0$) les mêmes résultats que les formules (6). Cela tient à ce que les transformations infinitésimales (27) ne diffèrent de celles du groupe des mouvements euclidiens que par des termes du second ordre.

III. — MOUVEMENT D'ENSEMBLE ATTACHÉ A UNE MULTIPLICITÉ.

16. A tout point P d'une surface M de l'espace ordinaire correspond un trièdre remarquable T où $Pxyz$, tel que l'équation de la surface rapportée à T et résolue en z prend la forme réduite $z = ax^2 + by^2 + \dots$, les termes non écrits étant du troisième ordre au moins. On sait d'ailleurs que $2a$ et $2b$ sont les inverses des rayons de courbures principaux de M en P.

Il est évident qu'à toute représentation paramétrique de la surface correspond un mouvement à deux paramètres du trièdre T; l'étude de ce mouvement peut être substituée à celle de la surface (1).

L'utilité de la notion précédente apparaît dans la recherche des

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, Livre V, Chap. I.

surfaces W dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation donnée (1). On peut en effet la diviser en deux problèmes successifs : intégration d'un système résolvant (R) déterminant les translations et rotations du trièdre mobile T ; intégration des systèmes (L) correspondant aux solutions de (R) et déterminant les positions respectives des trièdres fixes et mobiles. D'ailleurs à un même système de solutions de (R) correspond une famille de surfaces W égales entre elles.

17. Nous allons généraliser les résultats précédents, en considérant une multiplicité M à p dimensions contenue dans un espace E' à n dimensions et un groupe fini et continu G que nous supposerons transitif.

Soient $x'_1, \dots, x'_n$ les coordonnées définissant les points de E' et

$$(32) \quad x_i = f_i(x'_1, \dots, x'_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les équations de G .

Supposons d'abord M définie par les expressions de $x'_{p+1}, x'_{p+2}, \dots, x'_n$ en fonction de $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$. Appelons *élément* de M (2) l'ensemble formé par un système de valeurs numériques de $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ satisfaisant aux équations de M et par les valeurs numériques correspondantes des dérivées de $x'_{p+1}, \dots, x'_n$ par rapport à $x'_1, \dots, x'_p$. Ces valeurs sont appelées *coordonnées de l'élément*.

Au groupe G , on peut faire correspondre, pour les multiplicités à p dimensions, un nombre limité de formes réduites, telles que tout élément ε d'une telle multiplicité M peut se mettre, à l'aide d'une transformation bien déterminée du groupe, sous l'une de ces formes réduites. Les coordonnées de l'élément réduit ε sont égales, les unes à des constantes fixes, les autres à des invariants fonctions des coordonnées de l'élément initial.

(1) *Ibid.*, t. III, p. 317 et t. II, p. 345.

(2) Les notions d'élément et de forme réduite sont tirées de la thèse de M. Tresse, *Sur les invariants différentiels*, etc. (*Acta mathematica*, t. XVIII). Voir le Chapitre I de la troisième Partie de ce Mémoire et, en particulier, le théorème I dont l'énoncé est reproduit ci-dessus.

18. Si la multiplicité M est donnée par une représentation paramétrique

$$(33) \quad x_i = \psi_i(u_1, \dots, u_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

un calcul de dérivées de fonctions implicites donnera, en fonction des paramètres u , les coordonnées de l'élément ϵ .

Ecrivant alors que l'on passe de ϵ à l'élément réduit $\mathcal{C}$ par une transformation (32) convenablement prolongée, on détermine $a_1, \dots, a_r$ en fonction de $u_1, \dots, u_p$.

Regardons maintenant dans les équations (32) les x comme arbitraires, les a comme remplacés par les fonctions des variables u que l'on vient de déterminer; nous avons des formules définissant un *mouvement d'ensemble d'un espace E par rapport à l'espace E'* . Ce mouvement est à p paramètres $u_1, \dots, u_p$, et relatif à G ; la trajectoire du point de E dont les coordonnées x sont égales aux coordonnées d'ordre zéro ⁽¹⁾ de l'élément réduit est précisément la multiplicité M .

Les fonctions $a_1, \dots, a_r$ des variables $u_1, \dots, u_p$ définissant ce mouvement d'ensemble déterminent ⁽²⁾ les expressions de Pfaff $l_1(du), \dots, l_r(du)$ qui figurent dans les systèmes (L) correspondant à ce mouvement (n^{os} 17 et 13). Nous dirons que *les expressions $l(du)$ correspondent à la multiplicité M donnée par la représentation (33)*.

Il est aisé de voir ⁽³⁾ que *les expressions $l(du)$ correspondant à une multiplicité M , correspondent aussi à toutes les multiplicités déduites de M par les transformations de G et à celles-là seulement*.

Si l'on changeait la représentation adoptée pour M , en prenant de nouveaux paramètres $v_1, \dots, v_p$; les expressions de Pfaff $\lambda_1(dv), \dots, \lambda_r(dv)$, correspondant à la nouvelle représentation, se déduiraient évidemment des anciennes $l_1(du), \dots, l_r(du)$ par la transformation donnant $u_1, \dots, u_p$ en fonction de $v_1, \dots, v_p$.

19. Les systèmes (L) que l'on attache ainsi aux multiplicités à p dimensions de l'espace E' ont une forme particulière. Pour

⁽¹⁾ On peut supposer ces coordonnées constantes, puisque G est transitif.

⁽²⁾ Systèmes (L), n^o 4.

⁽³⁾ *Ibid.*, n^o 11.

écrire qu'un système (L)

$$(34) \quad dx_i = \sum_{j=1}^r \xi_{ji}(x) l_j(du) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

construit à l'aide des transformations infinitésimales de G et de r formes données $l(du)$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, appartient au type précédent, on procède de la façon suivante :

Prenant pour fonctions adjointes d'ordre zéro, $x_1, \dots, x_n$, les constantes qui sont les coordonnées d'ordre zéro de l'élément réduit, on calcule les fonctions adjointes d'ordre supérieur (nos 11, 12) (1).

On écrit les équations qui donnent les dérivées de $x'_{p+1}, \dots, x'_n$ par rapport à $x'_1, \dots, x'_p$ en fonction des x' et de leurs dérivées par rapport à $u_1, \dots, u_p$. On y remplace les x' et leurs dérivées par rapport à $x'_1, \dots, x'_p$ par les coordonnées constantes de l'élément réduit, les dérivées des x' par rapport aux u par les fonctions adjointes correspondantes. On élimine les dérivées restantes; les relations obtenues ainsi entre les coefficients des formes $l(du)$ sont les conditions cherchées.

Un calcul analogue donne les expressions des invariants différentiels en fonction des paramètres u .

Reprenons, à ce point de vue, l'exemple du n° 15. Le groupe (27) est transitif, celles de ses transformations laissant invariant le point 0, 0, 0 engendrent le groupe des rotations autour de ce point. On peut donc prendre le même élément réduit, pour une surface, que dans le cas de l'espace euclidien, c'est-à-dire $x' = y' = z' = \frac{\partial z'}{\partial x'} = \frac{\partial z'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'} = 0$. Les expressions $\frac{1}{R} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} \right)_0$, $\frac{1}{R'} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2} \right)_0$ sont des invariants; nous appellerons R et R' les rayons de courbure principaux cayleyens.

En appliquant la méthode précédente, on voit que les formes (28) définiront le mouvement cayleyen attaché à une surface si l'on a

$$(35) \quad \zeta = \zeta_1 = 0, \quad \begin{vmatrix} p\eta - q\xi & \xi^2 & \eta^2 \\ p\eta_1 - q\xi_1 & \xi\xi_1 & \eta\eta_1 \\ p_1\eta_1 - q_1\xi_1 & \xi_1^2 & \eta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) On pousse le calcul jusqu'aux fonctions d'ordre égal à l'ordre maximum des coordonnées constantes de l'élément réduit.

Les invariants $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ sont définis par les équations

$$\xi_2 \frac{1}{R} + \eta_2 \frac{1}{R'} = p\eta - q\xi,$$

$$\xi_1 \frac{1}{R} + \eta_1 \frac{1}{R'} = p\eta_1 - q\xi_1,$$

$$\xi_1 \frac{1}{R} + \eta_1 \frac{1}{R'} = p_1\eta_1 - q_1\xi_1,$$

compatibles en vertu de la dernière des identités (35).

20. Un grand nombre de problèmes de Géométrie se rattachent au type suivant :

Déterminer dans un espace E' les multiplicités M à p dimensions dont les invariants vis-à-vis d'un groupe fini continu et transitif G satisfont à des relations données.

Dans son Mémoire récent ⁽¹⁾ *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations*, M. Vessiot s'est occupé d'un problème beaucoup plus général. Il nous est facile de présenter d'une façon simple, dans le cas particulier qui nous occupe, l'un des intéressants résultats obtenus par M. Vessiot. On remarquera également que la méthode suivante est une généralisation de celle que l'on utilise dans la recherche des surfaces W.

Nous chercherons d'abord le mouvement d'ensemble attaché à une multiplicité inconnue M. A cet effet, nous formerons un système *résolvant* (R) auquel doivent satisfaire les coefficients des formes $l(du)$ pris comme inconnues auxiliaires. Les équations de (R) comprennent : 1° les équations du n° 19 exprimant que le système (L) correspond au mouvement d'ensemble relatif à G attaché à une multiplicité d'un nombre de dimensions donné; 2° les équations obtenues en remplaçant, dans les relations données, les invariants différentiels par leurs expressions en fonction des coefficients des formes $l(du)$ et de leurs dérivées.

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, t. XXVIII.

A chaque système de solutions de (R) correspond ensuite un système (L) que l'on peut choisir automorphe (n° 13), et dont l'intégration donnerait une famille de multiplicités, répondant au problème, et se déduisant toutes de l'une d'elles par les transformations de G.

Le système (Σ) formé par la réunion des systèmes (R) et (L) présente l'inconvénient de donner d'une infinité de façons différentes la même famille de multiplicités. Cela tient à ce que la représentation paramétrique de la multiplicité inconnue est arbitraire. Deux systèmes de solutions distincts de (R) donneront la même famille de solutions du problème posé, si l'on passe des expressions $l(du)$ correspondant à l'un d'eux aux expressions $\lambda(dv)$ correspondant à l'autre par un changement de variables. Si les $l(du)$ et les $\lambda(dv)$ sont connus, il est possible, par des opérations effectuelles, de reconnaître si un pareil changement de variables existe, et, dans ce cas, de le déterminer⁽¹⁾.

Mais on pourra toujours⁽²⁾ réduire l'indétermination précédente par un choix plus précis des variables u , jusqu'ici entièrement arbitraires. On prendra, dans la mesure du possible, ces variables égales soit à des invariants différentiels de la multiplicité inconnue soit à des solutions d'équations différentielles auxiliaires.

21. Appliquons ce qui précède à la *recherche des surfaces dont les rayons de courbure cayleyens* R, R' *sont liés par une relation donnée* $F(R, R') = 0$.

Nous simplifierons d'abord les formules, en prenant les paramètres u et v de telle façon que $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ soient respectivement les intégrales de $l_1(du) = 0$ et de $l_2(du) = 0$. On a alors $\xi_1 = \tau_1 = 0$, et les conditions (29) et (35) donnent $p = q_1 = 0$. On prendra donc

$$(36) \quad \begin{cases} l_1(du) = -\xi du, & l_2(du) = -\tau_1 dv, & l_3(du) = 0, \\ l_4(du) = p_1 dv, & l_5(du) = q du, & l_6(du) = r du + r_1 dv. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Voir, à ce sujet, les n° 23 et 9 de l'étude *Sur les variétés à trois dimensions* (Annales de Toulouse, 1900).

⁽²⁾ VESSIOT, *loc. cit.*, n° 16.

Le système (R) est, en observant que $R = -\frac{\xi}{q}$, $R' = \frac{\eta_1}{p_1}$,

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\eta_1 r, & \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r_1 \xi, \\ \frac{\partial p_1}{\partial u} = -q r_1, & \frac{\partial q}{\partial v} = r p_1, & \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -q p_1 + \xi \eta_1, \\ F\left(-\frac{\xi}{q}, \frac{\eta_1}{p_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Enfin le système (L) est ici

$$(38) \quad \begin{cases} dx = -(1+x^2)\xi du - xy \eta_1 dv - zq du + y(r du + r_1 dv), \\ dy = -xy \xi du - (1+y^2)\eta_1 dv + zp_1 dv - x(r du + r_1 dv), \\ dz = -xz \xi du - yz \eta_1 dv - yp_1 dv + xq du. \end{cases}$$

Pour le remplacer par un système automorphe ⁽¹⁾, on chercherait d'abord les transformations infinitésimales d'un groupe simplement transitif de même structure que (27).

On peut encore substituer à (38) un système linéaire, en utilisant le groupe adjoint de (27).

Il est plus simple de prendre des coordonnées homogènes ⁽²⁾; on retrouve ainsi les résultats obtenus directement par M. Demoulin dans la Note citée plus haut.

22. La méthode précédente est applicable à des problèmes plus généraux, relatifs à des familles de multiplicités; c'est ainsi que M. Darboux ⁽³⁾ a employé la méthode du trièdre mobile dans la recherche des systèmes triples orthogonaux.

Indiquons rapidement comment on peut utiliser, pour le même problème, le groupe Γ des transformations isogonales de l'espace ordinaire.

On cherche d'abord une forme réduite à laquelle on puisse ramener, à l'aide d'une transformation de Γ , les équations de trois surfaces se coupant orthogonalement en un point. A l'aide des résultats donnés par M. Tresse ⁽⁴⁾, on établit sans difficulté

⁽¹⁾ *Systèmes (L)*, n° 11.

⁽²⁾ Voir, pour les formules de passage, LIE-ENGEL, t. I, p. 579.

⁽³⁾ *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, t. I, Liv. II, Chap. II.

⁽⁴⁾ Mémoire cité.

qu'on peut prendre

$$(39) \quad x = \frac{A}{2}(y^2 - z^2) + \dots, \quad y = \frac{B}{2}(z^2 - x^2) + \dots, \quad z = \frac{C}{2}(x^2 - y^2) + \dots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à deux. De plus on prendra A, B, C liés par une relation non homogène, mais symétrique, telle que

$$(40) \quad \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 1.$$

Le groupe Γ est à dix paramètres. Donc un mouvement d'ensemble à trois paramètres, relatif à Γ , est défini par dix expressions de Pfaff à trois variables. Les trente coefficients de ces expressions étant pris comme inconnues, doivent satisfaire déjà à trente équations du premier ordre exprimant les conditions d'intégrabilité des systèmes (L) correspondants.

Si l'on veut exprimer ensuite qu'un pareil mouvement correspond, à l'aide de la forme réduite précédente [(39) et (40)], à un système triple orthogonal, il faut ajouter aux équations précédentes six équations d'ordre zéro et sept nouvelles équations du premier ordre.

En choisissant les paramètres du mouvement de telle façon que sur chaque surface du système triple l'un de ces trois paramètres reste constant, on réduit immédiatement le nombre des inconnues à 21, celui des équations à 34 (elles sont toutes du premier ordre). Les calculs qu'il faudrait faire pour pousser plus loin la réduction du nombre des inconnues seraient bien simplifiés par la symétrie qui persiste toujours.

De quelque façon que l'on écrive le système différentiel obtenu, à chacun de ses systèmes de solutions correspond une famille de ∞^{10} systèmes triples orthogonaux, se déduisant les uns des autres par des transformations isogonales. Leur détermination effective exigerait encore l'intégration d'un système (L) correspondant à Γ .

NOTE AU SUJET DES MOUVEMENTS A LA SURFACE DE LA TERRE;

Par M. le Comte DE SPARRE.

Dans l'étude des mouvements à la surface de la Terre on a coutume de négliger les termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre et cette manière de faire est parfaitement justifiée, car ces termes sont, d'une part, si petits qu'ils échapperaient complètement à l'observation et, d'autre part, beaucoup d'autres causes perturbatrices secondaires peuvent être du même ordre.

Toutefois, comme certains auteurs ont voulu tenir compte de ces termes en ω^2 et qu'ils l'ont fait d'une façon inexacte (¹), je me propose d'établir les équations du mouvement à la surface de la Terre en négligeant seulement les termes d'ordre supérieur à ω^3 . Je me borne au cas de la Terre supposée sphérique et homogène; en réalité, l'influence de l'aplatissement de la Terre introduit des termes de l'ordre de ω^2 , ainsi que j'ai eu occasion de le montrer dans un petit Mémoire en cours de publication, mais je laisse ici cette influence de côté en me bornant, comme je viens de le dire, au cas de la Terre supposée sphérique et homogène; le problème est en effet beaucoup plus simple dans ce cas et sa solution m'a paru présenter de l'intérêt, ne fût-ce qu'au point de vue théorique.

Je remarquerai d'abord que si R est le rayon de la Terre on a sensiblement

$$\frac{1}{R} = 1,2 \omega^{\frac{2}{3}},$$

d'où

$$\frac{1}{R^2} = 1,44 \omega^{3 + \frac{1}{3}}.$$

Donc, en négligeant les termes en $\frac{1}{R^2}$, nous ne négligerons que des termes d'ordre supérieur à ω^3 .

Ceci posé :

Soit un système rectangulaire OXYZ où OZ a la direction de la

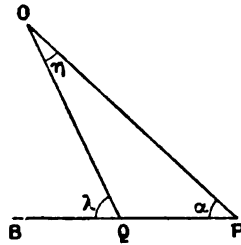
(¹) J'ai eu, en particulier, occasion de le faire voir dans une Communication récente pour le cas de la chute libre des graves.

verticale dirigée vers le bas, OX est dans le plan du méridien et dirigé vers le sud et OY dirigé vers l'est. Soit de plus un second système OX'YZ', qui a OY en commun avec le précédent et dans lequel OZ' est dirigé suivant le rayon terrestre et OX' toujours vers le sud dans le plan du méridien.

Je désigne de plus par λ la latitude vraie au point O, c'est-à-dire l'angle de OZ avec le plan de l'équateur, par α la latitude géocentrique au même point O ⁽¹⁾, par G l'attraction de la Terre sur l'unité de masse en O et par g la gravité au même point.

La gravité est la résultante de l'attraction G de la Terre en O et de la force centrifuge au même point, $\omega^2 R \cos \alpha$ ⁽²⁾.

Fig. 1.



Le triangle de composition de la gravité en O dans lequel $OQ = g$, $OP = G$, $PQ = \omega^2 R \cos \alpha$, $OPQ = \alpha$, $OQB = \lambda$, $QOP = \tau$ donne

$$(1) \quad \begin{cases} G \sin \tau = \omega^2 R \cos \alpha \sin \lambda, \\ g \sin \tau = \omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha, \\ G = g \cos \tau + \omega^2 R \cos^2 \alpha, \\ \alpha = \lambda - \tau. \end{cases}$$

Soit maintenant un point M dont les coordonnées sont x, y, z par rapport au système OXYZ et x', y', z' par rapport au système OX'YZ', et soit δ la distance de ce point au centre de la Terre.

Ce point est soumis de la part de la Terre, supposée, ainsi que nous l'avons dit, sphérique et homogène, s'il s'agit d'un point

⁽¹⁾ Donc l'angle de OZ' avec le plan de l'équateur.

⁽²⁾ En désignant ici par R la distance du point O au centre de la Terre, distance qui diffère fort peu du rayon de la Terre.

extérieur à sa surface, à une attraction égale à $\frac{GR^2}{\delta^2}$ dirigée suivant MC, C étant le centre de la Terre; elle aura pour composantes, suivant OX', OY, OZ',

$$-\frac{GR^2 x'}{\delta^3}, \quad -\frac{GR^2 y}{\delta^3}, \quad \frac{GR^2 (R - z')}{\delta^3},$$

mais on a

$$\delta^2 = (R - z')^2 + x'^2 + y^2 = (R - z')^2 \left[1 + \frac{x'^2 + y^2}{(R - z')^2} \right],$$

de sorte que si nous négligeons les termes de l'ordre de $\frac{1}{R^2} = 1,44 \omega^{2+\frac{1}{3}}$ nous pourrons prendre, pour les trois composantes de l'attraction,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad G \left(1 + \frac{2z'}{R} \right).$$

S'il s'agissait de la chute dans un puits, puisque nous supposons la Terre sphérique et homogène, l'attraction serait $\frac{G\delta}{R}$ et ses composantes parallèles à OX', OY, OZ' seraient, par suite,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad G \left(1 - \frac{z'}{R} \right).$$

Nous considérerons alors l'attraction comme la résultante d'une force constante comme grandeur et direction et égale à l'attraction G de la Terre sur l'unité de masse en O et d'une force déviatrice dont les composantes parallèles aux axes OX', OY, OZ' sont : dans le cas de points extérieurs à la surface de la Terre,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad \frac{2Gz'}{R},$$

et, dans le cas de points intérieurs,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad -\frac{Gz'}{R}.$$

Cette force déviatrice aura pour composante parallèle à l'axe OX, dans le premier cas,

$$X_1 = -\frac{G}{R} (x' \cos \gamma_1 + 2z' \sin \gamma_1),$$

et, dans le second,

$$X'_1 = -\frac{G}{R}(x' \cos \eta - z' \sin \eta).$$

Mais l'on a

$$x' = x \cos \eta + z \sin \eta, \quad z' = z \cos \eta - x \sin \eta,$$

et, par suite,

$$X_1 = -\frac{G}{R}[x(1 - 3 \sin^2 \eta) + 3z \sin \eta \cos \eta], \quad X'_1 = -\frac{G}{R}x.$$

Nous aurons ensuite

$$Y_1 = -\frac{Gy}{R}$$

puis, pour des points extérieurs,

$$Z_1 = \frac{G}{R}[2z' \cos \eta - x' \sin \eta] = \frac{G}{R}[z(2 - 3 \sin^2 \eta) - 3x \sin \eta \cos \eta]$$

et, pour des points intérieurs,

$$Z'_1 = -\frac{G}{R}z.$$

En tenant compte d'ailleurs des relations (1) les valeurs précédentes de X_1 et Z_1 pourront s'écrire

$$X_1 = -\frac{Gx}{R}(1 - 3 \sin^2 \eta) - 3\omega^2 z \cos \alpha \sin \lambda \cos \eta,$$

$$Z_1 = \frac{Gz}{R}(2 - 3 \sin^2 \eta) - 3\omega^2 x \cos \alpha \sin \lambda \cos \eta.$$

Nous considérons donc l'attraction de la Terre sur le point M , de masse un , comme la résultante de la force G , constante de grandeur et de direction, et des forces X_1, Y_1, Z_1 ou X'_1, Y_1, Z'_1 .

Ceci posé, le système $OXYZ$ a d'abord un mouvement d'entraînement qui est une translation égale à celle de son origine O ; pour tenir compte de ce mouvement d'entraînement, on doit appliquer au point M une force égale à la force centrifuge en O , $\omega^2 R \cos \alpha$; cette force centrifuge constante de grandeur et de direction se combine à l'attraction G en O , également constante, pour donner la gravité g en O . On voit donc que, pour tenir compte du mou-

vement d'entraînement dû à la translation du système égale à celle de son origine, il suffit de remplacer l'attraction de la Terre G en O par la gravité g au même point, g étant constant de grandeur et parallèle à la verticale OZ en O .

Mais le système $OXYZ$ a, en plus de la translation égale à celle de son origine O , une rotation autour d'un axe OI parallèle à celui de la Terre. Cette rotation donnera naissance :

1° A une force centrifuge composée dont les composantes parallèles à OX , OY , OZ sont, comme on sait,

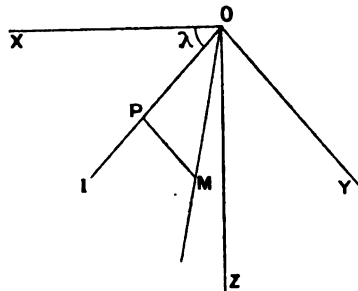
$$\begin{aligned} X_2 &= 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \\ Y_2 &= 2\omega \cos \lambda \frac{dz}{dt} - 2\omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}, \\ Z_2 &= -2\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}; \end{aligned}$$

2° A une force centrifuge dont les composantes parallèles aux axes sont

$$\begin{aligned} X_3 &= \omega^2 r \cos(r, X), \\ Y_3 &= \omega^2 r \cos(r, Y), \\ Z_3 &= \omega^2 r \cos(r, Z), \end{aligned}$$

r désignant la perpendiculaire PM abaissée de M sur OI .

Fig. 2.



Mais $r \cos(r, X)$ est la projection de PM sur OX , projection qui est égale à celle du contour POM . D'ailleurs OP est la projection de OM sur OI , projection qui est égale à la somme de celles des coordonnées du point M .

On a donc

$$\begin{aligned} \text{OP} &= x \cos \lambda + z \sin \lambda, \\ r \cos(r, X) &= x - (x \cos \lambda + z \sin \lambda) \cos \lambda = (x \sin \lambda - z \cos \lambda) \sin \lambda. \end{aligned}$$

On a donc, en opérant de même pour les trois axes,

$$\begin{aligned} X_3 &= \omega^2 \sin \lambda (x \sin \lambda - z \cos \lambda), \\ Y_3 &= \omega^2 y, \\ Z_3 &= \omega^2 \cos \lambda (z \cos \lambda - x \sin \lambda). \end{aligned}$$

Dans son mouvement relatif par rapport à la Terre, le point mobile est donc soumis, par suite de son mouvement relatif et de l'attraction de la Terre, aux forces :

1° S'il s'agit de points extérieurs,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{G}{R} x (1 - 3 \sin^2 \eta) - 3 \omega^2 z \cos \alpha \sin \lambda \cos \eta \\ &\quad + 2 \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 \sin \lambda (x \sin \lambda - z \cos \lambda), \\ Y &= -\frac{G}{R} y + 2 \omega \cos \lambda \frac{dz}{dt} - 2 \omega \sin \lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 y, \\ Z &= g + \frac{G}{R} z (2 - 3 \sin^2 \eta) - 3 \omega^2 x \cos \alpha \sin \lambda \cos \eta - 2 \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} \\ &\quad + \omega^2 \cos \lambda (z \cos \lambda - x \sin \lambda); \end{aligned}$$

2° S'il s'agit de points intérieurs,

$$\begin{aligned} X' &= -\frac{G}{R} x + 2 \omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 \sin \lambda (x \sin \lambda - z \cos \lambda), \\ Y' &= Y, \\ Z' &= g - \frac{G}{R} z - 2 \omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 \cos \lambda (z \cos \lambda - x \sin \lambda). \end{aligned}$$

Nous remarquerons que dans l'établissement de ces équations on a négligé les termes d'ordre supérieur à ω^3 , il ne faudra donc pas pousser l'approximation au delà des termes en ω^3 ; de plus, η est de l'ordre de $\omega^2 R$, donc de l'ordre de $\omega^{\frac{1}{3}}$ et, par suite, $\frac{\eta^4}{R}$ sera de l'ordre de ω^3 et $\omega^2 \eta^4$ de l'ordre $\omega^{3+\frac{1}{3}}$.

Il est facile, en partant de ces formules, de retrouver les résultats que j'ai donnés pour la déviation des corps dans la chute libre. Dans ce cas, en effet, y contient ω en facteur et x au moins ω^2 ;

$\frac{1}{R}$ étant de l'ordre $\omega^{\frac{5}{3}}$ on doit réduire les formules aux suivantes, en supposant que l'on se borne à calculer la déviation suivant OX dans le plan du méridien :

Pour la chute du haut d'une tour,

$$X = -3\omega^2 z \cos \alpha \sin \lambda \cos \eta + 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 z \sin \lambda \cos \lambda,$$

et, pour la chute dans un puits,

$$X' = 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 z \sin \lambda \cos \lambda.$$

Comme d'ailleurs une première approximation nous donne pour z , aux termes en $\omega^{\frac{2}{3}}$ près ⁽¹⁾,

$$z = \frac{1}{2} g t^2,$$

et pour y , aux termes en $\omega^{2+\frac{2}{3}}$ près,

$$y = \frac{1}{3} \omega \cos \lambda g t^3,$$

nous aurons donc, aux termes en $\omega^{3+\frac{2}{3}}$ près,

$$X = \frac{3}{2} \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda g t^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \cos \alpha \sin \lambda \cos \eta g t^2,$$

$$X' = \frac{3}{2} \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda g t^2.$$

Mais

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \eta &= \cos \eta (\cos \lambda \cos \eta + \sin \lambda \sin \eta) \\ &= \cos \lambda + \sin \eta (\sin \lambda \cos \eta - \cos \lambda \sin \eta) \\ &= \cos \lambda + \sin \eta \sin \alpha. \end{aligned}$$

On aura donc

$$X = -\frac{3}{2} \omega^2 \sin \lambda \sin \eta \sin \alpha g t^2$$

(1) $\frac{1}{R}$ étant de l'ordre de $\omega^{\frac{5}{3}}$.

ou, en tenant compte de la relation

$$\sin \eta = \frac{\omega^2 R \cos \alpha \sin \alpha}{g},$$

$$X = -\frac{3}{2} \omega^4 R t^2 \sin \lambda \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Si d'ailleurs on se borne à la partie principale, on remplace α par λ , puisque $\alpha = \lambda - \eta$. On a alors, pour la chute du haut d'une tour,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{3}{2} \omega^4 R t^2 \sin^3 \lambda \cos \lambda,$$

d'où une déviation vers le nord donnée par la formule

$$x = -\frac{1}{8} R \omega^4 t^4 \sin^3 \lambda \cos \lambda$$

ou, en introduisant la hauteur de chute $h = \frac{1}{2} g t^2$,

$$x = -\frac{1}{2} \frac{R \omega^4 h^2}{g^2} \sin^3 \lambda \cos \lambda.$$

On a au lieu de cela, pour la chute dans un puits,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{3}{2} \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda g t^2$$

et, par suite, on a une déviation vers le sud donnée par la formule

$$x = \frac{1}{8} \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda g t^4$$

ou, en introduisant la hauteur de chute,

$$x = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 h^2}{g} \sin \lambda \cos \lambda.$$

Si l'on tenait compte de la forme elliptique du méridien terrestre on arriverait, dans tous les cas, à une déviation vers le sud, mais je n'aborderai pas cette étude, mon but ayant été de faire voir la manière dont on peut tenir compte, lorsqu'on veut garder les termes en ω^2 , de la force centrifuge due à la rotation autour de OI; ainsi que de l'influence de l'angle η .

SUR QUELQUES QUESTIONS DE CALCUL DES VARIATIONS;

Par M. HADAMARD.

Dans une Communication précédente (1) j'avais donné une condition nécessaire (correspondant à la condition de Legendre ou à celle de Weierstrass) pour le minimum d'une intégrale n^{up} dans laquelle figurent m fonctions inconnues. J'avais ajouté que la méthode de Clebsch (2) fournissait une condition équivalente à la précédente pour $m = n = 2$ (l'équivalence étant douteuse pour les valeurs supérieures de m et de n) et qui était capable de jouer le rôle de la condition de Legendre-Weierstrass comme condition suffisante.

Ce dernier point n'était pas exact et, comme on va le voir, la question est loin d'être élucidée, même pour ce cas, le plus simple, de $m = n = 2$.

Soient x_1, x_2 les fonctions inconnues des variables x, y ; p_1, q_1, p_2, q_2 leurs dérivées partielles. Toute condition analogue à celle de Legendre ou celle de Weierstrass pour le minimum faible (pour nous en tenir à ce cas) fait intervenir une certaine forme F , quadratique en p_1, q_1, p_2, q_2 .

I. La condition *nécessaire* que nous avons obtenue précédemment est que F soit essentiellement positive pour toutes les valeurs (non nulles) des variables p_1, q_1, p_2, q_2 qui satisfont à la relation

$$(1) \quad p_1 q_2 - q_1 p_2 = 0.$$

II. La méthode de *Clebsch* donne comme condition *suffisante* que la forme quadratique

$$(2) \quad F + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2)$$

(où λ est fonction de x et de y , mais non des p, q) soit définie positive. A cette condition doit, bien entendu, être jointe une *condition de Jacobi*.

(1) Ce *Bulletin*, t. XXX, 1902, p. 253.

(2) *Journal de Crelle*, t. 56, 1859.

Celle-ci, dans le cas actuel, consiste dans l'existence de deux solutions (ζ_1, ζ_2) , (τ_1, τ_2) des *équations aux variations*, telles que le déterminant

$$\Delta = \zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1$$

ne s'annule pas dans le domaine d'intégration.

Si λ pouvait être choisi arbitrairement, la condition que $F + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2)$ puisse être rendue définie par ce choix de λ serait équivalente à la condition nécessaire précédemment énoncée.

Mais tel n'est pas le cas. Ainsi qu'il résulte de l'analyse de Clebsch, les valeurs de λ sont déterminées par celles des solutions ζ, τ , ou, du moins, une fois ces solutions choisies, λ ne contient plus qu'une constante arbitraire C .

Il ne suffit donc pas que, pour chaque système de valeurs de x et de y , il existe des valeurs de λ qui rendent définie positive la forme (2). Soit

$$(3) \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$$

l'intervalle qui comprend ces valeurs de λ . Il faudrait encore que l'on puisse déterminer la constante C de manière que, pour tous les couples de valeurs de x, y compris dans l'aire d'intégration, l'inégalité (3) soit vérifiée, autrement dit, que le minimum de la valeur de C déduite (en chaque point) de la relation $\lambda = \lambda_2$ ne soit pas inférieur au maximum de la valeur de C déduite de $\lambda = \lambda_1$.

Si même on prenait de toutes les manières possibles les solutions ζ, τ des *équations aux variations*, la fonction λ ne pourrait pas être prise à volonté. Elle satisferait à un système d'équations aux dérivées partielles S (vraisemblablement compliqué) résultant de l'élimination de $\zeta_1, \zeta_2; \tau_1, \tau_2$ entre les *équations aux variations* (au nombre de quatre pour les deux systèmes) et les deux relations qui définissent λ , les six équations ainsi écrites se réduisant d'ailleurs à cinq, grâce à ce fait que le système des *équations aux variations* est identique à son adjoint.

On serait alors conduit à la question suivante :

Existe-t-il une solution du système S satisfaisant, dans toute l'aire d'intégration, aux inégalités (3)?

Ce problème appartient à la même catégorie de questions dont celui que nous avons rencontré tout à l'heure offre un exemple simple, catégorie probablement assez digne d'attirer l'attention.

Bien entendu, une fois prise une telle solution λ , il faudrait calculer les solutions ζ , τ correspondantes et vérifier la condition de Jacobi $\Delta \geq 0$.

III. La méthode de *Hilbert* (dont la méthode de Clebsch n'est d'ailleurs pas distincte au fond) conduit à des résultats tout semblables.

Pour qu'une fonction de $x, y, z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2$, intégrée par rapport à x et à y , donne un résultat dépendant du contour seul, il faut tout d'abord qu'elle ait la forme

$$\varphi = A + B_1 p_1 + C_1 q_1 + B_2 p_2 + C_2 q_2 + D(p_1 q_2 - q_1 p_2)$$

($A, B, \dots$ fonctions de x, y, z_1, z_2); forme qui renferme en général, comme on le voit, un terme non linéaire par rapport aux dérivées premières.

Pour suivre la marche indiquée par M. Hilbert, nous prendrons tout d'abord

$$(4) \quad \varphi = f(x, y, z_1, z_2, w_1, \chi_1, w_2, \chi_2) + (p_1 - w_1)f_{w_1} + (p_2 - w_2)f_{w_2} \\ + (q_1 - \chi_1)f_{\chi_1} + (q_2 - \chi_2)f_{\chi_2},$$

où f est la fonction donnée sous le signe $\int \int$, de manière que

$$\int \int (x, y, z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2) dx dy$$

est l'intégrale dont on cherche l'extremum, et où w_1, w_2, χ_1, χ_2 sont définies de la manière suivante :

On considère une famille d'extrémales dépendant de deux constantes arbitraires a, b

$$(5) \quad z_1 = \Psi_1(x, y, a, b), \quad z_2 = \Psi_2(x, y, a, b),$$

ces équations étant supposées résolubles par rapport à a, b , de sorte que le déterminant

$$(6) \quad \frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(a, b)}$$

ne s'annule en aucun point de l'aire d'intégration.

Géométriquement parlant, les fonctions z_1, z_2 de x et de y représentent une multiplicité deux fois étendue tracée dans l'espace à quatre dimensions, ou, plus commodément, un couple de surfaces dans l'espace ordinaire, avec cette convention que l'on considère comme faisant un tout indissoluble les deux points qui, pris respectivement sur les deux surfaces, ont même projection sur le plan des xy (¹). Ce sont deux points ainsi situés sur une même parallèle à l'axe des z que nous nommerons un *couple* de points. La condition imposée aux extrémales (5) revient à dire qu'on peut les faire passer par tout couple de points donné (suffisamment voisin de l'extrémale que l'on considère).

Cela posé, $\varpi_1, \chi_1, \varpi_2, \chi_2$ sont les dérivées partielles de z_1, z_2 tirées des équations (5). Ce sont donc des fonctions de x, y, a, b et par conséquent (en vertu de la résolubilité précédemment postulée) de fonctions de x, y, z_1, z_2 , de sorte que l'expression (4) est une fonction de $x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2$.

Le calcul fait intervenir plusieurs espèces de dérivées, savoir :

1° Les dérivées d'une fonction de $x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2$, lorsque ces huit quantités sont considérées comme des variables indépendantes; nous les désignons par des indices, Φ_{p_i} désignant, par exemple, la dérivée de Φ par rapport à p_i . C'est ce qui est fait dans la formule (4), où f_{p_i} représente la valeur de f_{p_i} lorsqu'on y remplace p_1, p_2, q_1, q_2 par $\varpi_1, \varpi_2, \chi_1, \chi_2$.

2° Les dérivées d'une fonction de x, y, z_1, z_2 par rapport à ces quantités considérées comme variables indépendantes. Nous les désignerons par le symbole δ . Pour une fonction Φ de $x, y, z_1, z_2, \varpi_1, \chi_1, \varpi_2, \chi_2$ on a

$$(7) \quad \frac{\delta \Phi}{\delta z_i} = \Phi_{z_i} + \Phi_{\varpi_1} \frac{\delta \varpi_1}{\delta z_i} + \Phi_{\varpi_2} \frac{\delta \varpi_2}{\delta z_i} + \Phi_{\chi_1} \frac{\delta \chi_1}{\delta z_i} + \Phi_{\chi_2} \frac{\delta \chi_2}{\delta z_i} \quad (i = 1, 2).$$

3° Les dérivées prises suivant le couple de surfaces (quelconque d'ailleurs) dont les plans tangents ont pour coefficients angulaires p_1, q_1, p_2, q_2 . Nous les désignerons par le symbole ∂ ; on a (pour

(¹) En particulier, ces surfaces sont limitées à deux contours donnés C_1, C_2 , lesquels font partie d'un même cylindre parallèle à l'axe des z .

une fonction de x, y, z_1, z_2)

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\delta}{\delta x} + p_1 \frac{\delta}{\delta z_1} + p_2 \frac{\delta}{\delta z_2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\delta}{\delta y} + q_1 \frac{\delta}{\delta z_1} + q_2 \frac{\delta}{\delta z_2}. \end{cases}$$

4° Les dérivées prises suivant les extrémales (4), en regardant, par conséquent, z_1, z_2 comme fonctions de x, y et a, b comme constants. Ces dérivées, qui seront désignées par le symbole $\mathfrak{D}$, sont liées aux dérivées δ par la relation

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{D}}{\partial x} = \frac{\delta}{\delta x} + \varpi_1 \frac{\delta}{\delta z_1} + \varpi_2 \frac{\delta}{\delta z_2}, \\ \frac{\mathfrak{D}}{\partial y} = \frac{\delta}{\delta y} + \chi_1 \frac{\delta}{\delta z_1} + \chi_2 \frac{\delta}{\delta z_2}. \end{cases}$$

Cela posé, les conditions pour que, φ étant l'expression (4), l'intégrale $\int \int \varphi dx dy$ ne dépende que du contour, soit

$$\frac{\delta \varphi}{\delta z_1} - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y} \varphi_{q_1} = 0, \quad \frac{\delta \varphi}{\delta z_2} - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{p_2} - \frac{\partial}{\partial y} \varphi_{q_2} = 0$$

(égalités devant avoir lieu quels que soient les p, q) se réduisent, en tenant compte des formules (8) et de ce que les surfaces (5) sont des extrémales, à

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\delta}{\delta z_2} f_{\varpi_1} - \frac{\delta}{\delta z_1} f_{\varpi_2} = 0, \\ \frac{\delta}{\delta z_2} f_{\chi_1} - \frac{\delta}{\delta z_1} f_{\chi_2} = 0. \end{cases}$$

Elles ne seront donc pas vérifiées en général.

Mais si (ce que nous avons le droit de faire) nous ajoutons à f les deux termes intégrables

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\mu p_1 z_2) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu q_1 z_2) &= \frac{\partial \mu}{\partial y} p_1 z_2 - \frac{\partial \mu}{\partial x} q_1 z_2 + \mu (p_1 q_2 - q_1 p_2) \\ &= \frac{\delta \mu}{\delta y} p_1 z_2 - \frac{\delta \mu}{\delta x} q_1 z_2 + \lambda (p_1 q_2 - q_1 p_2) \end{aligned}$$

(μ étant une fonction de x, y, z_1, z_2 et λ désignant la combinaison

$$\lambda = \mu + z_2 \frac{\delta \mu}{\delta z_2},$$

ou encore si, sans changer f , nous ajoutons à l'expression (4) le terme

$$-\lambda[(p_1 - w_1)(q_2 - \chi_2) - (p_2 - w_2)(q_1 - \chi_1)],$$

les équations (10) sont remplacées par

$$(10') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_2} f w_1 - \frac{\partial}{\partial z_1} f w_2 + \lambda \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \chi_2}{\partial z_2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z_2} f \chi_1 - \frac{\partial}{\partial z_1} f \chi_2 + \lambda \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

et, pour satisfaire aux conditions du problème, nous n'aurons qu'à déterminer λ par ces dernières équations.

Or celles-ci ne seront autres que les équations posées par Clebsch. Il suffit, pour les ramener à la forme de Clebsch, de transformer les dérivées δ en remplaçant les variables indépendantes z_1, z_2 par les variables a, b . Les dérivées des unes par rapport aux autres sont les quantités précédemment désignées par $\zeta_1, \zeta_2, \tau_1, \tau_2$, et le déterminant fonctionnel (6) est celui que nous avons appelé Δ .

Comme dans la méthode de Clebsch, par conséquent, les équations (10') forment un système complètement intégrable et ont, par conséquent, une solution λ dépendant d'une constante arbitraire.

Nous sommes donc amenés exactement au même point que dans la méthode précédente et nous aurons à étudier un système analogue à S (mais notablement plus compliqué et plus difficile à former, puisque les équations ne seraient plus linéaires) obtenu en éliminant z_1, z_2 entre les équations (10') et celles qui expriment que la famille (5) est composée d'extrémales. Nous devrons exprimer que ce système admet une solution satisfaisant aux inégalités (3).

IV. En réalité, on doit présumer que la discussion dont nous venons de parler n'est pas nécessaire.

Si, en effet, nous considérons, non plus la méthode de Hilbert, mais la méthode de *Weierstrass* sous sa forme primitive, nous arriverons à des conclusions d'une forme notablement différente.

Soient, en effet, (s_1, s_2) le couple de surfaces qui constitue l'extrémale étudiée; (S_1, S_2) un autre couple qu'on veut lui com-

parer, et qui est limité au même contour (C_1, C_2) . Sur (S_1, S_2) traçons un couple de contours variables (γ_1, γ_2) (γ_1 et γ_2 étant, bien entendu, situés sur un même cylindre parallèle à Ox). Par (γ_1, γ_2) faisons passer un couple de surfaces (Σ_1, Σ_2) constituant une *extrémale*. Si cette dernière construction est toujours possible, il suffira de faire varier les contours γ_1, γ_2 depuis un couple de points jusqu'à la position (C_1, C_2) pour appliquer le raisonnement de Weierstrass.

Or la condition, analogue à celle de Legendre, à laquelle on arrive ainsi (pour le minimum faible) est la condition *nécessaire* rappelée en premier lieu.

Seulement, en opérant ainsi, la difficulté apparaît dans la condition de Jacobi. Au lieu de supposer simplement l'existence d'une famille d'extrémales à deux paramètres, il faudrait exprimer que l'on peut construire le couple extrémal (Σ_1, Σ_2) , c'est-à-dire résoudre un problème de Dirichlet à deux inconnues dans les conditions les plus générales et les plus difficiles, puisque γ_1 et γ_2 sont quelconques.

L'état actuel de la Science ne permettrait pas, par exemple, de déduire de cette méthode l'existence du minimum dans une aire d'intégration très petite; ce qui résulte, au contraire, des méthodes de Clebsch-Hilbert, puisque, en raison de la constante arbitraire qui figure dans λ , on peut toujours supposer que cette quantité satisfait aux inégalités (3) aux environs d'un point donné quelconque.

Je terminerai en indiquant quelques points sur lesquels, dans les leçons professées au Collège de France il y a deux ans, j'ai dû compléter les résultats acquis en Calcul des variations.

Le premier concerne les *problèmes isopérimétriques*, dans lesquels on cherche l'extremum d'une certaine intégrale I_0 , connaissant les valeurs d'une ou plusieurs autres intégrales données et certaines conditions accessoires. Le résultat fondamental (qui ramène cet extremum à un extremum libre par l'intervention d'un multiplicateur) a dû être étendu au cas où, parmi les conditions accessoires, figurent des conditions d'inégalité. Il reste encore vrai dans ce cas; mais la démonstration fait appel à des considérations sensiblement différentes des considérations classiques.

D'autre part, la question de savoir si la *construction de Weierstrass* est possible, dans ce même problème isopérimétrique, peut, dans beaucoup de cas, être considérée comme résolue si l'arc considéré satisfait aux conditions suffisantes du minimum (par exemple) pour l'intégrale $I_0 + lI_1$ (I_1 étant l'intégrale donnée et l le multiplicateur), ce minimum étant considéré comme libre. On constate, en effet, dans ces conditions, que la valeur de $I_0 + lI_1$ est une fonction croissante de l lorsque cette quantité varie pendant que les extrémités restent fixes. Cette remarque sera, par exemple, très utile pour la démonstration de l'existence du minimum dans une région suffisamment petite.

Enfin je noterai encore une simplification assez grande que l'on peut apporter à la démonstration du théorème de M. Osgrod, d'après lequel on peut assigner une limite inférieure à la différence qui existe entre l'intégrale minima et une intégrale variée. Un procédé, tout semblable à celui qui a été employé par M. Kneser à propos de la stabilité de l'équilibre du fil pesant, permet de se passer des inégalités employées dans les différentes démonstrations directes données jusqu'ici. Malheureusement, cette méthode n'est plus applicable aux intégrales multiples, pour lesquelles, au surplus, la question est toujours beaucoup plus délicate.

Je me contenterai de mentionner ces différents points, qui seront traités avec plus de détails dans un Ouvrage ultérieur.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I^{re} PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en série*; 1886. 15 fr.

II^e PARTIE : *Application de la Mécanique à la Physique, à la Géométrie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888. 20 fr.

III^e PARTIE : *Fragments. (Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5^e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.)* Publiée par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891. 8 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES.

(FASCICULE 1).

	Pages.
État de la Société au commencement de 1905.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin.....	xv
Comptes rendus des séances.....	1
[S3] MAILLET. — Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés.	2
[M ² b] BLOCHÉ. — Remarques sur un cas de symétrie dans l'espace.	13
[H9f] CLAIRIN. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.....	14
[O6az] DE MONTHEUIL. — Détermination des surfaces de révolution admettant une surface de révolution donnée pour une surface moyenne.....	17
[M ² 6a] BLOCHE. — Sur les courbes gauches de 4 ^e ordre et de 4 ^e classe.	18
[A3g] DE MONTESSUS. — La résolution numérique des équations.....	26
[A5b] BERNSTEIN. — Sur l'interpolation.....	33
[D2b] ANDOYER. — Sur la sommation des séries.....	36
[J4d] COTTON. — Généralisation de la théorie du trièdre mobile.	42
[R1dz] DE SPARRE. — Note au sujet des mouvements à la surface de la terre.....	65
[J3c] HADAMARD. — Sur quelques questions de calcul des varia- tions.....	73

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e)

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut. Professeur à l'École Polytechnique.
— **Cours d'Analyse** professé à l'École Polytechnique. 2 volumes in-8.
(25 × 16), se vendant séparément.

TOME I: *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques*, avec 111 figures; 1902..... 16 fr.

TOME II: *Complément du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles*, avec 91 figures; 1904. 16 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAPPY, rue Pierre-Nicole, Paris (5°);
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6°.

TOME XXXIII. — FASCICULE II.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1905

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*,
banquier, rue de Trévis, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jendis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée, place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires; ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages** de texte imprimé.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 FÉVRIER 1905.

PRÉSIDENTE DE M. BOREL.

Communications :

M. Laisant : *Sur un dispositif propre à tracer une ellipse.*

M. Raffy : *Sur les surfaces isothermiques qui ont même représentation sphérique que les surfaces du second degré.*

SÉANCE DU 16 FÉVRIER 1905.

PRÉSIDENTE DE M. BOREL.

Élections :

M. l'abbé Fouët, présenté par MM. Borel et Désiré André, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Painlevé : *Sur le frottement.*

M. Lecornu : *Observations sur la précédente Communication.*

M. Hadamard : *Sur quelques questions de calcul des variations.*

M. Bioche adresse une *Note sur les permutations polyédriques.*

M. de Sparre adresse une *Note au sujet des mouvements à la surface de la Terre.*

SÉANCE DU 2 MARS 1905.

PRÉSIDENTE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Raffy : *Détermination des réseaux sphériques isothermes qui représentent les lignes de courbure d'une double infinité de surfaces isothermiques.*

M. M. Weill : *Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux.*

SÉANCE DU 16 MARS 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Fouché : *Sur la déviation des graves et les champs de force.*

M. Raffy : *Sur le problème général de la détermination des surfaces isothermiques.*

MM. Borel et Servant présentent quelques observations à propos de cette Communication.

M. Borel : *Remarques sur certaines questions de probabilité.*

M. de Sparre adresse une *Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre.*

M. Maillet adresse un Mémoire intitulé : *Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; applications à un système hydraulique de n réservoirs.*

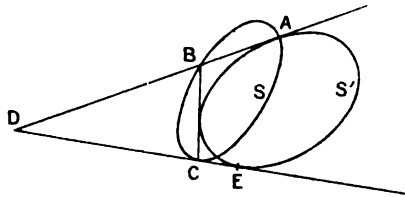
MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS IRRÉDUCTIBLES DU CINQUIÈME DEGRÉ, RÉSOLUBLES PAR RADICAUX;

Par M. MATHIEU WEILL.

Soient (*fig. 1*) une conique S' , trois tangentes DCE, DBA, BC, et une autre conique S passant par A, B, C, et touchant DE au

Fig. 1.



point C. Le pentagone ABCCB a ses sommets sur la conique S et ses côtés tangents à la conique S' ; dès lors, il existe une infinité de pentagones inscrits dans S et circonscrits à S' .

On aura pour S' l'équation

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

et, pour S , l'équation

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 + \beta(2\lambda^3\gamma + \mu\alpha) = 0$$

(BC ayant pour équation $\lambda^2\beta + 2\lambda\gamma + \alpha = 0$). Un point de la conique S est défini par

$$\alpha = 2\lambda \frac{\ell - \lambda^2}{\mu - \ell} \gamma,$$

$$\beta = \frac{-2\lambda}{\ell} \frac{\mu - \lambda^2}{\mu - \ell} \gamma.$$

La droite qui joint deux points a pour équation

$$\alpha[\mu - (\ell + \ell')] - \beta\ell\ell' - 2\lambda\gamma(\ell + \ell' - \lambda^2) = 0.$$

Cette droite sera tangente à S' , dont un point est défini par

$$\alpha = \lambda\theta,$$

$$\beta = \frac{\lambda}{\theta},$$

si l'équation

$$\theta^2[\mu - (\ell + \ell')] - \ell\ell' - 2\lambda\theta(\ell + \ell' - \lambda^2) = 0$$

a ses racines égales, ce qui donne

$$\ell^2(\lambda^2 - \ell') + \ell[2\lambda^2(\ell' - \lambda^2) - \ell'^2 + \mu\ell'] + \lambda^2(\ell' - \lambda^2)^2 = 0.$$

Considérons un pentagone inscrit dans la conique S et circonscrit à la conique S' , et soient t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 les valeurs correspondantes du paramètre t . On aura

$$(1) \quad \begin{cases} t_2 + t_3 = \frac{2\lambda^2(t_1 - \lambda^2) - t_1^2 + \mu t_1}{t_1 - \lambda^2}, \\ t_2 t_3 = \lambda^2(\lambda^2 - t_1). \end{cases}$$

Transportons ces valeurs dans l'équation de la droite qui joint les points correspondant à t_2 et t_3 , nous aurons t_1 au second degré, nous en déduirons, immédiatement, l'équation de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets du pentagone

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 + \beta(2\lambda^3\gamma + \mu\alpha) + (\mu - \lambda^2)(\gamma^2 - \alpha\beta) = 0.$$

Cette conique passe par les points communs aux deux premières, résultat bien connu.

D'autre part, en éliminant t_1 entre les relations (1), nous aurons, entre t_2 et t_3 , la relation

$$\lambda^2(t_2 t_3)(t_2 + t_3) + \mu \lambda^6 - \lambda^6 - \mu \lambda^2 t_2 t_3 - t_2^2 t_3^2 = 0.$$

Cette même relation existe évidemment, entre t_1 et t_3 , et aussi entre t_1 et t_2 ; on a donc

$$t_2 + t_3 = \lambda^2 \frac{\mu - t_1}{\lambda^2 - t_1},$$

$$t_2 t_3 = \lambda^6 \frac{\mu - \lambda^2}{t_1(\lambda^2 - t_1)}.$$

Désignons par θ la somme des produits 2 à 2 des 5 quantités t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , c'est-à-dire la quantité

$$(t_2 + t_3 + t_4 + t_5)t_1 + t_3 t_4 + t_2 t_5 + (t_3 + t_4)(t_2 + t_5),$$

on aura donc

$$\theta = \frac{f(t_1)}{\varphi(t_1)}$$

ou

$$\theta \varphi(t_1) - f(t_1) = 0,$$

relation où t_1 pourra être remplacé par chacune des valeurs t_2, t_3, t_4, t_5 ; on obtient ainsi l'équation

$$t^5 - t^4(2\lambda^2 + \mu) + \theta t^3 - \lambda^2 t^2(2\theta - \mu \lambda^2 - \mu^2 - 3\lambda^4) \\ - \lambda^4 t(2\lambda^4 + \mu \lambda^2 - \theta) + \lambda^4(\lambda^2 - \mu) = 0.$$

Cette équation donnera, par la variation de θ , les 5 valeurs de t qui définissent le pentagone. Or, 2 quelconques de ces valeurs étant données, les autres en sont des fonctions rationnelles, comme le montre l'analyse précédente, c'est donc une équation de Galois, c'est à-dire que les 5 racines s'expriment par des radicaux portant sur des fonctions rationnelles des 3 paramètres θ, μ, λ^2 . On a donc le théorème suivant :

L'équation

$$t^5 - t^4(2a + b) + ct^3 - at^2(2c - ab - b^2 - 3a^2) \\ - a^2 t(2a^2 + ab - c) + a^4(a - b) = 0,$$

dans laquelle a, b, c sont 3 quantités quelconques, est résoluble par radicaux.

Soient t_1 et t_2 deux des racines, les autres auront pour valeurs

$$t_3 = \frac{a(a - t_1)}{t_1},$$

$$t_4 = a^2 \frac{t_1 + t_2 - a}{t_2},$$

$$t_5 = \frac{a(a - t_1)}{t_2}.$$

On peut employer une autre méthode. Considérons deux coniques ayant pour équations

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$Ax^2 + By^2 - z^2 = 0.$$

Un point de la première est défini par les équations

$$x = z \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = z \frac{2t}{1 + t^2},$$

et la droite qui joint 2 points a pour équation

$$x(1 - tt') + y(t + t') - z(1 + tt') = 0.$$

En exprimant que cette droite touche la seconde conique, on trouve facilement

$$\frac{(t + t')^2}{B} + \frac{(1 - tt')^2}{A} - (1 + tt')^2 = 0,$$

ou bien

$$t^2(1 + \lambda t'^2) + 2\mu tt' + t'^2 + \lambda = 0,$$

$$\left(\lambda = \frac{B - AB}{A}, \quad \mu = \frac{A - B - AB}{A} \right).$$

Considérons un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde, et soient t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 les paramètres qui correspondent aux sommets. On aura

$$t_2 + t_5 = \frac{-2\mu t_1}{1 + \lambda t_1^2}, \quad t_2 t_5 = \frac{\lambda + t_1^2}{1 + \lambda t_1^2}.$$

Il en résulte entre t_2 et t_3 une relation de la forme

$$t^2(1 + \lambda_1 t'^2) + 2\mu_1 t t' + t'^2 + \lambda = 0,$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{4\lambda\mu^2}{(\lambda^2 - 1)^2}; \quad \mu_1 = 1 - \frac{2\mu^2(\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 - 1)^2}.$$

On aura donc

$$t_3 + t_4 = \frac{-2\mu_1 t_1}{1 + \lambda_1 t_1^2}, \quad t_3 t_4 = \frac{\lambda_1 + t_1^2}{1 + \lambda_1 t_1^2}.$$

Appelons θ le produit t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , nous aurons

$$\theta = t_1 \frac{\lambda + t_1^2}{1 + \lambda t_1^2} \frac{\lambda_1 + t_1^2}{1 + \lambda_1 t_1^2}.$$

Donc l'équation

$$t(\lambda + t^2)(\lambda_1 + t^2) - \theta(1 + \lambda t^2)(1 + \lambda_1 t^2) = 0$$

aura pour racines les 5 valeurs de t ; cette équation développée est

$$t^5 - \theta\lambda\lambda_1 t^4 + t^3(\lambda + \lambda_1) - \theta(\lambda + \lambda_1)t^2 + \lambda\lambda_1 t - \theta = 0.$$

Les paramètres λ et λ_1 sont liés par une relation qu'il faut trouver.

Or, si nous joignons t_1 à t_3 , puis t_3 à t_5 , la droite $t_1 t_3$ sera telle que l'on aura entre t_1 et t_3 la relation

$$t^2(1 + \lambda_2 t'^2) + 2\mu_2 t t' + t'^2 + \lambda_2 = 0,$$

avec

$$\lambda_2 = \frac{4\lambda_1\mu_1^2}{(\lambda_1^2 - 1)^2}, \quad \mu_2 = 1 - \frac{2\mu_1^2(\lambda_1^2 + 1)}{(\lambda_1^2 - 1)^2}.$$

On aura, si le polygone se ferme,

$$\lambda_2 = \lambda, \quad \mu_2 = \mu.$$

Exprimant ces conditions, on trouve

$$16\mu^2[(\lambda^2 - 1)^2 - 2\mu^2(\lambda^2 + 1)]^2(\lambda^2 - 1)^2 = [16\lambda^2\mu^4 - (\lambda^2 - 1)^4]^2, \\ 1 - \mu = \frac{[(\lambda^2 - 1)^2 - 2\mu^2(\lambda^2 + 1)]^2[(\lambda^2 - 1)^4 + 16\lambda^2\mu^4]}{[16\lambda^2\mu^4 - (\lambda^2 - 1)^4]^2 8\mu^2(\lambda^2 - 1)^2}.$$

La première donne

$$4\mu(\lambda^2 - 1)[(\lambda^2 - 1)^2 - 2\mu^2(\lambda^2 + 1)]^2 - [16\lambda^2\mu^4 - (\lambda^2 - 1)^4] = 0,$$

et la seconde, combinée avec la première, donne

$$8\mu^2(1-\mu)(\lambda^2-1)^2 - [(\lambda^2-1)^4 + 16\lambda^2\mu^4] = 0.$$

On voit facilement que, dans la première, il faut prendre le signe +.

En posant $\lambda^2 - 1 = z$, les 2 relations deviennent

$$\begin{aligned} (z - 2\mu)[-z^2 + 2\mu z^2 + (4\mu^2 - 8\mu^3)z - 8\mu^3] &= 0, \\ (z + 2\mu)(-z^2 + 2\mu z^2 + \dots) &= 0. \end{aligned}$$

La relation cherchée est donc, en posant $2\mu = t$,

$$z^3 - tz^2 + (t^3 - t^2)z + t^3 = 0.$$

Elle donne, sous une forme simple, la condition entre A et B pour qu'il existe un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde; elle peut s'écrire

$$(\lambda^2 - 1)^2 - 2\mu(\lambda^2 - 1)^2 + (8\mu^3 - 4\mu^2)(\lambda^2 - 1) + 8\mu^3 = 0,$$

elle permet d'exprimer μ en fonction de λ par des radicaux, et par suite, λ_1 en fonction de λ par des radicaux, donc l'équation du 5^e degré envisagée plus haut est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles des deux paramètres indépendants λ et θ . On trouve, d'ailleurs, entre λ et λ_1 , la relation

$$(\lambda\lambda_1 - 1)^2\lambda\lambda_1 - (\lambda - \lambda_1)^2 = 0.$$

Posons

$$\lambda\lambda_1 = a, \quad \lambda + \lambda_1 = b,$$

il vient

$$b = \sqrt{a^2 - 2a^2 + 5a},$$

on a donc l'énoncé suivant :

L'équation

$$t^3 - act^4 + (t^3 - ct^2)\sqrt{a^2 - 2a^2 + 5a} + ta - c = 0,$$

où a et c sont deux paramètres indépendants, est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles de a et c.

SUR LES PERMUTATIONS POLYÉDRIQUES;

Par M. CH. BIOCHE.

1. Les permutations ordinaires et les permutations circulaires ne sont autre chose que les dispositions qu'on peut réaliser avec n objets placés en ligne droite ou en cercle. Il semble assez naturel de considérer d'autres dispositions, telles que les différentes façons d'affecter n lettres aux n sommets d'un polyèdre. Ce sont ces dernières dispositions que j'appellerai *permutations polyédriques*. Je me propose de calculer leur nombre.

Pour préciser le problème j'en donnerai l'énoncé suivant :

On considère n lettres, et des polyèdres égaux ayant n sommets. On affecte à chaque sommet d'un polyèdre une des n lettres; combien peut-on obtenir de dispositions de ces lettres, deux dispositions étant les mêmes si l'on peut faire coïncider les polyèdres correspondants de façon que les sommets qui coïncident soient affectés de la même lettre?

2. Supposons toutes les dispositions réalisées, chacune ne l'étant qu'une seule fois; soit X leur nombre, il leur correspondra autant de polyèdres que je désignerai par

$$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_X.$$

J'imagine un polyèdre Π_0 , égal aux polyèdres précédents et sur lequel je numérote les sommets de 1 à n , d'une façon d'ailleurs arbitraire. Si je fais coïncider Π_0 avec un des polyèdres considérés, Π_i par exemple, j'obtiens une permutation de n lettres en lisant sur Π_i les lettres dans l'ordre des numéros qui leur correspondent sur Π_0 .

A toute permutation des n lettres correspond un polyèdre Π_i ; qui se déduit de Π_0 en remplaçant les numéros correspondant aux sommets de Π_0 par les lettres de même rang de la permutation donnée; et l'on n'a qu'un polyèdre correspondant à une permutation donnée, puisqu'on suppose les permutations polyédriques distinctes.

Mais à un polyèdre Π_i il correspond autant de permutations des n lettres qu'il y a de façons de faire coïncider Π_0 avec Π_i ; soit μ le nombre de ces *modes de coïncidence*; on voit qu'à toute permutation polyédrique correspondent μ permutations ordinaires. On a donc

$$X = \frac{n!}{\mu}.$$

3. En particulier, si les polyèdres Π sont réguliers et si p est le nombre des arêtes de chaque angle solide, on voit facilement que

$$\mu = np,$$

on a alors

$$X = \frac{(n-1)!}{p};$$

si les polyèdres Π sont des pyramides régulières, la base ayant $n-1$ sommets, on voit facilement que si $n > 4$ on a

$$\mu = (n-1),$$

et l'on a

$$X = \frac{n!}{(n-1)}.$$

On peut d'ailleurs facilement vérifier ces résultats ainsi que bien d'autres correspondant à des cas particuliers.

4. J'ai parlé, dans ce qui précède, de sommets d'un polyèdre pour plus de commodité; mais on peut considérer des systèmes de points tous situés dans un plan. Seulement, si l'on suppose toutes les figures situées dans le même plan, on pourra prendre pour μ soit le nombre des modes de coïncidence réalisables sans faire sortir les figures du plan commun, soit le nombre des modes de coïncidence réalisés quel que soit le déplacement. Le nombre X des permutations de trois lettres A, B, C, mises aux sommets d'un triangle isocèle, serait alors de 6 dans le premier cas (où μ serait égal à 1), et de 3 dans le second (où μ serait égal à 2).

**SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;**

Par M. J. CLAIRIN.

J'ai déterminé, dans un travail antérieur (¹), toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, réductibles à une équation linéaire par une transformation de Bäcklund de seconde espèce, qui conserve les variables indépendantes, et qui fasse correspondre à chaque intégrale de l'équation considérée une seule intégrale de l'équation linéaire. Je me propose d'étudier les transformations (B_2) qui permettent de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre par une équation linéaire, en faisant correspondre à chaque intégrale de l'équation donnée une infinité d'intégrales de l'équation linéaire, les variables indépendantes étant toujours conservées; je montrerai que, exception faite de deux cas particuliers, les seules transformations satisfaisant aux conditions énoncées sont les transformations indiquées par Moutard et M. Lucien Lévy.

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre que nous pouvons toujours écrire, avec les notations ordinaires,

$$(1) \quad s = ap + bz,$$

a et b désignant deux fonctions des variables indépendantes x et y ; la question proposée revient à celle-ci : *Trouver dans quels cas la fonction z' de x et y définie par l'égalité*

$$(2) \quad z' = f(x, y, z, p)$$

satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre quand on remplace z par une intégrale de l'équation (1).

(¹) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1903.

On tire immédiatement de l'égalité précédente

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial x} &= p' = \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + r \frac{\partial f}{\partial p}, \\ \frac{\partial z'}{\partial y} &= q' = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + (ap + bz) \frac{\partial f}{\partial p}, \\ \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} &= s' = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + p \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + (ap + bz) \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p} + p \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + \left[\left(b + \frac{\partial a}{\partial x} \right) p + \frac{\partial b}{\partial x} z \right] \frac{\partial f}{\partial p} + q \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + p \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + r \left[a \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial p} + (ap + bz) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right] + qr \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p}. \end{aligned} \right.$$

On peut remarquer que f doit dépendre effectivement des deux variables z et p . Si f était indépendant de p , (2) définirait une transformation ponctuelle de l'équation (1); si f ne contenait pas z , z' satisferait à une équation déduite par un changement de fonction inconnue de l'une des équations obtenues en appliquant à (1) la transformation de Laplace.

Les deux premières équations (3) sont donc résolubles par rapport à q et à r ; en portant les valeurs trouvées dans la dernière équation, il vient

$$s' = H(x, y, z, p) p' q' + K(x, y, z, p) p' + L(x, y, z, p) q' + M(x, y, z, p).$$

z' satisfera à une équation aux dérivées partielles du second ordre si H, K, L, M peuvent s'exprimer à l'aide de (2) en fonction de x, y, z' et cette équation sera nécessairement de la forme

$$s' = \mu(x, y, z') p' q' + \alpha(x, y, z') p' + \beta(x, y, z') q' + \gamma(x, y, z').$$

En prenant pour fonction inconnue $\int e^{s'-\mu} dz' dz'$ au lieu de z' , on revient au cas où μ est nul : supposons cette transformation effectuée. $H(x, y, z, p)$ s'annulant en même temps que $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial p}$, on devra avoir

$$z' = f(x, y, z, p) = \varphi(x, y, z) + \psi(x, y, p).$$

$L(x, y, z, p)$ sera une fonction de x, y, z' seulement si le déterminant fonctionnel $\frac{D(L, f)}{D}$ est nul; remplaçons L par sa valeur

$\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$, cette condition s'écrit :

$$(4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Donnons à z une valeur fixe; on tire de là

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{m(x, y)}{p + \omega(x, y)}$$

et

$$\psi(x, y, p) = m(x, y) \text{Log}[p + \omega(x, y)] \quad (1),$$

à moins que, dans le déterminant (4), le coefficient de p ne soit nul ou que ce déterminant ne s'annule identiquement quelle que soit ψ . Examinons ces deux dernières hypothèses : le déterminant ne contient pas de terme dépendant de p si l'on a

$$(5) \quad \varphi(x, y, z) = v(x, y)e^{u(x, y)z} + w(x, y) \quad (u, v \neq 0),$$

ou si φ est une fonction linéaire de z . Il ne peut arriver que φ ait la forme (5); en substituant dans le déterminant écrit plus haut, on verrait que, dans ce cas, $\frac{\partial \psi}{\partial p}$ dépendrait de z . Le déterminant est identiquement nul si φ est une fonction linéaire de z .

Calculons le coefficient de p' ,

$$K(x, y, z, p) = a + \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial p} + (ap + bz) \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}}{\frac{\partial \psi}{\partial p}},$$

et écrivons, encore que le déterminant $\frac{D(K, f)}{D(z, p)}$ s'annule identiquement. Nous trouvons

$$(6) \quad b \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial p} + (ap + bz) \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}}{\frac{\partial \psi}{\partial p}} \right] = 0.$$

(1) Il est évidemment inutile d'ajouter à l'expression trouvée pour ψ une fonction de x et y , puisqu'on peut toujours retrancher une pareille fonction de z .

Nous négligeons d'abord le cas où le coefficient b serait nul.

En donnant à p une valeur fixe, on trouve

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{n(x, y)}{z + \xi(x, y)},$$

$$\varphi(x, y, z) = n(x, y) \text{Log}[z + \xi(x, y)],$$

si z figure dans l'équation (6). Abstraction faite du cas où ψ est une fonction linéaire et où, par conséquent, le premier membre de (6) s'annule identiquement, z ne figure pas dans cette équation si l'on a

$$\psi(x, y, p) = v_0(x, y)e^{u_0(x, y)p} + w_0(x, y) \quad (u_0, v_0 \neq 0);$$

en remplaçant ψ par cette fonction, il vient pour $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ une expression contenant p , ce qui est impossible.

En résumé, il n'y a que deux cas à considérer : φ et ψ sont respectivement égales à

$$n(x, y) \text{Log}[z + \xi(x, y)], \quad m(x, y) \text{Log}[p + \omega(x, y)],$$

ou contiennent linéairement les quantités z et p .

Considérons d'abord le premier cas : portons dans l'équation (4) les expressions que nous venons de trouver pour φ et ψ ; il reste, après réductions,

$$m\left(p + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + n(p + \omega) = 0.$$

Les fonctions m et n ne diffèrent donc que par le signe, en prenant $\frac{z'}{m(x, y)}$ pour nouvelle fonction inconnue, on voit que l'on peut supposer m égale à 1 et n égale à -1 . L'équation précédente donne, en outre,

$$\omega = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Remplaçons dans l'équation linéaire (1) z par $z - \xi(x, y)$, elle devient

$$z + ap + bz + \sigma(x, y) = 0,$$

dans cette dernière équation remplaçons z par e^{z_1} , nous trouvons

$$(7) \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial y} + a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b + \sigma e^{-z_1} = 0.$$

l'équation qui définit la transformation étant

$$z' = \log \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right).$$

D'après la forme de l'équation (7), $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et par conséquent z' ne satisferont à des équations aux dérivées partielles du second ordre que si $\sigma(x, y)$ est nulle (1), c'est-à-dire si ξ est une intégrale de l'équation (1). Il en résulte que l'on a

$$z' = \text{Log} \left[\frac{P + \frac{\partial \xi}{\partial x}}{z + \xi(x, y)} \right],$$

ou simplement

$$z' = \text{Log} \left(\frac{P}{z} \right),$$

si l'on remplace z par $z - \xi(x, y)$, ce qui ne change pas l'équation (1). On trouve donc ainsi les transformations indiquées par Moutard.

Passons au cas où φ et ψ dépendent linéairement de z et de p , il existe toujours des fonctions θ , τ , ζ de x et y telles que l'on puisse écrire

$$z' = \theta(x, y) \frac{\partial \left[\frac{z}{\eta(x, y)} \right]}{\partial x} + \zeta(x, y);$$

tout revient à chercher si $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{\eta} \right)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre. $\frac{z}{\eta} = z_1$ est une intégrale de

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + a \right) \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial y} + \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} a + b \right) z_1 = 0.$$

$\frac{\partial z_1}{\partial x}$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre si, dans l'équation qui vient d'être écrite, le rapport des coefficients de z_1 et de $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ ne dépend que de y (2); écrivons cette con-

(1) GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*. t. II, p. 244.

(2) GOURSAT, *loc. cit.*

dition

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + b \eta_1 = Y \frac{\partial \eta_1}{\partial x}.$$

Remplaçons $\eta(x, y)$ par $\eta_1(x, y) \int Y dy$; on aperçoit immédiatement que η_1 est une intégrale de l'équation linéaire donnée; la transformation considérée est une transformation de M. Lucien Lévy, puisqu'elle équivaut à la transformation

$$z' = \tau_1 p - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} z.$$

Lorsque b est nul, nous écrirons l'équation linéaire sous la forme suivante,

$$(8) \quad z = \frac{1}{a_0} \frac{\partial a_0}{\partial y} p,$$

a_0 désignant une fonction de x et y . De la condition (6) on déduit que l'on a

$$\psi(x, y, p) = m(x, y) \Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right) + n(x, y) \quad (1),$$

ou simplement

$$\psi(x, y, p) = \Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right),$$

si l'on effectue un changement d'inconnue dans l'équation transformée, comme nous avons fait plusieurs fois. Nous supposons d'abord que φ ne contient pas linéairement z , l'équation (4) nous permet de déterminer la forme de la fonction Ψ ,

$$\Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right) = \text{Log} \left[\frac{p}{a_0} + X'(x) \right],$$

en négligeant toujours, ce qui est permis, un facteur indépendant de p et un terme additif également indépendant de p . L'équation (4) fournit alors le système

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = a_0 X' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \rho(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \tau(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

(1) Il est bien évident que les fonctions m et n n'ont aucune relation avec celles qui ont été représentées plus haut par les mêmes lettres. Il en est de même pour les fonctions désignées plus loin par η et ω .

qui est intégrable à condition que l'on ait

$$\rho = \alpha_0(x, y) X'(x) Y(y), \quad \tau = Y(y).$$

En écrivant que $\frac{D(M, f)}{D(z, p)}$ est nul et en tenant compte de (9), on arrive à

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 Y) = 0,$$

ce qui signifie que Y est nulle, à moins que l'équation (8) n'ait ses deux invariants nuls.

Si Y est nulle, la deuxième équation (9) montre que l'on peut écrire

$$\varphi(x, y, z) = -\text{Log}[z + \omega(x, y)];$$

en recommençant les raisonnements faits plus haut, on montre que l'on obtient une transformation de Moutard.

Lorsque l'équation (8) a ses deux invariants nuls, il est permis de supposer α_0 égale à 1 : de (10) on déduit que Y est une constante que nous pouvons remplacer par l'unité. Le système (9) donne alors

$$\varphi(x, y, z) = -\text{Log}(e^{z+X} - 1);$$

finalement, en écrivant partout $z - X$ au lieu de z , on trouve

$$z' = \text{Log}\left(\frac{p}{e^{z-1} - 1}\right);$$

cette transformation permet de passer de l'équation

$$s = 0 \quad \text{à} \quad s' + q' e^{z'} = 0.$$

Pour terminer, il reste à examiner le cas où φ est linéaire en z , l'équation donnée ayant toujours la forme (8). On a alors

$$(11) \quad z' = \tau_1(x, y) z + \Psi\left(x, \frac{p}{\alpha_0}\right),$$

et l'on en tire

$$q' = \frac{\partial \tau_1}{\partial y} z + \tau_1 q, \quad s' = \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x \partial y} z + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} p + \frac{\partial \tau_1}{\partial x} q + \frac{\tau_1}{\alpha_0} \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} p,$$

puis, en remplaçant q par sa valeur,

$$(12) \quad s' - \frac{1}{\tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} q' = \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\tau_1}{\alpha_0} \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} \right) p + \left(\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \right) z.$$

Imaginons que, dans le second membre de cette dernière équation, les coefficients de z et p ne soient pas nuls; si l'on exprime que ce second membre ne dépend que de x, y, z' , en vertu de (11) on trouve que Ψ est une fonction linéaire de p et que l'on a une transformation de M. Lucien Lévy. En écrivant, au contraire, que le second membre de (12) est identiquement nul, on trouve que α_0 satisfait à

$$\alpha_0 \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (8) a ses deux invariants nuls, ou encore que l'on peut supposer α_0 égale à 1. γ est alors une fonction de la seule variable x et un changement simple d'inconnue dans l'équation transformée permet de remplacer (11) par

$$z' = z + g(x, p);$$

les deux équations qui se correspondent sont

$$s = 0, \quad s' = 0.$$

En rapprochant les résultats qui viennent d'être établis de ceux que j'ai démontrés dans mon travail déjà cité des *Annales de la Faculté de Toulouse*, on voit que l'on connaît toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre, qu'on peut remplacer par une équation linéaire à l'aide d'une transformation de Bäcklund de deuxième espèce, tout en conservant les variables indépendantes. Si l'on supprime cette dernière condition, le problème est beaucoup plus compliqué; j'ai déterminé quelques équations qui sont déduites d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre par une transformation (B_2) ⁽¹⁾, je me bornerai à indiquer ici qu'en appliquant une transformation (B_1) aux équations que j'ai indiquées dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, on obtient de nouvelles équations jouissant de la propriété énoncée.

(1) *Comptes rendus*, 27 juin 1904.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES;

Par M. ARNAUD DENJOY.

Soit f une fonction définie en chaque point d'un ensemble parfait quelconque P . On sait ce que l'on entend par maximum et minimum de la fonction f en un point de cet ensemble et relativement à cet ensemble. Désignons par A et I ces deux fonctions qui sont définies en chaque point de P . La fonction A est semi-continue supérieurement, la fonction I semi-continue inférieurement.

La fonction A , qui est à elle-même son propre maximum, possède un minimum. Je le désigne par A' . La fonction semi-continue inférieurement A' possède un maximum. Je le désigne par A'' . Je désigne de même le minimum de A'' par A''' , et ainsi de suite. Je désigne d'une façon entièrement analogue les fonctions I' , I'' , I''' , ..., qui se déduisent de I . I' est le maximum de la fonction semi-continue inférieurement I . I'' est le minimum de la fonction semi-continue supérieurement I' . I''' est le maximum de I'' , etc.

Je démontre dès le début de cette Note que les fonctions de rang impair A' , A''' , ... coïncident entre elles, et aussi I' , I''' , ..., et qu'il en est de même des fonctions de rang pair A'' , A'''' , ..., d'une part, et I'' , I'''' , ..., d'autre part. Ce fait étant acquis :

1° Je donne les propriétés-définitions, caractéristiques des quatre fonctions A' , A'' , I' , I'' , et qui les relient directement à f ;

2° Je cherche si, par leurs propriétés, ces fonctions peuvent servir à caractériser une fonction f à laquelle elles appartiennent. Je trouve effectivement une relation, savoir $A' = I''$, $A'' = I'$, vérifiée sur tout ensemble parfait qui caractérise les fonctions limites de fonctions continues, ou de classe 1, suivant la terminologie de M. Baire;

3° J'ai cherché si, parmi ces fonctions, certaines conservent leurs propriétés à la limite; autrement dit, f_n étant une fonction tendant vers une fonction f , j'ai cherché si les fonctions a'_n , a''_n , i'_n , i''_n , relatives à f_n , tendent vers les fonctions A' , A'' , I' , I'' ,

relatives à la fonction f limite de f_n . Il n'en est rien, comme il est bien aisé de s'en convaincre par des exemples immédiats. Mais j'ai pu trouver des inégalités reliant les quantités A', A'', I', I'' , et les limites $\alpha', \alpha'', i', i''$ des fonctions $\alpha_n', \alpha_n'', i_n', i_n''$ dans le cas où ces limites existent. J'ai, à ce propos, énoncé un théorème général sur la façon dont s'opère la convergence d'une fonction tendant vers une fonction limite.

I.

En vue de simplifier l'exposition, je supposerai le plus souvent que l'ensemble parfait P , sur lequel sont définies les fonctions, est le continu linéaire. Mais, toutes les définitions et tous les résultats subsistent dans le cas où l'ensemble parfait P est quelconque. Il suffit de remplacer le mot *point* par *point de P* , le mot *intervalle* par *intervalle contenant des points de P* , les mots *point intérieur à un intervalle* par *point de P intérieur à un intervalle*, et cela dans les définitions, énoncés et démonstrations. On se rendra très aisément compte que, sous leur nouvelle forme, ceux-ci sont encore valables.

Soit donc f une fonction définie sur le continu linéaire P . Rappelons les propriétés caractéristiques du maximum A et du minimum I de f .

H étant un point quelconque de P et étant donné un nombre positif ϵ quelconque :

A . — 1° Je puis trouver un intervalle CD entourant le point considéré H et en chaque point duquel on a

$$f < A(H) + \epsilon;$$

2° Quelque petit que soit CD entourant H , il y a à son intérieur un point (pouvant coïncider avec H) où $f > A(H) - \epsilon$.

L'ensemble de ces deux propriétés montre que le nombre $A(H)$ est le plus petit jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°. Ces propriétés sont donc caractéristiques de $A(H)$, c'est-à-dire que tout nombre jouissant de toutes les deux à la fois coïncide forcément avec A .

Pour I , définitions analogues :

I . — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD entourant H , en chaque point duquel $f > I(H) - \varepsilon$;

2° Quelque petit que soit CD contenant H à son intérieur, il existe dans CD un point où $f < I(H) + \varepsilon$.

$I(H)$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°. L'ensemble de ces propriétés caractérise donc I .

Ceci posé, je vais démontrer les égalités

$$A' = A'' = A_1 = \dots = A_{2n+1},$$

$$A' = A'' = A_1 = \dots = A_{2n+1}$$

et les inégalités analogues relatives à I' , I'' , I''' , ... Remarquons que les premières se ramènent à l'égalité $A' = A''$. Car la fonction qui joue, par rapport à A''' , le rôle que A''' joue par rapport à A' , est A_5 . Si donc A' et A''' sont identiques, $A''' = A_5$, et ainsi de suite, pour les fonctions d'indice impair. Mais, si toutes les fonctions d'indice impair sont identiques, leurs maxima sont aussi identiques. Or, ces maxima ne sont autres que A' , A'' , ... Donc, les deux suites d'égalités écrites se ramènent à $A' = A''$. De même les égalités relatives aux I' , I'' , I''' , ... se ramènent à $I' = I''$. Pour démontrer ces deux dernières, j'aurai besoin du lemme suivant :

LEMME. — Si $f \geq g$, le maximum et le minimum de f en chaque point sont respectivement supérieurs ou égaux au maximum et au minimum de g au même point.

Soient A_1 le maximum et I_1 le minimum de f ; A_2 et I_2 le maximum et le minimum de g . Je veux montrer que $f \geq g$ entraîne $A_1 \geq A_2$, $I_1 \geq I_2$. Soit, en effet, H un point quelconque de P . Quel que soit le nombre positif ε donné : Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur (A , 1°), en tout point duquel on a

$$f < A_1(H) + \varepsilon,$$

et, par suite,

$$g < A_1(H) + \varepsilon.$$

Donc,

$$A_2 \leq A_1.$$

En second lieu, quel que soit CD contenant H à son intérieur, il est possible d'y trouver un point où ($I, 2^0$)

$$f < I_1(H) + \varepsilon,$$

et, par suite,

$$g < I_1(H) + \varepsilon.$$

Donc,

$$I_2 \leq I_1.$$

En résumé, les inégalités $f > g$ ou $f \geq g$ entraînent les suivantes :

$$A_1 \geq A_2, \quad I_1 \geq I_2.$$

Lorsque dans une inégalité ou dans une égalité nous remplaçons les deux membres par leurs maxima ou leurs minima respectifs, nous dirons que nous *délimitons* les deux membres de la relation, supérieurement dans le premier cas, inférieurement dans le second.

Ceci posé, démontrons l'égalité

$$A' = A''.$$

Pour cela, je remarque que j'ai $A \geq A'$, puisque A' est le minimum de A , et $A'' \geq A'$, puisque A'' est le maximum de A' . Délimitons la première inégalité supérieurement,

$$A \geq A'.$$

Donc,

$$A \geq A'' \geq A'.$$

Délimitons inférieurement les trois termes de cette double relation,

$$A' \geq A'' \geq A'.$$

Donc,

$$A' = A''.$$

C. Q. F. D.

On démontrerait pareillement que

$$I' = I''.$$

Ainsi, la fonction A' semi-continue inférieurement jouit de la

propriété d'être le minimum de son maximum A'' . De même, I' est une fonction semi-continue supérieurement qui est le maximum de son minimum I'' .

On peut se demander dans quel ordre de grandeur sont rangées les six fonctions A, A', A'', I, I', I'' .

On a d'abord

$$A \geq A'' \geq A'$$

et, de même,

$$I' \geq I'' \geq I.$$

De $I' \geq I$ je déduis, en délimitant inférieurement,

$$A' \geq I$$

et, en délimitant supérieurement,

$$A'' \geq I'.$$

Donc

$$A \geq A'' \geq I'.$$

On a donc l'ordre suivant, par raison de symétrie :

$$A \geq A'' \geq \frac{I'}{A'} \geq I'' \geq I.$$

A, A'', I' sont semi-continues supérieurement, A', I'', I le sont inférieurement. Il est d'ailleurs très aisé de former des exemples où A' et I' sont dans un ordre de grandeur constant et quelconque, ou indifférent.

Remarquons encore que ces inégalités ont été déduites, seulement, de ce que A est semi-continue supérieurement, I semi-continue inférieurement avec $A \geq I$, et non pas de ce que A et I sont l'un le maximum, l'autre le minimum d'une même fonction.

Donnons des définitions caractéristiques de A', A'', I', I'' . Soit H un point quelconque de P . Quel que soit le nombre positif ε donné :

I' . — A' étant le minimum de A , il est possible ($I, 1^\circ$) d'entourer H d'un intervalle CD en chaque point M duquel $A(M) > A'(H) - \frac{\varepsilon}{2}$. Autour de chaque point M de CD ($A, 2^\circ$), je

peux construire un intervalle dans lequel il y a un point où $f > A(M) - \frac{\epsilon}{2}$. En ajoutant ces inégalités, on voit que :

1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD dans lequel l'ensemble des points où $f > A'(H) - \epsilon$ est partout dense.

Dans tout intervalle CD contenant H, je peux trouver (I, 2°) un point M (pouvant coïncider avec H) où $A(M) < A'(H) + \frac{\epsilon}{2}$. Autour de M, je peux trouver (A, 1°) un intervalle en chaque point duquel $f < A(M) + \frac{\epsilon}{2}$. Donc :

2° Dans tout intervalle CD contenant H existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f < A'(H) + \epsilon$.

$A'(H)$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°. L'ensemble de ces propriétés est donc caractéristique de A' .

A'' . — A'' est le maximum de A' . Donc je peux trouver un intervalle CD contenant H en chaque point M duquel j'ai

$$A'(M) < A''(H) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Dans tout intervalle contenant M existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f < A'(M) + \frac{\epsilon}{2}$.

Donc, les intervalles en chaque point desquels j'ai $f < A''(H) + \epsilon$ forment un ensemble partout dense dans CD. Donc :

1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H et tel que l'ensemble des points où $f > A''(H) + \epsilon$ est non dense partout sur CD.

Dans tout intervalle CD contenant H, je peux trouver un point M où $A'(M) > A''(H) - \frac{\epsilon}{2}$. Autour de M, je peux trouver un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f > A'(M) - \frac{\epsilon}{2}$ est partout dense. Donc :

2° Dans tout intervalle CD contenant H, il existe un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f > A''(H) - \epsilon$ est partout dense.

Le nombre $A''(H)$ est le plus petit jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°. Donc, ces propriétés caractérisent A'' .

En essayant de définir de même A''' comme étant le minimum de A'' , on tombe sur la définition donnée pour A' . On retrouve ainsi l'égalité

$$A' = A'' = \dots$$

Des définitions précédentes on déduit par analogie celles de I' et de I'' .

I' . — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD dans lequel l'ensemble des points où $f < I'(H) + \epsilon$ est partout dense;

2° Dans tout intervalle CD contenant H , existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f > I'(H) - \epsilon$.

$I'(H)$ est le plus petit nombre jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°.

I'' . — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD , tel que l'ensemble des points où $f < I''(H) - \epsilon$ est non dense partout sur CD ;

2° Dans tout intervalle CD contenant H , il existe un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f < I''(H) + \epsilon$ est partout dense.

$I''(H)$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°.

II.

Nous allons donner une application de ces définitions dans le théorème suivant :

Les fonctions de classe 1 sont caractérisées par la double égalité $A' = I''$ et $I' = A''$, vérifiée quel que soit l'ensemble parfait pris pour base.

Nous admettrons pour cela le théorème de M. Baire, à savoir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f

soit de classe 1 est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, c'est-à-dire que $A - I$ ait son minimum nul en tout point ou, enfin, que l'ensemble des points où $A - I < \epsilon$ est partout dense (et même peut être constitué par des intervalles partout denses).

Il nous suffit de montrer que $A' = I''$ par exemple. Car, si cette égalité est vérifiée, en la délimitant supérieurement on trouve

$$A'' = I'.$$

Mais, puisque dans la propriété que je veux démontrer f n'intervient que par la différence $A - I$, il convient de rattacher les fonctions A' et I'' respectivement à A et I . Afin d'avoir les définitions les plus avantageuses nous envisagerons successivement A' comme jouant, relativement à A , les rôles 1° de I , 2° de A' ; puis I'' comme jouant, relativement à I , les rôles 1° de I'' , 2° de A' .

On trouve de la sorte que :

H étant un point quelconque du continu linéaire P, et quel que soit le nombre positif ϵ donné :

A' . — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur et en chaque point duquel on ait

$$A > A'(H) - \epsilon;$$

2° Quel que soit CD, il y a dans CD un intervalle où

$$A < A'(H) + \epsilon.$$

I'' . — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur et tel que l'ensemble des points où $I < I''(H) - \epsilon$ est non dense partout sur CD;

2° Dans tout intervalle CD contenant H il existe un intervalle en chaque point duquel $I < I''(H) + \epsilon$.

Ces définitions, comme les premières, s'appliquent à un ensemble parfait quelconque pris pour base. Nous allons démontrer que la condition $A' = I''$, vérifiée sur un ensemble parfait, caractérise une fonction ponctuellement discontinue sur cet ensemble parfait et, pour simplifier, nous prendrons pour base le continu.

Démontrons la proposition directe :

Par hypothèse, l'ensemble des points où $A - I < \epsilon$ est partout dense.

Soit H un point quelconque. J'entoure H d'un intervalle CD (A' , 1°), en chaque point duquel j'ai

$$A > A'(H) - \epsilon.$$

Dans CD je peux trouver $C_1 D_1$ (I'' , 2°) où

$$I < I''(H) + \epsilon.$$

Dans $C_1 D_1$ je puis trouver un point M où $A(M) < I(M) + \epsilon$. Donc l'inégalité $A'(H) - \epsilon < I''(H) + \epsilon$ est possible quel que soit ϵ . Or, $A' \geq I''$. Donc

$$A'(H) = I''(H),$$

quel que soit H.

Réciproquement, supposons que $A' = I''$. Je vais montrer que, dans tout intervalle PQ, il est possible de trouver un point et même un intervalle où $A < I + \epsilon$.

En effet, je prends H intérieur à l'intervalle donné PQ. Il est possible (I'' , 1°) de trouver un intervalle CD entourant H et dans lequel l'ensemble des points où $I < I''(H) - \epsilon$ est non dense. Je limite CD à sa partie comprise dans PQ.

Dans l'intervalle CD je peux trouver $C_1 D_1$ (A' , 2°) où

$$A < A'(H) + \epsilon.$$

Dans $C_1 D_1$ je peux trouver $C_2 D_2$ (I'' , 1°) où

$$I > I''(H) - \epsilon.$$

En chaque point de $C_2 D_2$, les deux inégalités sont vérifiées. Comme $A'(H) = I''(H)$, en retranchant membre à membre, on voit qu'en tout point de $C_2 D_2$ on a

$$A < I + 2\epsilon.$$

Donc, f est ponctuellement discontinue sur le continu. Donc, la condition $A' = I''$ ou $A' = I'$, vérifiée sur tout ensemble parfait, caractérise les fonctions de classe 1.

Désignons par O la différence $A - I$. O est l'oscillation de f relativement à l'ensemble parfait considéré. Soit O' le minimum de O et O'' le maximum de O' . Lorsque f est ponctuellement discontinue, O' est nul et, dans ce cas, nous venons de voir que $A' - I''$ est également nul, ainsi que $A'' - I'$. Ceci n'est qu'un cas particulier des doubles inégalités

$$O'' \geq \frac{A' - I''}{A'' - I'} \geq O',$$

qui sont vraies quelle que soit f .

Pour les démontrer, je commencerai par définir A'' et I' , puis O' et O'' par les propriétés qui les rattachent à A et à I . Soit H un point quelconque du continu linéaire P . Étant donné un nombre positif ϵ quelconque :

A'' . — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD , tel que l'ensemble des points où $A > A''(H) + \epsilon$ est non dense partout sur CD ;

2° Dans tout intervalle CD contenant H existe un intervalle en chaque point duquel $A > A''(H) - \epsilon$.

I' . — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H , en chaque point duquel $I < I'(H) + \epsilon$;

2° Quel que soit CD entourant H , il y a dans CD un intervalle où $I > I'(H) - \epsilon$.

O' . — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD , contenant H à son intérieur, en chaque point duquel $A - I > O'(H) - \epsilon$;

2° Quel que soit CD contenant H , il y a dans CD un intervalle où $A - I < O'(H) + \epsilon$.

O'' . — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD , contenant H à son intérieur, tel que l'ensemble des points où

$$A - I > O''(H) + \epsilon$$

est non dense partout sur CD ;

2° Dans tout intervalle CD contenant H à son intérieur existe un intervalle en chaque point duquel $A - I > O''(H) - \epsilon$.

Pour obtenir les inégalités que j'ai en vue, j'associe chacune

des inégalités auxquelles satisfont O' et O'' avec les inégalités concordantes relatives à A' et I'' , A'' et I' .

Tout d'abord, je constate que $(O', 2^\circ)$ et $(O'', 2^\circ)$ ne donnent lieu à aucune conclusion. Voici le schéma des raisonnements qui me donnent les inégalités cherchées. J'ai écrit dans une même colonne verticale les intervalles que j'utilise dans le raisonnement. Chacun est entièrement contenu à l'intérieur de celui qui est écrit immédiatement au-dessus. A côté du nom de l'intervalle se trouve la condition qui le détermine et, sur la même ligne, la relation qui est vérifiée en chaque point intérieur à l'intervalle considéré. De la sorte, toutes les relations sont simultanément vérifiées en chaque point de l'intervalle écrit à la ligne inférieure. Je déduis alors, du fait que les relations écrites peuvent être simultanément vérifiées, la relation cherchée :

$$\begin{array}{lll} \text{CD} & (O', 1^\circ) & A - I > O'(H) - \epsilon, \\ C_1 D_1 & (A', 2^\circ) & A < A'(H) + \epsilon, \\ C_2 D_2 & (I', 1^\circ) & I > I'(H) - \epsilon, \end{array}$$

d'où

$$A'(H) - I'(H) \geq O'(H);$$

$$\begin{array}{lll} \text{CD} & (O', 1^\circ) & A - I > O'(H) - \epsilon, \\ C_1 D_1 & (I', 2^\circ) & I > I'(H) - \epsilon, \\ C_2 D_2 & (A'', 1^\circ) & A < A''(H) + \epsilon, \end{array}$$

d'où

$$A''(H) - I'(H) \geq O'(H);$$

$$\begin{array}{lll} \text{CD} & (A', 1^\circ \text{ et } O'', 1^\circ) & A > A'(H) - \epsilon, \\ C_1 D_1 & (I'', 2^\circ) & I < I''(H) + \epsilon, \\ C_2 D_2 & (O'', 1^\circ) & A - I < O''(H) + \epsilon, \end{array}$$

d'où

$$A'(H) - I''(H) \leq O''(H);$$

$$\begin{array}{lll} \text{CD} & (I', 1^\circ \text{ et } O'', 1^\circ) & I < I'(H) + \epsilon, \\ C_1 D_1 & (A'', 2^\circ) & A > A''(H) - \epsilon, \\ C_2 D_2 & (O'', 1^\circ) & A - I < O''(H) + \epsilon, \end{array}$$

d'où

$$A''(H) - I'(H) \leq O''(H)$$

ou, en résumé,

$$O' \geq \frac{A' - I'}{A'' - I'} \geq O''.$$

Délimitons supérieurement et inférieurement ces deux relations,
Les termes extrêmes deviennent égaux. Donc,

$$A' - I'', \quad A'' - I', \quad O'$$

ont le même maximum O'' ;

$$A - I, \quad A' - I'', \quad A'' - I'$$

ont le même minimum, savoir O' .

III.

Nous allons maintenant nous occuper du cas où les six fonctions A, A', A'', I, I', I'' sont attachées à une fonction dépendant d'un indice. Nous aurons, à ce sujet, besoin d'un théorème général que je vais démontrer, relatif à la convergence d'une fonction vers une fonction limite.

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ une suite de fonctions définies sur un ensemble parfait quelconque que, pour simplifier, nous supposons être le continu linéaire AB. Supposons que f_n tende vers une limite f . Donnons-nous un nombre positif quelconque ϵ et un entier α . Désignons par $G(\alpha, \epsilon)$ l'ensemble des points H tels que, quel que soit $n \geq \alpha$, on ait toujours

$$|f_n(H) - f(H)| < \epsilon.$$

Remarquons que, si

$$\alpha' > \alpha, \quad G(\alpha', \epsilon) \supseteq G(\alpha, \epsilon);$$

si

$$\epsilon' < \epsilon, \quad G(\alpha, \epsilon') \subseteq G(\alpha, \epsilon).$$

Je rappelle qu'avec M. Baire j'entendrai par *ensemble de première catégorie*, sur un ensemble parfait donné, un ensemble qui peut être considéré comme la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles, chacun non dense sur l'ensemble parfait considéré. Un ensemble qui n'est pas de première catégorie est dit *de seconde catégorie*.

Les deux propriétés fondamentales de ces divers ensembles sont les suivantes :

Une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est un ensemble de première catégorie.

Un ensemble parfait est de seconde catégorie par rapport à lui-même.

THÉORÈME I. — *Étant donné ϵ , il est possible de prendre α suffisamment grand pour que l'ensemble $G(\alpha, \epsilon)$ soit de seconde catégorie sur AB.*

Car, s'il était de première catégorie quel que fût α , l'ensemble de tous les $G(\alpha, \epsilon)$, pour toutes les valeurs de α , serait de première catégorie. Il y aurait donc des points de AB qui n'appartiendraient à aucun ensemble $G(\alpha, \epsilon)$. En ces points, quel que fût α , il serait impossible que $|f_n - f| < \epsilon$ pour toute valeur de n supérieure à α . Ceci est contradictoire avec l'hypothèse qu'en chaque point f_n tend vers f .

THÉORÈME II. — *Étant donné ϵ , l'ensemble $Q(\epsilon)$ des points tels que, autour de l'un de ces points, $G(\alpha, \epsilon)$ est de première catégorie, quel que soit α , est non dense partout sur AB.*

Car, si l'ensemble $Q(\epsilon)$ était dense sur un segment CD intérieur à AB, l'ensemble $G(\alpha, \epsilon)$ serait de première catégorie sur CD, et cela, quel que fût α . Or, étant donné le segment CD, il existe un nombre α , tel que $G(\alpha, \epsilon)$ et tous les ensembles qui le suivent soient de deuxième catégorie sur CD. Le théorème est donc vrai.

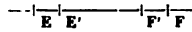
Je me suis appuyé sur la proposition suivante :

Étant donné un ensemble G et un intervalle CD, si G est de première catégorie dans un intervalle fini λ autour de chaque point d'un ensemble Q partout dense sur CD, G est de première catégorie sur CD.

Cette proposition se ramène elle-même à la suivante :

Il est possible, dans les conditions précédentes, de couvrir CD, sauf les points d'un ensemble non dense P, d'une infinité dénombrable des intervalles λ , de telle façon que tout point de CD n'appartenant pas à P soit intérieur à l'un au moins de ces intervalles.

Car : 1° les points qui n'appartiennent à aucun intervalle λ forment un ensemble non dense P (et même fermé) sur λ ; 2° considérons un intervalle EF contigu à cet ensemble fermé non dense. Soit $E'F'$ un intervalle intérieur à EF . Par hypothèse, chaque point



de $E'F'$, extrémités comprises, est intérieur à un intervalle λ . D'après un théorème connu de M. Borel, je peux couvrir $E'F'$ avec un nombre fini d'intervalles λ . Je n'ai plus qu'à prolonger la suite des intervalles de chaque côté vers E et vers F . J'atteindrai chaque point intérieur à EF avec un nombre fini d'intervalles λ . Donc, je pourrai trouver une infinité dénombrable d'intervalles λ tels que tout point intérieur à EF soit intérieur à un au moins de ces intervalles.

Il y a une infinité dénombrable d'intervalles EF . Donc, il y a une infinité dénombrable d'intervalles λ , tels que tout point de CD soit intérieur à un de ces intervalles, sauf les points de l'ensemble P non dense, tels que E et F .

Revenons à l'ensemble G . G est de première catégorie dans chaque intervalle λ . Or, les points de G qui n'appartiennent pas à P sont compris dans une infinité dénombrable d'intervalles, dans chacun desquels G est de première catégorie. Ces premiers points forment donc un ensemble de première catégorie. Restent les points de G situés sur l'ensemble non dense P . Mais un ensemble de première catégorie, augmenté d'un ensemble non dense, reste de première catégorie. Donc, G est de première catégorie sur CD . La démonstration du théorème II se trouve ainsi complètement élucidée.

Du théorème II nous déduisons :

THÉOREME III. — *L'ensemble Q des points pour chacun desquels il est possible de trouver un nombre ϵ , tel que, quel que soit α , l'ensemble $G(\alpha, \epsilon)$ est de première catégorie autour du point considéré, est lui-même de première catégorie.*

Soit $Q(\epsilon)$ l'ensemble non dense correspondant à un nombre ϵ . Donnons-nous une suite de nombres $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$, tendant vers 0. L'ensemble des points communs à $Q(\epsilon_1), Q(\epsilon_2), \dots$,

$Q(\epsilon_n), \dots$, n'est autre que l'ensemble Q de l'énoncé. Comme $Q(\epsilon_n)$ est non dense, Q est de première catégorie.

Le théorème auquel je viens d'aboutir me paraît intéressant par lui-même et c'est pourquoi j'ai cru devoir le démontrer. Mais, au point de vue de la question qui nous intéresse, les conditions imposées aux ensembles $G(\alpha, \epsilon)$ et $Q(\epsilon)$ sont plus restrictives qu'il n'est besoin. Les théorèmes démontrés le seront *a fortiori*, si je remplace les ensembles G et Q par les ensembles G' et Q' que je vais définir.

Désignons par $G'(\alpha, \epsilon)$ l'ensemble des points H , tels que l'on ait $|f\alpha(H) - f(H)| < \epsilon$. On a

$$G'(\alpha, \epsilon) \supseteq G(\alpha, \epsilon).$$

L'énoncé du théorème I est renforcé. Celui du théorème II l'est aussi si l'on remplace dans l'énoncé G par G' . Supposons que dans cet énoncé on remplace aussi les mots *de première catégorie par qui ne soit pas partout dense sur un intervalle suffisamment petit entourant H*.

L'énoncé prend la forme suivante :

L'ensemble $Q'(\epsilon)$ total des points H , tels qu'autour de H $G'(\alpha, \epsilon)$ n'est pas partout dense, quel que soit α , ϵ étant donné, est un ensemble non dense. (Rappelons qu'autour d'un point signifie dans un intervalle suffisamment petit entourant ce point.)

En effet, si $Q'(\epsilon)$ était dense sur un intervalle CD , on voit directement, que, quel que fût α , $G'(\alpha, \epsilon)$ serait partout non dense dans CD , ce qui est contradictoire avec le fait que, α étant suffisamment grand, $G'(\alpha, \epsilon)$ est de seconde catégorie dans CD .

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant analogue au théorème III.

L'ensemble Q' des points H , pour chacun desquels il est possible de trouver un nombre ϵ , tel que, quel que soit α , l'ensemble $G'(\alpha, \epsilon)$ n'est pas partout dense autour de H , est de première catégorie.

Considérons l'ensemble complémentaire de Q' . Pour chaque point K n'appartenant pas à Q' , il est possible, quel que soit ϵ , de

trouver un nombre α supérieur à tout nombre α_0 donné, tel que l'ensemble des points où $|f_\alpha - f| < \epsilon$ est partout dense autour de K .

Considérons maintenant les six fonctions $a_n, a'_n, a''_n, i'_n, i''_n, i_n$, relatives à la fonction f_n , et supposons que ces quantités aient des limites quand n croît indéfiniment. Soient a, a', a'', i', i'', i ces six limites. On a

$$a \geq a' \geq \frac{i'}{a'} \geq i'' \geq i,$$

et chacune de ces six fonctions est de classe 0, 1 ou 2. Comparons-les aux fonctions A, A', A'', I', I'', I , relatives à f .

Nous allons établir des relations d'inégalités vraies en tous les points autres que ceux d'un ensemble de première catégorie, en l'espèce Q' .

Soit H un point n'appartenant pas à Q' . Soit ϵ un nombre donné quelconque, aussi petit que l'on veut.

Je prends n_0 assez grand pour que $a'_n(H) = a'(H) + \theta\epsilon$ ($\theta^2 < 1$) pour toutes les valeurs de n supérieures à n_0 .

H n'appartenant pas à Q' , je peux prendre parmi ces valeurs de n une valeur telle que l'ensemble des points où $f_n = f + \theta''\epsilon$ ($\theta''^2 < 1$) soit dense partout sur CD , CD étant un intervalle entourant H et suffisamment petit. Or :

1° Il est possible de trouver dans tout intervalle intérieur à CD et contenant H un intervalle ($A', 2^\circ$) en chaque point duquel $f_n < a'_n + \epsilon$. Dans cet intervalle, l'ensemble des points où $f < a' + 3\epsilon$ est partout dense. Donc

$$a' \geq I';$$

2° $C_1 D_1$ étant un intervalle suffisamment petit intérieur à CD et contenant H , dans tout intervalle $C_2 D_2$ intérieur à $C_1 D_1$ il est possible ($A'', 1^\circ$) de trouver un intervalle en chaque point duquel $f_n < a''_n + \epsilon$. Donc, l'ensemble des points où $f < a'' + 3\epsilon$ est dense autour de H . Donc

$$a'' \geq I'.$$

De même

$$i' \leq A', \quad i'' \leq A'.$$

a et i donneraient lieu aux inégalités $a \geq I'$ et $i \leq A'$, moins

avantageuses, respectivement, que $a'' \geq I'$ et $i'' \leq A'$. Nous ne garderons donc que les quatre premières inégalités trouvées.

L'ensemble des points où ces inégalités ne sont pas vraies, à 3η près, est non dense (par exemple l'ensemble des points où l'on n'a pas $a' \geq I'' - 3\eta$), car l'ensemble des points autour desquels l'égalité $f_n = f + \theta'_n$ ne peut avoir lieu sur un ensemble dense est non dense.

Dans chaque intervalle contigu à l'ensemble $Q'(\eta)$ qui est fermé, les relations peuvent être délimitées supérieurement et inférieurement, et les résultats seront vrais à moins de η près. Donc, à part les points de l'ensemble de première catégorie Q' , les inégalités obtenues en délimitant les premières sont encore vraies.

Soient $a'_\alpha, a'_{\alpha'}, a'_\alpha, a'_i, a'_i, a'_i$, les six fonctions relatives à a' . Désignons d'une façon analogue les fonctions relatives à i' , à a'' et à i'' . On trouve que les relations les plus avantageuses se réduisent aux suivantes :

Pour I'' , on a $a'' \geq a'$ et, des douze nombres relatifs à a'' et à a' , le plus petit est a'_i . Nous prenons donc sans hésitation

$$a'_i \geq I''.$$

Pour I' , le plus petit nombre qui soit un maximum du côté de a' est $a'_i \geq I'$. Les nombres de même ordre de a'' sont supérieurs à ceux de a' . Mais on ne peut rien dire sur a'' lui-même. Donc, $a'' \geq I''$ doit être conservé. En résumé :

$$\begin{aligned} a'_i &\geq I'', & i'_\alpha &\leq A'', \\ \left\{ \begin{array}{l} a'_i \\ a'' \end{array} \right. &\geq I', & \left\{ \begin{array}{l} i'_\alpha \\ i'' \end{array} \right. &\leq A'. \end{aligned}$$

Si f_n est continue, $a = \dots = i = f$. Donc, $I \geq I''$ et, par suite, $I = I''$, $f \geq I'$, $A \leq A''$ et, par suite, $A = A''$, $f \leq A'$, et cela sur un ensemble complémentaire de première catégorie. Mais cette méthode ne nous donne pas entièrement le résultat

$$A = A'' = A' = I' = I'' = I = f$$

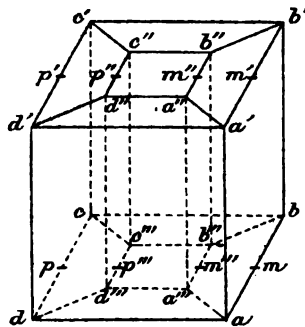
en tous les points autres que ceux d'un ensemble de première catégorie.

**SUR L'EXTENSION A L'ESPACE
DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES
DE GENRE UN;**

Par M. G. FONTENÉ.

1. Cette Note fait suite au Mémoire qui a paru dans le *Bulletin* sur le même sujet. Je remplacerai l'expression *polyèdre torique* par l'expression *polyèdre réticulé*, qui rappelle la disposition des sommets en q séries de p sommets d'une part, en p séries de q sommets d'autre part, et de même pour les faces.

Fig. 1.



Soit $p = 4$, $q = 4$ (fig. 1). Les sommets sont, avec leur double classement,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a, \quad b, \quad c, \quad d, \\ a', \quad b', \quad c', \quad d', \\ a'', \quad b'', \quad c'', \quad d'', \\ a''', \quad b''', \quad c''', \quad d''', \end{array} \right.$$

et les faces sont

$$\begin{array}{l} a b b' a', \quad b c c' b', \quad c d d' c', \quad d a a' d', \\ a' b' b'' a'', \quad b' c' c'' b'', \quad c' d' d'' c'', \quad d' a' a'' d'', \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots; \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots \end{array}$$

Appelons *sommets opposés* deux sommets tels que a et c'' , a'

et c''' , ..., et supposons que les sommets opposés coïncident deux à deux.

Si l'on considère les lignes du tableau (1), les sommets a'' , b'' , c'' , d'' se confondront respectivement avec c , d , a , b , et a''' , b''' , c''' , d''' se confondront de même avec c' , d' , a' , b' ; si l'on considère les colonnes du tableau (1), on dira que c , c' , c'' , c''' se confondent avec a'' , a''' , a , a' , et d , d' , d'' , d''' avec b'' , b''' , b , b' ; on a

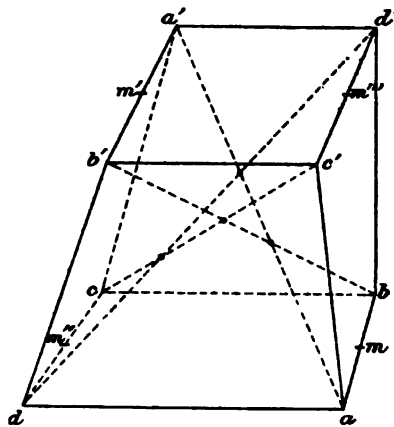
$$(2) \quad \begin{cases} a, & b, & c, & d, \\ a', & b', & c', & d', \\ c, & d, & a, & b, \\ c', & d', & a', & b', \end{cases}$$

ou

$$(2') \quad \begin{cases} a, & b, & a'', & b'', \\ a', & b', & a''', & b''', \\ a'', & b'', & a, & b, \\ a''', & b''', & a', & b'. \end{cases}$$

Le polyèdre obtenu est celui de la figure 2, avec 8 sommets té-

Fig. 2.

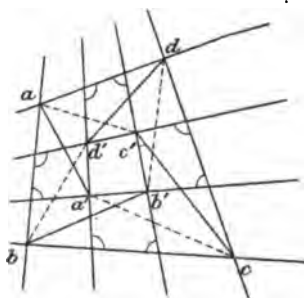


traèdres, 8 faces quadrangulaires, 16 arêtes ($F + S = A$); les faces, fournies par le tableau (2), sont les quadrilatères $abb'a'$, $bcc'b'$, ..., et les quadrilatères $a'b'dc$, $b'c'ad$, ...

On retrouve ainsi le polyèdre à 8 sommets et à 8 faces signalé

par M. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1904); on passe des notations de cet auteur aux notations actuelles en remplaçant a' , b' , ... par b' , c' M. Bricard observe que chacune des 4 droites ab , cd , $a'd'$, $b'c'$ rencontre les 4 droites $a'b'$, $c'd'$, ad , bc [lignes du tableau (2)], de sorte que l'on a là quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde et quatre génératrices de l'autre sys-

Fig. 3.



tème; sur la figure 3, on a indiqué par des arcs de cercle les plans des 8 faces du polyèdre.

[Chacune des quatre droites aa' , cc' , bd' , db' , à gauche et à droite dans la figure 3, rencontre de même les 4 droites bb' , dd' , ac' , ca' , en bas et en haut de cette figure (colonnes du tableau 2); cela revient à dire que chacune des 4 droites aa' , bb' , cc' , dd' , tracées en trait plein, rencontre la suivante, cycliquement, et que la même chose a lieu pour ac' , bd' , ca' , db' , tracées en pointillé.]

Réciproquement, si l'on trace sur un hyperboloïde 4 génératrices d'un système, 4 de l'autre, on en déduit un polyèdre de l'espèce indiquée; le polyèdre dépend donc de 17 paramètres, au lieu de 16 que l'on pourrait prévoir, et, sans parler d'hyperboloïde, cela tient à ce que 15 des 16 rencontres de 2 systèmes de 4 droites entraînent la 16^e.

Les sommets d'un tel polyèdre forment un système ponctuel de Lamé : ils sont en effet, de 4 manières, répartis 4 par 4 sur 2 plans (*fig. 2*); les faces forment un système tangentiel de Lamé.

De tout cela il résulte, comme l'observe M. Bricard, que le problème de construire un tel polyèdre circonscrit à une qua-

drique Σ et inscrit à une quadrique Σ' , au lieu d'être un problème déterminé en apparence, est un problème triplement indéterminé en apparence; et la question qui se pose est de rechercher si, contrairement à toute vraisemblance, les quadriques ne doivent pas ici encore satisfaire à une condition; cette condition remplie, le problème serait quadruplement indéterminé. On va voir qu'il en est ainsi.

2. Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales*, 1904, j'ai considéré un cas particulier pour obtenir la condition de fermeture relative aux valeurs $p = 4$, $q = 4$; j'ai trouvé que la fermeture peut avoir lieu sous deux conditions différentes; je montrerai ici que l'une des conditions se rapporte effectivement au polyèdre de la figure 1 ($p = 4$, $q = 4$), tandis que l'autre est relative au polyèdre de la figure 2 ($F = S = 8$); c'est même en cherchant à interpréter plus complètement les deux conditions en question que j'ai été conduit à retrouver le polyèdre de M. Bricard comme un cas de dégénérescence du polyèdre réticulé à 16 sommets et à 16 faces.

Soient les deux quadriques de révolution

$$\begin{aligned} (\Sigma) \quad & a(x^2 + y^2) + cz^2 + d = 0, \\ (\Sigma') \quad & a'(x^2 + y^2) + c'z^2 + 2ms + d' = 0, \end{aligned}$$

et un polyèdre tel que celui de la figure 1 ($p = 4$, $q = 4$), ou celui de la figure 2 ($F = S = 8$), circonscrit à Σ et inscrit à Σ' . Nous supposons que les contours généralement gauches $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$, $a'''b'''c'''d'''$ (ces deux derniers confondus avec $cdab$ et $c'd'a'b'$ dans le cas de la figure 2) sont des carrés, situés dans des plans parallèles au plan des xy , ayant leurs côtés parallèles, et dont les centres sont sur l'axe des z . Le plan des zx étant supposé perpendiculaire aux arêtes ab , $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$ (qui sont en même temps $c''d''$, $c'''d'''$, cd , $c'd'$ dans la figure 2), en leurs milieux m , m' , m'' , m''' , on a dans ce plan un quadrilatère $mn'm''m'''$ (trapèze isocèle pour le cas de la figure 2) circonscrit à la conique

$$(S) \quad y = 0, \quad ax^2 + cz^2 + d = 0.$$

Les points a , a' , a'' , a''' sont sur la conique obtenue en coupant la quadrique (Σ') par le plan $y = x$, et les points m , m' , ... sont sur

la conique

$$(S') \quad y = 0, \quad 2a'x^2 + c'z^2 + 2mx + d' = 0,$$

projection de la précédente sur le plan des zx .

La condition de fermeture pour des quadrilatères circonscrits à S et inscrits à S' est celle-ci : l'équation en λ relative aux deux coniques étant formée d'après l'équation

$$\lambda S + S' = 0,$$

l'une des racines doit être égale à la somme des deux autres. L'une des valeurs de λ est ici

$$\lambda = \frac{-2a'}{a},$$

et les deux autres sont données par l'équation

$$(\lambda c + c')(\lambda d + d') - m^2 = 0;$$

en désignant par λ' et λ'' les racines de cette équation, on doit avoir

$$(3) \quad -\frac{2a'}{a} = \pm (\lambda' - \lambda'')$$

ou

$$(4) \quad -\frac{2a'}{a} = \lambda' + \lambda''.$$

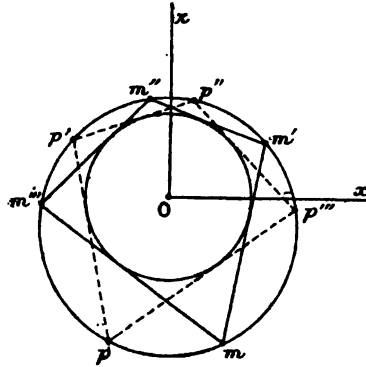
Mais, selon que l'une ou l'autre de ces conditions aura lieu, les diagonales du quadrilatère $mm'm''m'''$ passeront par tel ou tel des trois sommets du triangle autopolaire commun aux deux coniques : avec (3), ces diagonales passeront par l'un des deux points conjugués communs situés sur Ox ; avec (4), ces diagonales mm'' et $m'm'''$ seront parallèles à Ox . [Voici un exemple de ce dernier cas : la condition (4) étant en général

$$\frac{2a'}{a} = \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d},$$

si l'on suppose $a = c$, $2a' = c'$, auquel cas S et S' sont des cercles, on doit avoir $d' = 0$, c'est-à-dire que S' doit passer au centre de S . C'est une configuration bien connue, et les diagonales mm'' , $m'm'''$ sont alors parallèles à Ox .]

Dès lors, la condition (4) est relative au polyèdre de la figure 2, tandis que (3) se rapporte à celui de la figure 1. Pour ce dernier cas, on a la figure suivante :

Fig. 4.



On doit se représenter les arêtes ab , $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$ perpendiculaires au plan de la figure en m , m' , m'' , m''' , milieux de ces arêtes, a et a' en avant, a'' et a''' en arrière; les arêtes cd , $c'd'$, $c''d''$, $c'''d'''$ sont de même perpendiculaires au plan de la figure en p , p' , p'' , p''' , milieux de ces arêtes, c et c' en arrière, c'' et c''' en avant; les 16 faces du polyèdre sont :

D'une part, les faces latérales des troncs de pyramide de première espèce $abcd a'b'c'd'$ et $a''b''c''d'' a'''b'''c'''d'''$;

D'autre part, les faces latérales des troncs de pyramide de seconde espèce $abcd a'''b'''c'''d'''$ et $a''b''c''d'' a'b'c'd'$.

Si l'on forme maintenant l'équation en λ relative aux deux quadriques d'après l'équation

$$\lambda \Sigma + \Sigma' = 0,$$

deux des valeurs de λ ont pour valeur commune

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a'}{a},$$

et les deux autres λ_3 et λ_4 sont les valeurs désignées plus haut par λ' et λ'' . Les conditions de fermeture deviennent

$$(5) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

pour le polyèdre ($p = 4, q = 4$), et

$$(6) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$$

pour le polyèdre ($F = S = 8$).

3. Pour le polyèdre de la figure 1, il peut arriver que c'', d'', a'', b'' coïncident avec a', b', c', d' , et que c''', d''', a''', b''' coïncident avec a, b, c, d . On a simplement alors un hexaèdre $abcd a' b' c' d'$, et ceci ramène au théorème suivant que j'ai donné autrefois (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 72) :

Si l'on se propose d'obtenir un hexaèdre à intersections coplanaires, ou un octaèdre à diagonales concourantes, circonscrit à une quadrique Σ et inscrit à une quadrique Σ' , le problème, qui paraît être doublement indéterminé, n'est possible que si les racines du discriminant de la forme $\lambda\Sigma + \Sigma'$ vérifient la relation (5), et ce problème est alors simplement indéterminé.

Ce cas particulier montre l'intérêt qu'il y aurait à résoudre les deux questions suivantes :

Le polyèdre qui correspond aux valeurs $p = 4, q = 4$ dépend-il de 32 paramètres, ou de paramètres en nombre supérieur? En obligeant ce polyèdre à être circonscrit à une quadrique Σ , inscrit à une quadrique Σ' , lui impose-t-on 16 + 16 conditions ou un nombre moindre?

4. Si l'on remplace la quadrique Σ' par une quadrique quelconque du faisceau ponctuel (Σ, Σ') , quadrique ayant pour équation $m\Sigma + \Sigma' = 0$, les racines de la nouvelle équation en λ sont celles de l'ancienne équation en λ diminuées de m , et ces nouvelles racines vérifient encore la relation (6). Donc, si deux quadriques Σ et Σ' admettent des polyèdres tels que celui de la figure 2 qui soient circonscrits à Σ et inscrits à Σ' , la même chose a lieu quand on remplace la quadrique Σ' par une quadrique du faisceau ponctuel déterminé par Σ et Σ' . On peut de même remplacer la quadrique Σ par une quadrique du faisceau tangentiel déterminé par Σ et Σ' .

La condition (6) est celle que j'ai déjà obtenue (*Nouvelles*

Annales, 1905) pour deux quadriques Σ et Σ' telles qu'il existe des contours quadrangulaires situés sur Σ et ayant leurs sommets sur Σ' , des contours quadrangulaires situés sur Σ' et ayant les plans de leurs angles tangents à Σ .

§. Pour deux quadriques Σ et Σ' , avec des polyèdres réticulés, j'ai établi complètement, dans mon premier Mémoire, la condition

$$(p = 3, q = 3) \quad \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \dots \pm \dots = 0;$$

je viens d'indiquer les conditions

$$\begin{aligned} (p = 4, q = 4) & \quad -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ (F = S = 8) & \quad -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

L'équation en λ étant

$$\delta\lambda^4 + \theta\lambda^3 + \varphi\lambda^2 + \theta'\lambda + \delta' = 0,$$

on a encore

$$\begin{aligned} (p = 3, q = 3) & \quad (\theta^2 - 4\delta\varphi)^2 - 64\delta^2\delta' = 0, \\ (p = 4, q = 4) & \quad \theta^2(\theta^2 - 4\delta\varphi) + 8\delta^2\theta\theta' - 16\delta^2\delta' = 0, \\ (F = S = 8) & \quad \theta(\theta^2 - 4\delta\varphi) + 8\delta^2\theta' = 0; \end{aligned}$$

pour la seconde condition, on écrit que $\frac{-\theta}{2\delta}$ satisfait à l'équation en λ ; pour la troisième condition, comme on a (avec α, b, c, d au lieu de $\lambda_1, \dots$),

$$(b + c + d - a)(c + d + a - b) \dots = \Sigma a^4 - 2 \Sigma a^2 b^2 - 8abcd,$$

on a, en changeant a en $-\alpha$,

$$(b + c + d + a)(c + d - a - b) \dots = \Sigma a^4 - 2 \Sigma a^2 b^2 + 8abcd,$$

de sorte que ce second produit surpasse le premier de $16abcd$: il faut dès lors ajouter $16\delta^2\delta'$ au premier membre de la condition ($p = 4, q = 4$), et diviser par θ pour obtenir le premier membre de la condition ($F = S = 8$).

Considérons maintenant la racine carrée du polynome

$$\delta + \theta l + \varphi l^2 + \theta' l^3 + \delta' l^4,$$

soit

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \dots :$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\delta &= A^2, & \theta &= 2AB, & \varphi &= 2AC + B^2, \\ \theta' &= 2AD + 2BC, & \delta' &= 2AE + 2BD + C^2\end{aligned}$$

et, par suite,

$$0^2 - 4\delta\varphi = -8A^3C;$$

les conditions ci-dessus deviennent, en ne tenant pas compte tout d'abord de l'expression de δ' ,

$$\begin{aligned}64A^6C^2 - 64A^6\delta' &= 0, \\ -32A^5B^2C + 32A^5B(AD + BC) - 16A^6\delta' &= 0, \\ -16A^5BC + 16A^4(AD + BC) &= 0,\end{aligned}$$

ou

$$\delta' = C^2, \quad \delta' = 2BD, \quad D = 0;$$

d'après l'expression de δ' , on a enfin

$$\begin{aligned}(p = 3, q = 3) & \quad AE + BD = 0, \\ (p = 4, q = 4) & \quad 2AE + C^2 = 0, \\ (F = S = 8) & \quad D = 0.\end{aligned}$$

Ce dernier résultat se rattache à ce que l'on a vu à la fin du n° 4.

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE PROBABILITÉ;

Par M. ÉMILE BOREL.

1. On sait que les questions de probabilité où interviennent des variables continues ne peuvent acquérir de sens qu'en vertu de *conventions* précises. Comme le fait observer Joseph Bertrand, si une variable x est assujettie à rester comprise entre 0 et 1, son carré x^2 est assujetti aux mêmes conditions et la probabilité pour que x soit compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ est égale à la probabilité pour que x^2 soit compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. Cela serait absurde ⁽¹⁾ si l'on supposait à chacune de ces probabilités une valeur *intrinsèque*, c'est-à-dire définie objectivement d'une manière indépendante de toute convention.

⁽¹⁾ Voir POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, 8^e Leçon.

La convention la plus commode, au moins dans le cas où l'ensemble des valeurs possibles de la ou des variables est *borné*, consiste à regarder la probabilité comme proportionnelle à l'*étendue* : longueur, aire, volume, suivant qu'il y a une, deux, trois dimensions.

A la définition de la probabilité se rattache celle de la valeur moyenne; si, dans un intervalle x_0, x_1 , on connaît les valeurs d'une fonction réelle $f(x)$, sa valeur moyenne est, par définition,

$$\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

De même, la valeur moyenne d'une fonction de deux variables x et y définie à l'intérieur d'une aire S du plan de ces variables est, par définition,

$$\frac{\int \int_S f(x, y) dx dy}{\int \int_S dx dy}.$$

Si une fonction f est connue en tout point A d'une portion de surface Σ , sur laquelle est défini un système de coordonnées curvilignes u, v , on peut définir la valeur moyenne de f par l'expression

$$\frac{\int \int_{\Sigma} f(A) \varphi(u, v) du dv}{\int \int_{\Sigma} \varphi(u, v) du dv},$$

dans laquelle $\varphi(u, v)$ désigne une fonction positive arbitrairement choisie une fois pour toutes. On choisira généralement $\varphi(u, v)$ par la condition que l'intégrale qui figure au dénominateur représente l'aire de Σ ; mais ce choix n'est nullement nécessaire; il pourrait être parfois plus commode de prendre $\varphi(u, v) = 1$, par exemple.

Tout ce qui précède est bien connu, mais les questions de probabilité ont donné lieu à tant de controverses de mots, provenant simplement d'un défaut d'entente sur les conventions de langage, qu'il ne m'a pas paru inutile de préciser les notions dont je me servirai. Je me bornerai d'ailleurs au cas d'une dimension; il n'y

aurait aucune difficulté à étendre ce qui suit au cas général d'un nombre quelconque de dimensions.

2. Une fonction $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1; elle est égale à 1 si x est commensurable et à 0 si x est incommensurable; quelle est sa valeur moyenne?

Cette question est évidemment équivalente à la suivante :

On sait que x est compris entre 0 et 1; quelle est la probabilité pour que x soit commensurable?

La réponse évidente ⁽¹⁾ aux deux questions précédentes est *zéro*. Cette réponse peut-elle se déduire des formules que nous avons rappelées? Il ne le semble pas, si l'on se borne aux définitions classiques de l'intégrale. Considérons, en effet, une fonction $f(x)$ égale à 0 pour x incommensurable et à 1 pour x commensurable et une fonction $F(x)$ égale à 1 pour x incommensurable et à 0 pour x commensurable; les intégrales

$$\int_0^1 f(x) dx, \quad \int_0^1 F(x) dx$$

sont toutes deux dépourvues de sens; pour chacune d'elles l'intégrale inférieure, au sens de M. Darboux, est égale à *zéro* et l'intégrale supérieure égale à *un*. Donc, quelle que soit la convention que l'on adopte, si cette convention ne fait dépendre la valeur moyenne que des intégrales précédentes, calculées au sens classique, on devra attribuer la même valeur moyenne à $f(x)$ et à $F(x)$. Or, cette conclusion est absurde, car la valeur moyenne de $f(x)$ est 0 et la valeur moyenne de $F(x)$ est 1 ⁽²⁾.

Mais, si l'on utilise la nouvelle définition de l'intégrale qui est due à M. Lebesgue ⁽³⁾, on reconnaît que chacune des fonctions $f(x)$ et $F(x)$ est intégrable au sens de M. Lebesgue ou, plus brièvement,

⁽¹⁾ POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, p. 126.

⁽²⁾ Si l'on n'admettait pas ce point, on pourrait observer que la somme des valeurs moyennes de $f(x)$ et de $F(x)$ doit être égale à la valeur moyenne de $f(x) + F(x)$, c'est-à-dire à 1.

⁽³⁾ LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*.

vement, intégrable (L) et que leur intégrale (L) fournit la valeur correcte de la valeur moyenne ou de la probabilité cherchée. Les méthodes de M. Lebesgue permettent donc d'étudier des questions de probabilité qui paraissent inaccessibles par les procédés d'intégration classiques. D'ailleurs, dans les cas particuliers les plus simples, il suffira de se servir de la théorie des ensembles que j'avais appelés *mesurables* ⁽¹⁾ et auxquels M. Lebesgue a donné le nom de *mesurables* (B); l'application de cette théorie des ensembles mesurables au calcul des probabilités a été, à ma connaissance, faite pour la première fois par M. Wiman ⁽²⁾.

3. Rappelons brièvement les principes de la théorie de la mesure des ensembles linéaires de points.

Par définition, *l'ensemble composé de tous les points d'un intervalle a pour mesure la longueur de cet intervalle*; ces ensembles sont les premiers que l'on sache mesurer; on leur donne le nom de *mesurables*. On étend ensuite la catégorie des ensembles mesurables à l'aide des conventions suivantes : 1° *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux sans points communs est mesurable et a pour mesure la somme des mesures*; 2° *si un ensemble mesurable E contient tous les points d'un autre ensemble mesurable F, l'ensemble E — F formé de tous les points de E qui n'appartiennent pas à F est mesurable et a pour mesure la différence des mesures de E et de F*; 3° *Si un ensemble E est contenu dans un ensemble mesurable A de mesure α et contient un ensemble mesurable B de mesure β , nous dirons que la mesure de E est inférieure ou égale à α et supérieure ou égale à β* ; 4° *Si l'on peut démontrer que la mesure d'un ensemble E est, quel que soit ϵ , inférieure ou égale à $m + \epsilon$ et supérieure ou égale à $m - \epsilon$, l'ensemble E est mesurable et a pour mesure m* ⁽³⁾.

⁽¹⁾ BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. III.

⁽²⁾ A. WIMAN, *Ueber eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwicklungen* (Kongl. Vetenskaps Akademien Förhandlingar, 1900, p. 829) et *Bemerkungen über eine von Gylden aufgeworfene Wahrscheinlichkeitsfrage* (Lund, 1901, Håkan Ohlssons Boktryckeri).

⁽³⁾ L'introduction explicite et générale de la convention 4° est due à M. Lebesgue; j'en avais fait usage dans un cas particulier, sans l'énoncer (*Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 67).

Ces conventions permettent de construire de proche en proche des ensembles mesurables, en nombre infini, dont on se trouve connaître la mesure par leur construction même; elles ne donnent pas immédiatement une méthode simple pour le calcul de la mesure d'un ensemble donné, au cas où il est mesurable; une telle méthode résulte des recherches de M. Lebesgue. Mais, pour les applications que j'ai en vue, il m'a paru préférable de rester à mon point de vue primitif; celui de M. Lebesgue doit, dans d'autres questions, être choisi de préférence.

Rappelons que le point essentiel, dans la théorie de la mesure, consiste à démontrer que les définitions et conventions précédentes ne conduisent jamais à des contradictions. Il est inutile de reproduire ici cette démonstration.

4. Considérons une variable x assujettie à rester comprise entre 0 et 1; soient E un ensemble mesurable de points compris entre 0 et 1 et m la mesure de E . Par définition, la probabilité pour que x appartienne à E est m et la probabilité pour que x n'appartienne pas à E est $1 - m$.

Si E est l'ensemble des valeurs commensurables, on trouve immédiatement $m = 0$, ce qui donne les résultats énoncés plus haut.

Traisons un cas un peu plus compliqué.

Nous dirons qu'un nombre α compris entre 0 et 1 est commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre s'il existe deux entiers premiers entre eux p et q , tels que l'on ait

$$(1) \quad \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{q^n}, \quad q \geq 2, \quad p < q.$$

Quelle est la probabilité pour que x , assujetti à être compris entre 0 et 1, soit commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre?

A chaque fraction irréductible $\frac{p}{q}$, faisons correspondre l'intervalle

$$E_{p,q}^{(n)} : \quad \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n};$$

sa longueur est $\frac{2}{q^n}$; la longueur des intervalles analogues pour une

valeur donnée de q est

$$\frac{2\varphi(q)}{q^n},$$

en désignant par $\varphi(q)$ le nombre des nombres premiers à q et inférieurs à q .

L'ensemble $E^{(n)}$ des points distincts contenus dans les ensembles $E_{p,q}^{(n)}$ est évidemment mesurable; sa mesure e_n est inférieure à m_n en posant

$$m_n = 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^n}.$$

La série est convergente pour $n > 2$; si $n = 2$, on sait, en effet, que tout nombre α satisfait d'une infinité de manières à l'inégalité (1). En supposant n au moins égal à 3, la série m_n est convergente et a une valeur visiblement inférieure à 1, car on a

$$\varphi(q) \leq q - 1$$

et

$$2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q-1}{q^3} = \frac{\pi^2}{3} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$$

Si l'on convient, lorsqu'un nombre incommensurable α vérifie l'inégalité (1) pour plusieurs systèmes de valeurs de p et de q , de lui donner un coefficient égal à ce nombre de fois (1), nous pourrions dire que *la probabilité pour que x soit commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre est précisément m_n* ; mais, si l'on ne fait pas cette convention, la probabilité est $e_n < m_n$; il est aisé de calculer e_n avec autant d'approximation que l'on veut; il n'est peut-être pas possible de l'exprimer en termes finis au moyen de nombres algébriques ou de nombres transcendants usuels. La probabilité pour que x ne soit pas commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre est $1 - e_n$.

5. Dans une prochaine Note, j'indiquerai des applications des remarques précédentes aux problèmes les plus simples qui se posent dans les recherches de Mécanique et de Physique mathématique où intervient le calcul des probabilités.

(1) On est ainsi conduit à donner à certains α un coefficient infini; le fait que la probabilité reste finie doit être signalé.

**SUR LES SOLUTIONS
DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES; APPLICATIONS
A UN SYSTÈME HYDRAULIQUE DE n RÉSERVOIRS;**

PAR M. ED. MAILLET.

I.

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

J'ai étudié ailleurs ⁽¹⁾ les variations des débits des systèmes de réservoirs cylindriques munis d'orifices (ajutages ou vannes) ou de déversoirs (ces derniers non noyés) de communication.

Je reviens ici sur cette question en discutant des cas plus généraux, particulièrement pour n réservoirs munis exclusivement de déversoirs non noyés. Je trouve encore dans ce dernier cas une famille de solutions simples asymptotiques à toutes les solutions, même quand on regarde comme légèrement variables avec la charge, conformément à l'expérience (Poncelet, Lesbros, Bazin, etc.), certains coefficients qui entrent dans les formules du débit des déversoirs.

J'indique en même temps des systèmes d'équations différentielles non linéaires corrélatifs ou plus généraux dont on peut trouver au moins une solution particulière simple dépendant d'une constante arbitraire et qui est parfois encore asymptotique à toute une catégorie de solutions.

II.

Exposé du problème. — Je considère n réservoirs cylindriques de surfaces $S_1, \dots, S_n$; par hypothèse, S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) possède des déversoirs superficiels non noyés dont la crête est horizontale, à un même niveau y_i pour S_i , si S_i en a plusieurs. Les eaux issues de S_i alimentent un ou plusieurs des réservoirs

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, 13 mars 1905.

$S_{i+1}, \dots, S_n$ et peuvent aussi se déverser en partie à l'extérieur⁽¹⁾; S_n se déverse à l'extérieur.

Soient $Y_1, \dots, Y_n$ les niveaux respectifs des n réservoirs à l'instant t ; je suppose toujours

$$y_i > Y_{i+j} \geq y_{i+j},$$

quand S_i alimente S_{i+j} , de façon qu'aucun des déversoirs ne soit noyé.

Pendant le temps dt , le réservoir S_i reçoit de $S_1, \dots, S_{i-1}$ des quantités d'eau

$$\left[a_{i1}(Y_1 - y_i)^{\frac{3}{2}} + \dots + a_{i,i-1}(Y_{i-1} - y_{i-1})^{\frac{3}{2}} \right] dt,$$

certaines des coefficients a_{ij} pouvant être nuls; il perd par ses déversoirs propres

$$a_{ii}(Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}} dt.$$

D'après l'expérience⁽²⁾, $a_{i1}, \dots, a_{ii}$ sont peu variables quand $Y_1, \dots, Y_n$ varient dans des limites étendues, les déversoirs ayant des largeurs constantes; je les supposerai constants; au surplus, des variations convenables, légères, des largeurs des déversoirs avec l'épaisseur des lames déversantes, permettraient d'assurer, je pense, la constance des a_{ij} , ou à peu près.

Donc

$$S_i \frac{dY_i}{dt} = a_{i1}(Y_1 - y_i)^{\frac{3}{2}} + \dots + a_{i,i-1}(Y_{i-1} - y_{i-1})^{\frac{3}{2}} - a_{ii}(Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}}.$$

Je pose

$$(1) \quad u_j = (Y_j - y_j)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

u_j étant ainsi proportionnel à la vitesse moyenne sur la crête (ou au voisinage) des déversoirs corrélatifs de S_j , et j'obtiens, pour

(1) Cette dernière hypothèse pourrait être laissée de côté, car il suffit, pour qu'on puisse le faire, d'ajouter un dernier réservoir auxiliaire R assez bas, recueillant celles des eaux des autres réservoirs qui pourraient se déverser à l'extérieur.

(2) Voir COLLIGNON, *Hydraulique*, 2^e édit., 1880, p. 148, Paris, Dunod; ou encore l'*Hydraulique* de Graeff, t. II, ou celle de M. Flamant, 1^{re} édit., 1891, p. 108; aussi les *Mémoires* de M. Bazin dans les *Annales des Ponts et Chaussées*.

définir le mouvement, les équations différentielles

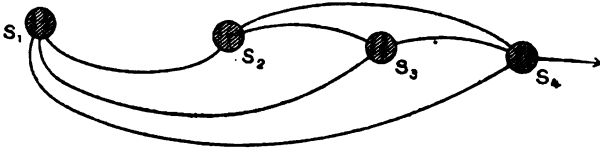
$$(2) \quad \begin{cases} 2 u_1 \frac{du_1}{dt} = -\lambda_{11} u_1^2, \\ 2 u_i \frac{du_i}{dt} = \lambda_{i1} u_1^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} u_{i-1}^2 - \lambda_{ii} u_i^2 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les λ_{ij} sont ≥ 0 et $\lambda_{ii} > 0$.

Il est bien entendu que certains des λ_{ij} , quand $i \neq j$, et même tous, peuvent être nuls pour chaque valeur de i ⁽¹⁾.

Le schéma ci-contre indique la distribution correspondante des communications hydrauliques quand $n = 4$ et que tous les λ sont $\neq 0$.

Fig. 1.



Solutions simples $u_i = \frac{\rho_i}{a+t}$. — Le système (2) est compris

⁽¹⁾ Des analogies ne sont pas impossibles dans la nature, chaque réservoir pouvant être constitué, par exemple, soit par un lac souterrain, soit par un banc de calcaire très fissuré horizontalement et verticalement, où les communications sont assez faciles pour que les variations de niveau d'eau s'y fassent sentir rapidement à chaque instant. Des nappes d'eau de cette nature existent probablement dans le *cran*, sorte de craie tuffeau blanche et fendillée, qui ne présente pas de grosses masses compactes (à Venette, près Compiègne, village situé à 600^m environ du barrage de Venette, sur l'Oise, lors de la mise en chômage de la rivière, les puits se vident en 24 heures et reviennent au niveau primitif dans le même délai quand le chômage cesse).

Soit un massif calcaire (ou autre) étendu, où toutes les fissures et toutes les poches communiquent très vite au point de vue hydraulique, et supposé limité par des plans presque verticaux sur une certaine épaisseur. Il pourra jouer le rôle d'un réservoir à peu près cylindrique : il suffira pour cela que la proportion du vide au plein dans chaque tranche horizontale soit à peu près constante, ce qui n'est pas invraisemblable, au moins pour la partie du massif qui ne serait pas constamment noyée et qui n'a pas besoin d'avoir une grande épaisseur, une dizaine de mètres au plus.

D'autre part, on peut encore songer à traiter le cas où le dernier des réservoirs ne se vide pas à l'extérieur et est rempli par les autres. Il suffira d'ajouter aux

dans le système plus général

$$(3) \quad u_i \frac{du_i}{dt} = \mu_{i1} u_1^2 + \dots + \mu_{in} u_n^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui admet la solution

$$(4) \quad u_i = \frac{\rho_i}{a + t} \quad (\rho_i, a \text{ constantes}),$$

les ρ_i étant déterminés par le système d'équations

$$-\rho_i^2 = \mu_{i1} \rho_1^2 + \dots + \mu_{in} \rho_n^2.$$

Ce dernier système a, dans des cas étendus, au moins un système de solutions réelles, car si l'on se donne les ρ_i et $n(n-1)$ des quantités μ_{ij} , les n autres se trouvent déterminées, pourvu qu'une seule de ces n autres figure dans chaque équation.

Dans le cas du système (2),

$$\begin{aligned} -2\rho_1^2 &= -\lambda_{11} \rho_1^2, \\ -2\rho_i^2 &= \lambda_{i1} \rho_1^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} \rho_{i-1}^2 - \lambda_{ii} \rho_i^2, \end{aligned}$$

ou

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda_{11} \rho_1 = 2, \\ \lambda_{ii} \rho_i^2 - 2\rho_i^2 - (\lambda_{i1} \rho_1^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} \rho_{i-1}^2) = 0. \end{cases}$$

L'équation générale (5) admet toujours une solution positive

n réservoirs considérés, dont le mouvement continue à être régi par (2) et a les mêmes propriétés, un $(n+1)^{\text{ème}}$ réservoir de niveau Y_{n+1} croissant. On pose

$$Y_{n+1} = u_{n+1}^2,$$

et l'on a l'équation différentielle supplémentaire

$$\frac{dY_{n+1}}{dt} = \lambda_{n+1,1} u_1^2 + \dots + \lambda_{n+1,n} u_n^2 = 2u_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dt}$$

à ajouter aux équations (2). Quand $u_1, \dots, u_n$ sont de la forme

$$\frac{\rho_i}{a + t} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

u_{n+1} est tel que $\frac{dY_{n+1}}{dt} = \frac{A}{(a+t)^2}$, avec $A > 0$; $Y_{n+1} = \alpha - \frac{1}{2} \frac{A}{(a+t)^2}$, où α est évidemment positif : c'est la valeur asymptotique de Y_{n+1} pour toutes les conditions initiales du système correspondant à un même volume total contenu dans les réservoirs, d'après ce qui est établi plus loin.

$\rho_i > 0$, et une seule, fonction de $\rho_1, \dots, \rho_{i-1}$; α reste arbitraire, et le système de réservoirs est toujours susceptible des mouvements définis par (4) et (5). Ces mouvements ne sont pas d'ailleurs distincts au fond, car changer la valeur de α revient à changer l'origine des temps, et, de plus, les diverses quantités $\frac{\rho_j}{\alpha + t}$, pour une même valeur de j , sont toutes asymptotiques à l'une d'elles, le rapport de deux quelconques tendant vers 1 quand t croît indéfiniment.

Stabilité de la solution $u_i = \frac{\rho_i}{\alpha + t}$. — Je vais établir que toute solution du système (2) est asymptotique à une des solutions (4) et (5), pour laquelle la valeur de α est déterminée par le régime du premier réservoir S_1 .

Cette propriété est vraie quand $n = 1$: j'admettrai qu'elle le soit pour les $i - 1$ premiers réservoirs, et je vais la démontrer pour i ; autrement dit, j'admets que, lorsque t est assez grand,

$$\frac{u_j(\alpha + t)}{\rho_j} \quad (j \leq i - 1)$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité, et je vais établir qu'il en est de même pour $u_i \frac{(\alpha + t)}{\rho_i}$.

Je pose

$$(6) \quad \begin{aligned} u_i &= u_1 z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n, z_1 = 1), \\ du_i &= u_1 dz_i + z_i du_1. \end{aligned}$$

D'après (2),

$$(7) \quad \begin{aligned} dt &= -\frac{2 du_1}{\lambda_{11} u_1^2} = \frac{2 u_i du_i}{\lambda_{11} u_1^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} u_{i-1}^2 - \lambda_{ii} u_i^2}, \\ &= -\frac{du_1}{\lambda_{11}} = \frac{z_i (u_1 dz_i + z_i du_1)}{\lambda_{11} + \lambda_{i2} z_2^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2 - \lambda_{ii} z_i^2}, \\ du_1 (\lambda_{i1} z_i^2 - \lambda_{11} - \dots - \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2 - \lambda_{ii} z_i^2) &= \lambda_{11} u_1 z_i dz_i, \\ \frac{-u_1 dt}{2} &= \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1} = \frac{z_i dz_i}{\lambda_{ii} z_i^2 - \lambda_{11} z_i^2 - (\lambda_{i1} + \dots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2)}. \end{aligned}$$

Je pose

$$(8) \quad \gamma_i(z_i) = \lambda_{ii} z_i^2 - \lambda_{11} z_i^2 - (\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2).$$

L'équation

$$\chi_i(z_i) = 0$$

possède une et une seule racine positive $\zeta_i > 0$ fonction de $z_2, \dots, z_{i-1}$ (les z_j sont ≥ 0). On sait que, quand t croît indéfiniment, $z_2, \dots, z_{i-1}$ ont pour limites $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{\rho_3}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}$; t étant suffisamment grand, $z_2, \dots, z_{i-1}$ sont aussi voisins qu'on veut de ces limites; ζ_i est aussi voisin qu'on veut de la racine positive > 0 unique de

$$\lambda_{ii} z_i^2 - \lambda_{1i} z_i^2 - \frac{1}{\rho_1^2} (\lambda_{1i} \rho_1^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} \rho_{i-1}^2) = 0,$$

ou de

$$\lambda_{ii} \rho_1^2 z_i^2 - 2 \rho_1^2 z_i^2 - (\lambda_{1i} \rho_1^2 + \dots + \lambda_{i,i-1} \rho_{i-1}^2) = 0,$$

laquelle est $\frac{\rho_i}{\rho_1}$, d'après (5).

D'après (7) et (8), quand $z_i > \zeta_i$, $\frac{dz_i}{dt}$ est négatif et z_i décroît; quand $z_i < \zeta_i$, $\frac{dz_i}{dt}$ est positif et z_i croît : z_i reste limité et > 0 , quel que soit t fini.

Je dis que, quel que soit l'intervalle de t_2 à t_3 , quand t_2 , puis $t_3 - t_2$, sont assez grands, il y a une valeur t_4 de t au moins, avec $t_3 \geq t_4 \geq t_2$, pour laquelle $|\chi_i(z_i)|$ est aussi petit qu'on veut.

En effet, je suppose que, dans cet intervalle, $|\chi_i(z_i)|$ reste $> B_1$ (B_1 positif fixe). D'après (7),

$$z_i \frac{dz_i}{dt} = - \frac{u_1}{2} \chi_i(z_i),$$

$$\left| z_i \frac{dz_i}{dt} \right| \geq B_1 \frac{u_1}{2} = \frac{B_1}{2} \frac{\rho_1}{a+t},$$

et $z_i \frac{dz_i}{dt}$ conserve un signe constant :

$$|(z_i^2)|_{t_2}^{t_3} \geq B_1 \rho_1 \log \frac{a+t_3}{a+t_2}.$$

On sait que z_i reste limité, alors que $\log \frac{a+t_3}{a+t_2}$ est aussi grand qu'on veut quand $t_3 - t_2$ est assez grand : on est conduit à une absurdité.

Je considère maintenant ce qui se passe à partir de l'instant t_1 , et je suppose que, à un moment quelconque ultérieur, z_i vienne à

différer de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ d'une quantité fixe ε arbitraire :

$$\left| z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right| = \varepsilon.$$

t étant assez grand,

$$\left| z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right| < \varepsilon;$$

si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} > 0$, $z_i > \frac{\rho_i}{\rho_1}$ et, d'après (7), z_i décroît; si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} < 0$, $z_i < \frac{\rho_i}{\rho_1}$ et, d'après (7), z_i croît. A chaque instant, z_i ne peut différer de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ de plus de ε en plus ou en moins.

t_2 et t_3 étant pris assez grands, ε peut être pris aussi petit qu'on veut; donc z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$. C. Q. F. D.

Remarque. — Si, à un instant quelconque du mouvement, on a

$$z_j = \frac{\rho_j}{\rho_1}$$

pour $j = 1, 2, \dots, i$, u_i étant forcément de la forme $\frac{\rho_1}{a+t}$, en vertu du théorème de Cauchy sur l'unicité de la solution du système (2) ou des i premières équations de ce système correspondant à des valeurs données des u_j à un instant donné, le mouvement sera entièrement défini par (4) et (5) pour les i premiers réservoirs. Pour les autres, la solution est encore régie par (6) et (7).

Systèmes de réservoirs avec régime propre permanent. — Chaque réservoir d'un pareil système reçoit simultanément de l'extérieur des volumes d'eau (provenant de pluies par exemple) $\sigma_1 S_1, \dots, \sigma_n S_n$ sensiblement proportionnels, en sorte que

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1} = h_1, \quad \dots, \quad \frac{\sigma_n}{\sigma_1} = h_n$$

sont des nombres à peu près fixes pour toutes les venues d'eau. Le système sera dit posséder un régime propre *permanent* si l'arrivée aux réservoirs de ces quantités, au moment où une des solutions asymptotiques simples est réalisée, a seulement pour effet, après une courte période troublée, que l'on néglige dans le calcul, de rétablir une solution asymptotique simple.

Pour un réservoir unique ($n = 1$), la réponse est toujours affirmative. Je prends n quelconque : les niveaux deviennent, après chaque venue d'eau, si le régime propre permanent est possible,

$$\frac{\rho_i^2}{(a+t)^2} + \sigma_1 h_i = \frac{\rho_i^2}{(a'+t)^2} \quad (h_1 = 1),$$

et l'on en conclut sans peine que la condition nécessaire et suffisante est

$$h_j = \frac{\rho_j^2}{\rho_1^2}.$$

Les équations précédentes se réduisent alors à une seule qui permet de calculer a' .

On voit que, pour $n \geq 2$, les systèmes de réservoirs en question sont des systèmes particuliers quand les h_j sont donnés. Un système de réservoirs quelconque est susceptible d'un régime propre permanent pour un système de valeurs des h_j , c'est-à-dire, si les venues d'eau sont dues aux pluies, pour une répartition convenable des pluies sur les bassins versants. Mais, dans de plus larges limites, si les h_j ne diffèrent pas trop de $\frac{\rho_j^2}{\rho_1^2}$, les choses se passeront pratiquement, au bout d'un certain temps après chaque venue d'eau, à peu près comme s'il y avait un régime propre permanent, grâce à l'existence des solutions asymptotiques simples à toutes les solutions.

III.

Cas où les λ_{ij} sont légèrement variables. — On sait, d'après de nombreuses expériences (Poncelet, Lesbros, Bazin, etc.) que, si les déversoirs sont supposés avoir une largeur constante, les coefficients a_{ij} , par suite les coefficients λ_{ij} , dans (2), seront légèrement variables ⁽¹⁾ avec les Y_i — y_i ou les u_i . On peut se demander dans quelle mesure les conclusions précédentes se trouvent altérées de ce fait.

⁽¹⁾ Assez souvent dans la proportion de $\frac{1}{16}$ à $\frac{1}{32}$ de leur valeur moyenne en plus ou en moins dans les limites des expériences.

J'admettrai que, dans les limites où varie u_i , les coefficients λ_{ii} , $\lambda_{i+1,i}$, ..., λ_{ni} , qui sont fonctions de u_i seul, restent positifs, limités supérieurement et inférieurement, et tendent, s'ils sont $\neq 0$, vers des limites fixes > 0 lorsque u_i tend vers 0.

La première équation (2) donne

$$dt = - \frac{2 du_1}{\lambda_{11} u_1^2},$$

où λ_{11} est fonction légèrement variable de u_1 ;

$$t = -2 \int \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1^2},$$

et u_1 décroît quand t croît; λ_{11} restant toujours compris entre certaines limites finies > 0 , on pourra écrire $t - t_0 = M \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(0)}} \right)$, où M est positif et compris entre les deux valeurs extrêmes de $\frac{2}{\lambda_{11}}$ pour $t \geq t_0$: il en résulte que u_1 tend vers zéro quand t croît indéfiniment.

Je dis que, si λ'_{11} est la limite de λ_{11} pour $u_1 = 0$, M tend vers $\rho_1 = \frac{2}{\lambda'_{11}}$ quand t croît indéfiniment.

En effet, t_1 étant suffisamment grand par rapport à t_0 ,

$$t - t_1 = M_1 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(1)}} \right),$$

où $u_1^{(1)}$ est aussi petit qu'on veut et $|M_1 - \rho_1| < \varepsilon$, ε étant un nombre fixe aussi petit qu'on veut;

$$t - t_0 = (t - t_1) + (t_1 - t_0) = M_1 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(1)}} \right) + M' \left(\frac{1}{u_1^{(1)}} - \frac{1}{u_1^{(0)}} \right).$$

t_1 étant fixé comme il est dit ci-dessus, M' est fixé, et il en résulte que, quand t croît indéfiniment, u_1 tend vers 0 et $\frac{M}{M_1}$ vers l'unité; quand t est assez grand, on a

$$|M - M_1| < \varepsilon, \quad |M_1 - \rho_1| < \varepsilon, \quad |M - \rho_1| < 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire que, quand t croît indéfiniment, M ne peut différer

de ρ_1 de plus de 2ε , si petit que soit ε , et a pour limite $\frac{2}{\lambda'_{11}} = \rho_1$.

Dès lors, quand t est assez grand,

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_1^{(0)}} + \frac{t - t_0}{M},$$

et, α étant fixe et arbitraire,

$$\frac{\rho_1}{u_1(\alpha + t)} = \frac{\rho_1}{(\alpha + t)u_1^{(0)}} + \frac{t - t_0}{M(\alpha + t)}\rho_1$$

a pour limite l'unité, quel que soit α , quand t croît indéfiniment.

Ceci établi, je considère le système qu'on déduit de (2) en remplaçant les λ_{ij} par leurs valeurs limites λ'_{ij} pour $u_1, \dots, u_n$ tendant vers zéro :

$$(2 \text{ bis}) \quad 2 u'_i \frac{du'_i}{dt} = \lambda'_{i1} u_1^2 + \dots + \lambda'_{i,i-1} u_{i-1}^2 - \lambda'_{ii} u_i^2,$$

et le système analogue à (5) correspondant à (2 bis)

$$(5 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \lambda'_{11} \rho_1 = 2, \\ \lambda'_{ii} \rho_i^2 - 2\rho_i^2 - (\lambda'_{i1} \rho_1^2 + \dots + \lambda'_{i,i-1} \rho_{i-1}^2) = 0. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, je sais que, quand $n = 1$, il existe toujours une solution de (2 bis) telle que

$$\frac{u_1}{u'_1} = \frac{u_1(\alpha + t)}{\rho_1}$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité pour toutes les valeurs de t supérieures à une limite assez grande. J'admettrai alors que, pour les valeurs de t analogues,

$$\frac{u_j(\alpha + t)}{\rho_j} \quad (j = 1, 2, \dots, i-1)$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité. Je vais établir qu'il en est de même pour

$$\frac{u_i(\alpha + t)}{\rho_i}.$$

La transformation (6) conduit encore aux équations (7) et (8).

Quand t croît indéfiniment, $z_2, \dots, z_{i-1}$ ont pour limites $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}$ déterminés par (5 bis), et, quand t est assez grand, la racine $\zeta_i > 0$ de $\chi_i(z_i) = 0$ est aussi voisine qu'on veut de la racine positive unique $\zeta_i'' > 0$ de

$$(9) \quad \lambda_{ii} \rho_1^2 z_i^2 - 2 \rho_1^2 z_i^2 - (\lambda'_{i1} \rho_1^2 + \dots + \lambda'_{i,i-1} \rho_{i-1}^2) = 0,$$

car $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i,i-1}$ ne dépendent que de $u_1, \dots, u_{i-1}$ et sont aussi voisins qu'on veut de $\lambda'_{i1}, \dots, \lambda'_{i,i-1}$ quand t est assez grand.

λ_{ii} étant toujours fini et $\neq 0$, ζ_i'' est limité.

On peut d'ailleurs prendre encore t_2 , puis $t_3 - t_2$ assez grands pour que $|\chi_i(z_i)|$ devienne aussi petit qu'on veut pour une valeur de t_4 comprise entre t_2 et t_3 ; à ce moment, z_i est aussi voisin qu'on veut de ζ_i'' . Or $z_i = \frac{u_i}{u_1}$, et u_1 est aussi petit qu'on veut; donc aussi u_i . Par suite λ_{ii} est aussi voisin qu'on veut de sa limite λ'_{ii} , et ζ_i'' aussi voisin qu'on veut de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$.

Ceci posé, que se passe-t-il à partir de l'instant t_4 ? Si, à un moment quelconque ultérieur, z_i vient à différer de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ d'une quantité finie positive arbitraire,

$$\left| z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right| = \epsilon.$$

t étant assez grand, et ϵ modéré, u_i est encore aussi petit qu'on veut, λ_{ii} diffère de λ'_{ii} d'autant peu qu'on veut, et $\left| \zeta_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right|$ est $< \epsilon$.

Dès lors, si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} > 0$, $z_i > \zeta_i$: d'après (7), z_i décroît; si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} < 0$, $z_i < \zeta_i$: d'après (7), z_i croît. A chaque instant, z_i ne peut différer de ζ_i de plus de ϵ en plus ou en moins.

t_2 et t_3 étant pris assez grands, ϵ peut être pris aussi petit qu'on veut; donc z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$. C. Q. F. D.

Enfin, finalement les conclusions sont les mêmes que dans le cas où les λ_{ij} sont constants.

IV.

Systèmes de $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ réservoirs avec déversoirs.

— Au lieu de S_1 , je considère p_1 réservoirs cylindriques de surfaces $S_1^{(1)}, \dots, S_1^{(p_1)}$, formant un groupe $\Sigma_1, \dots$, au lieu de S_i , p_i réservoirs cylindriques de surfaces $S_i^{(1)}, \dots, S_i^{(p_i)}$ formant un groupe $\Sigma_i, \dots$; de façon que chaque réservoir du groupe Σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) possède un ou une série de déversoirs de crête arasée au même niveau pour chaque réservoir et que ses eaux aillent, dans une proportion quelconque, alimenter les réservoirs des groupes $\Sigma_{i+1}, \dots, \Sigma_n$, ou même se déversent en partie à l'extérieur. Je supposerai que le niveau de la crête des déversoirs de chaque réservoir est supérieur à celui des eaux des réservoirs qu'il alimente, autrement dit que les déversoirs ne sont jamais noyés.

Pour la commodité du raisonnement j'ajoute un dernier réservoir R de niveau inférieur aux crêtes des déversoirs de tous les autres, recueillant toutes les eaux que les autres déversent à l'extérieur, et les laissant échapper par un déversoir unique à crête horizontale. Puis je pose

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1^{(1)}, \quad \dots, \quad S_{p_1} = S_1^{(p_1)}, \quad \dots, \\ S_{p_1 + \dots + p_i + 1} &= S_{i+1}^{(1)}, \quad \dots, \quad S_{p_1 + \dots + p_i + p_{i+1}} = S_{i+1}^{(p_{i+1})}, \\ S_{p_1 + \dots + p_n + 1} &= R. \end{aligned}$$

On remarque alors que le réservoir S_j alimente exclusivement un certain nombre des réservoirs $S_{j+1}, \dots, S_{p_1 + \dots + p_n + 1}$. On se trouve donc dans le cas traité précédemment, qui est ainsi très général.

Systèmes de réservoirs avec orifices de fond ou latéraux. —

Au lieu de supposer que la vidange se fait par des déversoirs, on peut supposer qu'elle se fait par des orifices (vannes, ajutages, etc.). Chaque réservoir étant muni d'orifices non noyés dont les centres de gravité sont au même niveau pour un même réservoir, on peut raisonner comme pour établir les équations (2), $(Y_j - y_j)^{\frac{3}{2}}$ étant remplacé par $(Y_j - y_j)^{\frac{1}{2}}$. On est conduit à un système d'équations

différentielles compris dans les systèmes

$$(10) \quad u_i \frac{du_i}{dt} = \mu_{i1}^1 u_1 + \dots + \mu_{in}^1 u_n \quad (1).$$

Systèmes de réservoirs avec un nombre quelconque d'orifices noyés ou non ou de déversoirs. — Les réservoirs sont cylindriques, les déversoirs ont leur crête horizontale et ne sont pas noyés. En prenant encore comme fonctions à déterminer u_i des quantités proportionnelles aux vitesses (moyennes) à travers chaque orifice ou chaque déversoir, on obtiendra un système de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} u_i \frac{du_i}{dt} = \lambda_{i1} u_1 + \dots + \lambda_{ip} u_p + \lambda_{i,p+1} u_{p+1}^3 + \dots + \lambda_{iq} u_q^3 \\ (i = 1, 2, \dots, p+q). \end{cases}$$

Dans les seconds membres, les termes linéaires proviennent des orifices, les termes cubiques des déversoirs.

V.

INDICATION DE PROBLÈMES ANALOGUES.

1° *Théorie de la chaleur.* — Si l'on se reporte à la figure de la page 131, on pourra supposer que $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont des corps conducteurs à températures $T_1, T_2, \dots, T_n$ communiquant, au point de vue calorifique, par des fils de dimensions négligeables, de façon que le corps S_i ne fournisse de la chaleur qu'aux corps $S_{i+1}, \dots, S_n$. On pourra supposer, ou non, négligeables les pertes par le milieu ambiant; T_n communique ou non avec un corps à température fixe T_0 . A une première approximation, les échanges

(1) Dans le cas de $n = 2$, les systèmes (3) et (10) s'intègrent par des quadratures.

Exemple. — Dans le cas de (3), on a

$$dt = \frac{u_1 du_1}{\mu_{11} u_1^3 + \mu_{12} u_2^3} = \frac{u_2 du_2}{\mu_{21} u_1^3 + \mu_{22} u_2^3};$$

on est ramené à une équation différentielle homogène, puis, par le changement de variable $u_2 = u_1 z$, à des quadratures.

Le système (10) peut admettre une solution linéaire réelle $u_i = \rho_i(\alpha + t)$ dépendant d'un paramètre arbitraire α .

de chaleur pendant le temps dt d'un corps à l'autre étant proportionnels aux différences de température, les équations différentielles seront linéaires et à coefficients constants.

2° *Théorie des gaz.* — On pourra supposer que $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont des réservoirs d'air ou de gaz comprimé ou raréfié qui communiquent dans des conditions variées (écoulement isotherme ou adiabatique). Je n'insiste pas ici, comptant revenir sur ce problème.

3° *Équations différentielles; systèmes plus généraux.* — On peut considérer les systèmes plus généraux que (3) et (10)

$$u_i^k \left(\frac{du_i}{dt} \right)^l = \mu_{i1} u_1^m + \dots + \mu_{in} u_n^m \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Je cherche une solution

$$u_i = \rho_i (\alpha + t)^s, \\ \frac{du_i}{dt} = s \rho_i (\alpha + t)^{s-1}, \\ \rho_i^{k+l} s^l (\alpha + t)^{ks+ls-l} = (\mu_{i1} \rho_1^m + \dots + \mu_{in} \rho_n^m) (\alpha + t)^{sm};$$

je prendrai

$$ks + ls - l = sm, \\ s(k + l - m) = l,$$

ce qui est toujours possible quand $k + l \neq m$. Les ρ_i sont alors déterminés par

$$\rho_i^{k+l} s^l = \mu_{i1} \rho_1^m + \dots + \mu_{in} \rho_n^m \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ce qui est toujours possible pour une infinité de systèmes de valeurs des μ_{ij} , quels que soient k, l, m ($k + l - m \neq 0$). La solution trouvée dépend d'une constante arbitraire α ; k, l, m peuvent être fractionnaires (1).

(1) Le système

$$u_1^k \varphi_i \left(\frac{u_2}{u_1}, \dots, \frac{u_n}{u_1} \right) = \left(\frac{du_i}{dt} \right)^l \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où φ_i est une fonction de $\frac{u_2}{u_1}, \dots, \frac{u_n}{u_1}$, comprend comme cas particuliers les sys-

Si $k + l = m$, on cherchera une solution $u_i = \rho_i e^{\alpha t}$:

$$\rho_i^m \alpha^l = \mu_{i1} \rho_1^m + \dots + \mu_{in} \rho_n^m,$$

ce qui conduit à une équation de degré n en α^l et donne, en général, nl valeurs de α . Quand $l = 1$, le changement de variables $u_i^m = w_i$ conduit à un système d'équations linéaires à coefficients constants.

On peut montrer que, pour certains des systèmes différentiels précédents, comprenant les systèmes (2), les solutions simples ci-dessus sont asymptotiques à une catégorie de solutions. J'envisage les systèmes de la forme (1)

$$(2 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i^k \frac{du_i}{dt} = \lambda_{i1} u_1^m + \dots + \lambda_{i,l-1} u_{l-1}^m - \lambda_{i,l} u_i^m, \\ m > 0, \quad k > 0, \quad m - k - 1 > 0, \quad \lambda_{ij} \geq 0, \quad \lambda_{il} > 0, \end{array} \right.$$

qui sont analogues à (2). D'abord, on a la solution

$$u_i = \rho_i (\alpha + t)^s,$$

$$\text{avec } s = \frac{1}{k+1-m} < 0,$$

$$\begin{aligned} \rho_i^{k+1} s &= \lambda_{i1} \rho_1^m + \dots + \lambda_{i,l-1} \rho_{l-1}^m - \lambda_{i,l} \rho_i^m, \\ \rho_i^{k+1} s &= -\lambda_{i1} \rho_1^m, \quad \rho_i^{k+1-m} = -\lambda_{i1} (k+1-m) > 0, \end{aligned}$$

ou

$$(5 \text{ ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_i^{k+1-m} = \lambda_{i1} (m - k - 1) > 0, \\ \lambda_{i1} \rho_1^m - \frac{1}{m - k - 1} \rho_i^{k+1} - (\lambda_{i1} \rho_1^m + \dots + \lambda_{i,l-1} \rho_{l-1}^m) = 0. \end{array} \right.$$

tèmes ci-dessus et donne lieu à des remarques analogues qui, *peut-être*, n'ont pas encore été indiquées; en posant

1° Pour $l \neq 0$, $s = \frac{l}{l-0}$, on obtient une solution

$$u_i = \rho_i (\alpha + t)^l,$$

α étant une constante arbitraire et les ρ_i déterminés par n équations compatibles dans des cas étendus;

2° Pour $l = 0$, on obtient des solutions

$$u_i = \rho_i e^{\alpha t},$$

α et les rapports $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_n}{\rho_1}$ étant déterminés par n équations compatibles dans des cas étendus; chaque solution renferme encore une constante arbitraire.

(1) On pourrait aussi prendre pour variables $u_i^{k+1} = w_i$.

Ce système a toujours un système de solutions > 0 et un seul.
Le changement de variables

$$(6 \text{ ter}) \quad u_i = u_1 z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n, z_1 = 1)$$

donne

$$du_i = u_1 dz_i + z_i du_1,$$

$$dt = -\frac{du_1}{\lambda_{11} u_1^{m-k}} = \frac{u_1^k du_i}{\lambda_{11} u_1^m + \dots - \lambda_{ii} u_i^m} = \frac{(u_1 dz_i + z_i du_1) u_1^k z_i^k}{(\lambda_{11} + \lambda_{12} z_2^m + \dots - \lambda_{ii} z_i^m) u_1^m},$$

$$- \frac{du_1}{\lambda_{11}} = \frac{z_i^k (u_1 dz_i + z_i du_1)}{\lambda_{11} + \lambda_{12} z_2^m + \dots - \lambda_{ii} z_i^m},$$

$$du_1 [\lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{11} + \dots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m)] = \lambda_{11} u_1 z_i^k dz_i,$$

$$(7 \text{ ter}) \quad -u_1^{m-k-1} dt = \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1} = \frac{z_i^k dz_i}{\lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{11} + \dots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m)}.$$

Je suppose les valeurs initiales des u_i positives > 0 .

D'abord, u_1 étant positif ainsi que u_1^0 , $\frac{du_1}{dt}$ décroît, et

$$\frac{1}{(m-k-1)\lambda_{11}} \left[\frac{1}{u_1^{m-k-1}} - \frac{1}{(u_1^0)^{m-k-1}} \right] = t - t_0$$

montre que u_1 tend vers 0 quand t croît indéfiniment. $\frac{dz_i}{dt}$ croît ou décroît encore suivant que z_i , positif, est inférieur ou supérieur à la racine positive unique $\zeta_i > 0$ de

$$\chi_i(z_i) = \lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{11} + \dots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m);$$

ζ_i est fonction de $z_2, \dots, z_{i-1}$.

Or

$$u_1^{m-k-1} = \frac{\rho_1^{m-k-1}}{\alpha + t},$$

$$(4 \text{ ter}) \quad u_1 = \frac{\rho_1}{(\alpha + t)^{\frac{1}{m-k-1}}}.$$

On admettra encore que

$$u_j = \frac{\rho_j}{(\alpha + t)^{\frac{1}{m-k-1}}} \quad (j = 1, 2, \dots, i-1)$$

soit une solution asymptotique des $i-1$ premières équations (2 ter);

$z_{i-1}, \dots, z_2$ sont aussi voisins qu'on veut de $\frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_2}{\rho_1}$ dès que t est assez grand; z_i reste limité.

Comme dans le cas où $m = 3, k = 1$, si $|\chi_i(z_i)| > B_1$ (B_1 fixe) quand t est compris entre t_2 et t_3 assez grands,

$$\left| z_i^k \frac{dz_i}{dt} \right| > B_1 u_1^{m-k-1} = B_1 \frac{\rho_1^{m-k-1}}{a+t},$$

d'où résulte une absurdité. On voit finalement que z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ quand t croît indéfiniment, et l'on conclut :

Pour m et $k > 0, m - k - 1 > 0, \lambda_{ij} \geq 0, \lambda_{ii} > 0$, les solutions des équations (2 ter) dont les valeurs initiales sont toutes positives > 0 sont asymptotiques à une solution de la famille de solutions

$$u_i = \frac{\rho_i}{(a+t)^{\frac{1}{m-k-1}}} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les ρ_i étant déterminés par (5 ter) et > 0 (1).

Enfin, si, pour une valeur initiale de t quelconque, les z_j sont égaux à $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_i}{\rho_1}$ quand $j = 2, \dots, i$, les $u_2, \dots, u_i$ seront, quel que soit t , de la forme (4 ter), toujours en vertu du théorème de Cauchy.

Je me dispense d'examiner le cas plus général où les λ_{ij} ($j \leq i$) varient légèrement avec u_i ($i = 1, 2, \dots, n$) : il est bien probable que les résultats trouvés quand $m = 3, k = 1$ subsistent.

(1) Il resterait à examiner et à discuter le cas où certaines des valeurs initiales des u_i sont négatives.

On voit, par tout ce qui précède, l'intérêt que peut présenter la connaissance d'une solution particulière simple d'un système d'équations différentielles; si l'on peut établir que toute une catégorie de solutions lui est asymptotique quand la variable t croît indéfiniment, dès que t est assez grand, on a une idée approchée de toutes ces solutions.

NOTE AU SUJET DE LA DÉVIATION DES GRAVES DANS LA CHUTE LIBRE;

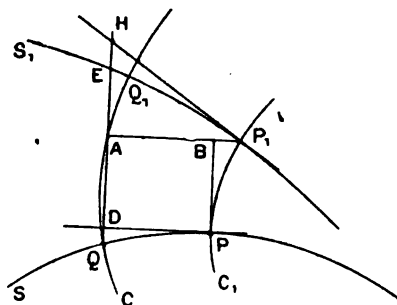
Par M. le Comte DE SPARRE.

J'ai, dans une Note précédente, donné les équations du mouvement relatif à la surface de la Terre supposée sphérique. Dans une Communication, présentée à l'Académie le 23 janvier, M. Maurice Fouché a fait remarquer que, si l'on suppose que la surface de la Terre est une surface de niveau pour la pesanteur, la déviation dans la chute des graves est la même pour la chute dans un puits que pour celle du haut d'une tour, contrairement à ce qui a lieu dans le cas de la Terre supposée sphérique. Le fait est exact, mais M. Fouché a, dans le cours de sa démonstration, commis une erreur sur le sens de la courbure des lignes de force. Je crois donc qu'il ne sera pas sans intérêt de donner une autre démonstration du même fait.

Pour établir la formule que j'ai en vue je me servirai d'une formule due à Bertrand, mais dont je crois utile de donner une démonstration directe, pour mieux faire saisir ce qui a trait au sens de la concavité.

Soit une première série de courbes $S, S_1, S_2, \dots$, et leurs trajectoires orthogonales $C, C_1, C_2, \dots$.

Fig. 1.



Considérons deux courbes infiniment voisines de chacun des deux systèmes S, S_1, C, C_1 .

Soient Q, Q_1, P, P_1 leurs points de rencontre. Soient, de plus, PD et PB les tangentes en P à S , et C, P_1, H la tangente en P_1 à S_1 ,

P_1BA et $QDAEH$ des parallèles menées par P_1 et Q à PD et PB . L'angle de contingence $d\theta$ de la courbe C_1 est égal à $\angle AP_1H$, de sorte que l'on a

$$d\theta = \frac{AH}{AP_1};$$

de plus, AH étant du second ordre et AP_1 du premier, nous pourrions, dans le calcul de AH , négliger les termes du troisième ordre et ceux du second dans le calcul de P_1A . Nous aurons d'abord, au second ordre près,

$$AP_1 = AB = PD = PQ.$$

Nous avons ensuite

$$AH = QH - QA = QE + EH - QD - DA,$$

E étant le point de rencontre de QH avec S_1 . Mais, comme QH fait un angle infiniment petit avec la tangente en Q à C et que de plus il fait aussi un angle infiniment petit avec la normale à S_1 en un point quelconque de l'arc P_1E , on a, au troisième ordre près,

$$QE = QQ_1,$$

et de plus EH diffère d'un infiniment petit du troisième ordre de la distance du point E à la tangente P_1H à S_1 en P_1 . Si donc R est le rayon de courbure de S et $R + dR$ celui de S_1 , on a, au troisième ordre près,

$$QD = \frac{\overline{PQ}^2}{2R}, \quad EH = \frac{\overline{P_1E}^2}{2(R + dR)}.$$

Mais on a, au second ordre près,

$$P_1E = P_1A = PQ,$$

et, par suite, au troisième ordre près,

$$QD = EH,$$

d'ailleurs, toujours au troisième ordre près,

$$DA = PB = PP_1,$$

de sorte que l'on a en définitive

$$d\theta = \frac{QQ_1 - PP_1}{QP},$$

et, par suite, pour le rayon de courbure ρ de la ligne C_1 ,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{QQ_1 - PP_1}{PQ \cdot PP_1},$$

la concavité étant tournée du côté où les lignes S se rapprochent.

Si l'on a maintenant une série de surfaces de niveau qui soient de révolution, la section de ces surfaces par un plan méridien déterminera des courbes de niveau, $S, S_1, \dots$, et les lignes de force $C, C_1, \dots$ comprises dans ce plan méridien seront les trajectoires orthogonales des lignes $S, S_1, \dots$.

Désignons par ε la distance des deux courbes de niveau infiniment voisines, S et S_1 , et par F la valeur de la force en un point Q de S , qui est normale à S ; comme le produit

$$F \varepsilon$$

représente le travail lorsqu'on passe de la courbe S à la courbe S_1 , ce produit sera constant, et l'on a

$$F \varepsilon = dx.$$

$\varphi(x, z)$ étant la fonction des forces dans le plan méridien considéré,

$$\varphi(x, z) = \alpha$$

est l'équation de S .

On a donc dans le cas actuel

$$QQ_1 = \frac{dx}{F}, \quad PP_1 = \frac{dx}{F + dF},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{dx}{F} - \frac{dx}{F + dF}}{PQ \frac{dx}{F + dF}} = \frac{dF}{F \cdot PQ}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{F} \frac{dF}{ds},$$

ds désignant l'arc de la courbe S et $\frac{dF}{ds}$ la dérivée de F par rapport à s lorsqu'on se déplace sur S .

Mais, si R désigne, comme plus haut, le rayon de courbure de S et $d\lambda$ son angle de contingence, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{RF} \frac{dF}{d\lambda},$$

ce qui est la formule de M. Fouché, mais la démonstration précédente fait voir, sans aucune ambiguïté, que la concavité de la ligne de force est tournée du côté où les lignes de niveau se rapprochent donc du côté où la force croît. Il résulte de là qu'à la surface de la Terre la concavité des lignes de force est dirigée vers le nord.

Si l'on suppose que la variation de la gravité est exprimée par la formule généralement admise

$$g = g_0 - 0,05 \cos^2 \lambda,$$

on aura

$$\frac{dF}{d\lambda} = 0,1 \sin \lambda \cos \lambda,$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{gR} 0,1 \sin \lambda \cos \lambda;$$

de plus, la concavité des lignes de force étant dirigée vers le nord, l'effet de l'aplatissement se retranche de celui de la rotation et l'on aura, pour le mouvement en projection sur la tangente au méridien dirigée vers le sud,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega \frac{dy}{dt} \sin \lambda - g \frac{z}{\rho},$$

ou, en prenant

$$\frac{dy}{dt} = \omega g t^2 \cos \lambda,$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda g t^2 - g \frac{0,1}{gR} \sin \lambda \cos \lambda \frac{1}{2} g t^2,$$

d'où

$$x = \frac{1}{6} \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda g t^4 \left(1 - \frac{0,1}{4R\omega^2} \right).$$

Soit, en prenant pour R le rayon moyen de la Terre sensiblement,

$$x = \frac{\omega^2}{23} \sin \lambda \cos \lambda g t^4.$$

La valeur donnée par M. Fouché est environ cinq fois plus forte.

SUR LA DÉVIATION DES GRAVES ET LES CHAMPS DE FORCE;

Par M. MAURICE FOUCHÉ.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 23 janvier dernier, j'ai montré, à propos de la déviation des graves, que la courbure des lignes de force ne dépend nullement de la variation de la force, dans le sens de sa direction, mais seulement de la variation de l'intensité de la force quand on se déplace sur une surface de niveau ⁽¹⁾. Malheureusement, j'ai laissé échapper, dans cette Note, des erreurs qui m'ont été signalées par M. de Sparre et qu'il importe de rectifier. En premier lieu, la concavité des lignes de force, ainsi que je le montrerai tout à l'heure, et contrairement à ce que j'avais dit, est dirigée du côté où la force *crott*. Dans le champ de la pesanteur, cela fait une déviation vers le nord. De plus, j'avais omis, dans la dérivée de la formule de Clairaut, un facteur 2, ce qui fait que la valeur trouvée pour la déviation due à la courbure des lignes de force est deux fois plus grande que je l'avais annoncé, et qu'elle doit être retranchée de la déviation due à la force centrifuge composée au lieu de lui être ajoutée. Comme cette dernière a une valeur absolue plus grande, il reste une déviation résiduelle qui est dirigée vers le sud et qui est la même, soit qu'on abandonne le corps d'un lieu élevé, soit qu'on le laisse tomber dans un puits.

M. de Sparre a calculé le coefficient de cette déviation dans une Note présentée à la Société mathématique, ce qui me dispense d'insister plus longtemps sur ce sujet particulier. Cependant, je crois qu'il n'est pas inutile de donner quelques indications complémentaires sur ce problème de la déviation des graves qui a occupé de nombreux géomètres, et qui, si je ne me trompe, vient seulement d'être élucidé complètement. Il n'y a rien à dire de la

(1) M. Darboux m'a dit qu'il avait donné dans son enseignement le moyen de trouver le plan osculateur et le rayon de courbure d'une quelconque des trajectoires orthogonales à une famille de surfaces, ce qui est évidemment la même question; mais j'ignore la forme définitive qu'il a donnée à la formule et les détails de la démonstration.

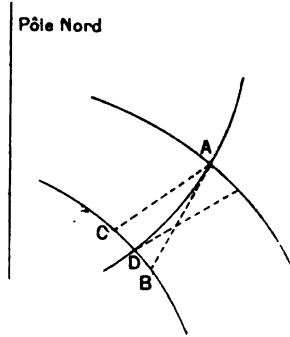
déviations vers l'est, calculées depuis longtemps. La déviation vers le sud a montré plus de difficultés, parce que les auteurs qui l'ont abordée ont cherché à déterminer la courbure des lignes de force de l'attraction, pour composer ensuite cette attraction avec la force centrifuge et avec la force centrifuge composée. De là vient qu'ils ont été conduits à faire des hypothèses sur la constitution interne de la Terre, et à distinguer le cas où le corps tombe sur le sol de celui où il pénètre à l'intérieur du globe, parce que, dans les deux cas, la loi d'attraction est différente. Il semblait pourtant, *a priori*, qu'une différence entre les résultats des deux manières d'opérer était bien invraisemblable, et je dois dire que c'est cette invraisemblance qui m'a déterminé à envisager autrement le problème. En fait, on trouve une différence si l'on fait le calcul dans l'hypothèse où la surface de la Terre n'est pas une surface de niveau; mais c'est là une supposition inadmissible si l'on opère sur un sol horizontal. Si l'on voulait étudier ce qui se passe dans le cas où l'on ferait l'expérience sur le flanc d'une montagne, il faudrait faire intervenir les attractions locales, ce qui fait que la question perdrait tout intérêt théorique, et, comme elle n'a aucun intérêt pratique à cause de l'extrême petitesse du résultat, je ne pense pas qu'il y ait lieu de s'y arrêter plus longtemps.

L'erreur que j'ai commise est regrettable à un autre point de vue. En disant que la déviation due à la courbure des lignes de force de la pesanteur est dirigée vers le sud, j'ai laissé entendre que sur toute planète, quels que soient l'aplatissement et la gravité à la surface, il y aurait toujours une déviation vers le sud. Puisque, au contraire, la courbure des lignes de force dévie les graves vers le nord, on peut concevoir que, sur une planète autrement constituée que la nôtre, cette cause de déviation l'emporterait sur la force centrifuge composée et produirait une déviation définitive dirigée vers le nord. Cependant, il n'est pas sûr que cela soit possible, parce qu'il y a des relations entre la force centrifuge, l'aplatissement et la gravité. C'est un point à examiner.

Quant au problème en lui-même, il peut être entendu de plusieurs manières différentes. La verticale d'un point est définie par un fil à plomb *infinitement court* attaché en ce point. Un fil à plomb *long* donne la verticale de son point inférieur qui n'a pas la même direction que celle du point d'attache. Soient A le point d'attache,

B le pied de la verticale de A sur la surface de niveau passant par l'extrémité C du fil à plomb long attaché en A et D le pied sur la surface de niveau inférieure de la ligne de force qui passe en A et qui est tangente à la verticale AB. En aucun des points B, C, D la verticale n'est parallèle à celle de A, et, par suite, aucun de ces points n'a la même latitude que A. De là vient qu'il y a quatre déviations différentes à considérer suivant qu'on entend la déviation par rapport au fil à plomb court, au fil à plomb long, par rapport à la ligne de force, ou enfin la déviation en latitude. C'est la déviation par rapport au fil à plomb court qui a fait l'objet des calculs de M. de Sparre et des miens. Il suffit de tracer une figure grossière, la ligne de force étant concave vers le nord, pour reconnaître les faits suivants (*fig. 1*) :

Fig. 1.



1° La verticale du point A (fil à plomb court) tombe au sud de la ligne de force ;

2° La verticale de D s'élève en passant au sud de A. Donc le fil à plomb long tombe au nord de la ligne de force ;

3° La latitude en C (pied du fil à plomb long) est plus faible qu'en A. Donc, le point de niveau inférieur qui a même latitude que A est au nord de C.

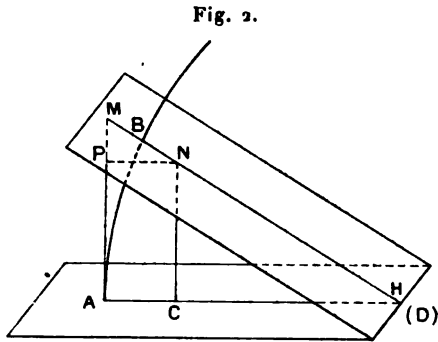
De là résulte que, de toutes les espèces de déviations, la plus petite est celle qui est rapportée au fil à plomb court ; viennent ensuite, par ordre de grandeur croissante, celle qui est rapportée à

la ligne de force, celle qui est rapportée au fil à plomb long, et enfin la déviation en latitude, la plus grande de toutes.

Remarquons enfin que, si l'on supprimait l'action de la force centrifuge composée, laquelle donne une déviation vers le sud, la trajectoire du mobile serait évidemment comprise entre la ligne de force AD et sa tangente AB (¹), d'où il suit que, quelle que soit la constitution de la planète, les trois dernières déviations sont toujours australes; seule la première pourrait peut-être se trouver boréale, comme je l'ai expliqué plus haut.

J'arrive maintenant à la détermination du plan osculateur et du rayon de courbure des lignes de force. La méthode analytique que j'ai suivie pour la seconde de ces déterminations a l'inconvénient de ne pas mettre en évidence le sens de la courbure. Voici une méthode géométrique, d'ailleurs très simple :

Soient A et B (fig. 2) deux points infiniment voisins d'une ligne



de force. Les plans normaux en A et B se coupent suivant une droite (D) qui est l'axe de la courbure de la ligne de force. Donc, le plan osculateur de cette ligne est perpendiculaire à D. Mais les deux plans normaux sont tangents aux surfaces de niveau qui passent en A et B; si, par chacun de ces points, on mène des parallèles à D, on aura deux tangentes parallèles aux surfaces de niveau, et telles, par conséquent, que, si l'on se déplace sur l'une des deux surfaces, en suivant une ligne tangente à l'une d'elles, la distance

(¹) Cette remarque m'a été faite par M. Lallemant.

du point mobile à l'autre surface ne subira qu'un accroissement du second ordre. Donc chacune de ces droites est tangente à la ligne de force constante tracée sur la surface correspondante, d'où ce théorème :

Le plan osculateur d'une ligne de force est, en chacun de ses points, normal à la ligne de force constante menée par ce point-là sur la surface de niveau correspondante.

On peut ajouter que la trace du plan osculateur en un point d'une ligne de force sur la surface de niveau qui passe en ce point est la direction du maximum de variation de la force sur la surface de niveau. Enfin, il est manifeste que la concavité de la ligne de force est tournée du côté de la droite (D), c'est-à-dire du côté où les surfaces de niveau se rapprochent, ou enfin du côté où la force croît.

Abaissons de A et B les perpendiculaires AH et BH sur (D). AH sera le rayon de courbure ρ de la ligne de force. Prenons, sur AH, un point C infiniment voisin de A, et menons, sur le plan A(D), les deux perpendiculaires AM et CN, limitées au plan B(D).

Traçons enfin NP parallèle à AH. AM et CN représentent, aux infiniment petits près du second ordre, les distances de A et de C à la surface de niveau infiniment voisine. Ce sont deux quantités inversement proportionnelles aux intensités des forces qui s'exercent en A et C et MP en est la différence. Les triangles semblables MNP, MAH donnent

$$\frac{MP}{MA} = \frac{NP}{AH},$$

$NP = AC$ est le déplacement ds sur la droite AH. $AH = \rho$. On aura donc, MP étant un accroissement négatif,

$$-d \log(MA) = \frac{ds}{\rho},$$

ou, puisque MA est inversement proportionnelle à la force F,

$$d \log F = \frac{ds}{\rho},$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{F} \frac{dF}{ds}.$$

Ainsi, la courbure de la ligne de force est la dérivée du logarithme de la force prise dans la direction de la surface de niveau où l'accroissement de la force est maximum.

Si l'on trace dans le plan tangent à la surface de niveau deux axes rectangulaires Ax et Ay , on reconnaîtra sans peine que l'expression

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2$$

est un invariant, c'est-à-dire qu'elle conserve la même valeur quand on change les axes. Il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que cette expression représente l'intensité d'une force dans un champ plan dont le potentiel serait F . Si les axes sont dirigés suivant AH et la perpendiculaire à AH , la variation de la force le long de cette perpendiculaire est nulle, et l'invariant se réduit à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2.$$

Donc l'expression de la courbure se met aussi sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{F^2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right],$$

qui est celle que j'ai donnée.

Dans la même séance où j'avais présenté ma Note sur la déviation des graves, M. Darboux avait présenté une Note de M. Carrus sur les familles de surface qui admettent des trajectoires orthogonales planes, et l'avait fait suivre de remarques complémentaires dans lesquelles il établit que le problème se ramène, en général, à l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du second ordre, et admet, de plus, une nouvelle intégrale première lorsque les plans des lignes de force sont astreints à passer par un point fixe ou à être parallèles à une droite fixe.

Interprétée dans le langage de la Mécanique, cette intégrale première exprime que les intersections des surfaces de niveau et des surfaces d'égale force sont sur des sphères concentriques dans

le premier cas, sur des plans parallèles dans le second. Il y a peut-être quelque intérêt à faire observer que ce résultat découle immédiatement du théorème relatif aux plans osculateurs des lignes de force.

Si, en effet, celles-ci sont planes, leurs plans seront normaux aux lignes d'égale force tracées sur les surfaces de niveau. Pour être plus précis, disons que chaque ligne d'égale force tracée sur une surface de niveau est une trajectoire orthogonale de tous les plans des lignes de force qui passent par ses divers points. Si donc tous ces plans passent par un point fixe O , leurs trajectoires orthogonales seront situées sur des sphères de centre O . Si les plans sont parallèles à une même droite, leurs trajectoires orthogonales seront dans des plans perpendiculaires à cette droite.

Si l'on prend trois axes rectangulaires passant par le point fixe ou un axe des x parallèle à la direction fixe, F désignant la force, et v le potentiel, on aura dans le premier cas

$$F = \varphi(x^2 + y^2 + z^2, v),$$

et dans le second

$$F = \varphi(x, v),$$

puisque la force ne varie pas quand, v restant constant, on reste sur une même sphère ayant son centre à l'origine, ou sur un plan perpendiculaire à Ox . Ces équations sont les intégrales premières dont il vient d'être question.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

JORDAN (Camille), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. 2^e édition, entièrement refondue. 3 volumes in-8, avec figures, se vendant séparément :

TOME I : Calcul différentiel; 1893..... 17 fr.

TOME II : Calcul intégral (Intégrales définies et indéfinies);
1894..... 17 fr.

TOME III : Calcul intégral (Équations différentielles); 1896.. 15 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 2).

	Pages.
Comptes rendus des séances	81
[A 4 e] WEILL (M.). — Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux	82
[J 1 a z] BIOCHE (Ch.). — Sur les permutations polyédriques	88
[H 7 c] CLAIRIN (J.). — Sur certaines transformations des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre	90
[D 1 a] DENJOY (A.). — Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles	98
[L 17 d, K 14 g] FONTENÉ (G.). — Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre $4n$	115
[J 21] BOREL (Ém.). — Remarques sur certaines questions de probabilité.	123
[H 1 a, S 3 a β] MAILLET (Ed.). — Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; applications à un système hydraulique de n réservoirs	129
[R 1 d z] DE SPARRE (C ^{te}). — Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre	146
[R 1 d z] FOUCHÉ (M.). — Sur la déviation des graves et les champs de force	150

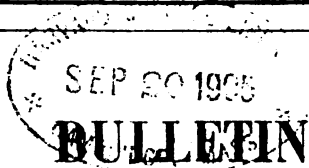
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

GODEFROY (Maurice). — La fonction gamma. *Théorie. Histoire. Bibliographie.* Grand in-8 avec figures; 1901..... 7 fr.

GODEFROY (Maurice), Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. — *Théorie élémentaire des séries. Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma.* Avec une Préface de L. SAUVAGE, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. Un volume grand in-8 de VIII-266 pages avec figures; 1903 8 fr.

Publication trimestrielle.



DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, Paris, 5^e ;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXIII. -- FASCICULE III.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1905

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*,
banquier, rue de Trévis, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jeudis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires : ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

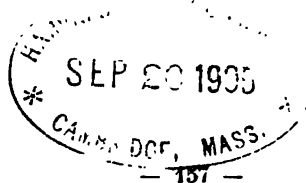
Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont **instamment priés** d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages** de texte imprimé.



COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 AVRIL 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Hedrick, présenté par MM. Darboux et Borel; M. Ouivet, présenté par MM. Raffy et Estanave.

Communications :

M. Fouché : *Sur les champs de force où les lignes de force sont planes.*

M. Hadamard : *Sur le problème de Cauchy pour les équations linéaires du second ordre dans le cas d'un nombre pair de variables.*

SÉANCE DU 13 AVRIL 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. D. André : *Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque.*

M. Bioche : *Sur les surfaces algébriques qui admettent comme ligne asymptotique une biquadratique de quatrième classe.*

SÉANCE DU 4 MAI 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Lebesgue : *Sur les développantes successives d'une courbe plane et leur limite.*

M. Borel présente quelques observations sur la définition de la convexité, à propos de la Communication précédente.

M. Bernstein : *Sur la déformation des surfaces à courbure positive et celle des surfaces à courbure négative.*

M. Borel : *Sur les principes de la théorie des ensembles.*

M. Lebesgue présente quelques observations sur le même sujet.

SÉANCE DU 18 MAI 1903.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Fatou : *Caractères de convergence des séries trigonométriques.*

M. Raffy : *Sur certaines surfaces dont la définition est invariante relativement à la transformation conforme par normales parallèles.*

M. Rémondos adresse une Note *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes.*

M. Autonne adresse un Mémoire *Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à $n - 1$ dimensions.*

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1903.

PRÉSIDENCE DE M. GRÉVY.

Communications :

M. Bernstein : *Sur le calcul des limites de Cauchy.*

M. Grévy : *Sur la détermination des fonctions arbitraires dans la solution d'une équation aux dérivées partielles.*

SÉANCE DU 15 JUIN 1903.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Pfeiffer, présenté par MM. Picard et Séliwanoff; M. Maluski, présenté par MM. Baire et Lebel.

Communications :

M. Raffy : *Sur les caractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.*

M. Bricard : *Sur les systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques, à trois paramètres.*

M. Suchar : *Sur une transformation réciproque en Mécanique.*

M. Bernstein : *Sur le prolongement analytique des fonctions.*

M. Goursat adresse un Mémoire *Sur le problème de Monge.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES SOMMES DES NOMBRES, PRIS DE QUATRE EN QUATRE, DES COMBINAISONS RÉGULIÈRES D'ORDRE QUELCONQUE;

Par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. En étudiant les nombres des permutations alternées ⁽¹⁾, M. Estanave avait été conduit, vers la fin de 1902, à considérer les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons simples de m objets. Il était arrivé, relativement à ces sommes, à plusieurs congruences remarquables, qu'il avait découvertes par l'observation, démontrées en toute rigueur, et finalement énoncées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ⁽²⁾. C'est l'examen de quatre d'entre elles qui m'a amené à m'occuper des sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons simples de m objets.

Dans une lettre insérée presque entièrement au même Recueil ⁽³⁾, j'ai donné sur ces sommes, dans le cas des combinaisons simples, un théorème dont les congruences de M. Estanave ne sont que des corollaires immédiats. Je me propose, dans le présent travail, d'exposer les résultats que j'ai obtenus en étudiant ces mêmes sommes, non plus dans le cas des combinaisons simples, mais dans le cas des combinaisons régulières d'ordre quelconque. Le plus

⁽¹⁾ J'ai fait connaître la notion et les propriétés des permutations alternées dans une Note et un Mémoire : *Développements de $\sec x$ et de $\tan x$* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, 1879, p. 965-967); *Sur les permutations alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3^e série, t. VII, 1881, p. 167-184).

⁽²⁾ Questions 212 et 213, t. X, 1903, p. 34.

⁽³⁾ T. X, 1903, p. 189-192.

important de ces résultats est un théorème très vaste, dont celui que j'ai donné pour les combinaisons simples n'est que le premier cas particulier.

2. J'ai appelé, il y a longtemps ⁽¹⁾, *combinaisons régulières d'ordre a* de m objets distincts pris n à n , celles des combinaisons de ces m objets, n à n , où chaque objet peut être répété jusqu'à a fois, mais non pas davantage. Les combinaisons simples sont évidemment les combinaisons régulières d'ordre 1; les combinaisons complètes, celles d'ordre n . J'ai désigné par $(m, n)_a$ le nombre des combinaisons régulières, d'ordre a , de m objets distincts pris à n , en convenant de regarder $(m, 0)_a$ comme égal à l'unité.

Ces nombres $(m, n)_a$ peuvent être disposés en un triangle où les lignes correspondent aux valeurs 1, 2, 3, ... de m ; et les colonnes, aux valeurs 0, 1, 2, ... de n . Chaque élément de ce triangle est égal à celui qui est juste au-dessus, plus les a éléments placés à la gauche de celui-ci. A chaque valeur de a correspond un triangle; dans le cas où a est égal à 1, ce triangle n'est autre chose que celui de Pascal; aussi ai-je proposé ⁽²⁾ d'appeler tous ces triangles *les triangles de Pascal des différents ordres*.

Considérons le triangle d'ordre a , et, dans ce triangle, la ligne de rang m . Elle nous présente $ma + 1$ termes, qui sont les nombres

$$(m, 0)_a, (m, 1)_a, (m, 2)_a, \dots, (m, ma)_a.$$

Si nous additionnons ces termes de quatre en quatre de toutes les manières possibles, nous obtenons quatre sommes que nous représentons par les symboles

$$S_m^0, S_m^1, S_m^2, S_m^3,$$

l'indice supérieur n'étant que la valeur de n dans le terme par lequel on commence l'addition.

Dans le triangle d'ordre a , chaque ligne donne ainsi quatre

⁽¹⁾ *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 2^e série, t. V, 1876, p. 155-198).*

⁽²⁾ *Liste et résumé de mes principaux travaux mathématiques*, p. 17 (1 vol. in-8° raisin, Paris, Gauthier-Villars, 1904).

sommes. Placées les unes sous les autres, ces sommes forment le rectangle

$$\begin{array}{cccc} S_1^0, & S_1^1, & S_1^2, & S_1^3, \\ S_2^0, & S_2^1, & S_2^2, & S_2^3, \\ S_3^0, & S_3^1, & S_3^2, & S_3^3, \\ S_4^0, & S_4^1, & S_4^2, & S_4^3, \\ S_5^0, & S_5^1, & S_5^2, & S_5^3, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{array}$$

dont les quatre colonnes s'étendent indéfiniment vers le bas. C'est ce rectangle que nous allons étudier, d'abord dans ses éléments, ensuite dans ses lignes, et enfin dans ses colonnes.

3. Comme je l'ai démontré par des raisonnements combinatoires très simples ⁽¹⁾, les nombres des combinaisons régulières d'ordre α de m objets, c'est-à-dire les éléments constituant la $m^{\text{ième}}$ ligne de notre triangle, ne sont autres choses que les coefficients des puissances successives de x dans le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynôme

$$1 + x + x^2 + \dots + x^a.$$

Si donc je désigne ce polynôme par $\varphi(x)$, ce sont les coefficients du développement de $\varphi^m(x)$ suivant les puissances ascendantes de x , et les sommes

$$S_m^0, S_m^1, S_m^2, S_m^3$$

sont les résultats qu'on obtient en additionnant de quatre en quatre les coefficients de ce même développement.

Or, si nous appelons r l'une quelconque des racines quatrièmes de l'unité, nous avons, comme on le voit sans peine, les quatre égalités suivantes

$$\begin{array}{ll} 4 S_m^0 = \sum r^0 \varphi^m(r), & 4 S_m^1 = \sum r^1 \varphi^m(r), \\ 4 S_m^2 = \sum r^2 \varphi^m(r), & 4 S_m^3 = \sum r^3 \varphi^m(r), \end{array}$$

⁽¹⁾ *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications*, déjà cité, p. 189.

chaque $\sum$ s'étendant aux quatre racines quatrièmes de l'unité.

Il est, d'ailleurs, évident que les seconds membres de toutes ces égalités sont des fonctions symétriques de ces quatre racines et, par conséquent, que l'on doit pouvoir facilement en calculer, sous forme explicite, les valeurs respectives.

4. Représentons par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$. Les quatre racines quatrièmes de l'unité seront

$$+1, -1, +i, -i.$$

La première opération à effectuer sera donc de calculer les valeurs des expressions

$$\varphi(+1), \varphi(-1), \varphi(+i), \varphi(-i),$$

valeurs qui dépendent de la forme du nombre α . Cette forme est forcément l'une des suivantes

$$4\alpha + 1, 4\alpha + 2, 4\alpha + 3, 4\alpha + 4,$$

la lettre α désignant un entier quelconque, égal ou supérieur à zéro.

Lorsque α est de la forme $4\alpha + 1$, les valeurs considérées sont respectivement

$$\alpha + 1, 0, 1 + i, 1 - i.$$

Lorsque α est de la forme $4\alpha + 2$, elles sont

$$\alpha + 1, +1, +i, -i.$$

Lorsque α est de la forme $4\alpha + 3$, elles sont

$$\alpha + 1, 0, 0, 0.$$

Enfin, lorsque α est de la forme $4\alpha + 4$, elles sont

$$\alpha + 1, +1, +1, +1.$$

5. Nous appuyant sur les résultats que nous venons d'obtenir, sur les formules qui nous donnent

$$4S_m^0, 4S_m^1, 4S_m^2, 4S_m^3$$

en fonction des racines quatrièmes de l'unité, et sur les quatre

identités suivantes

$$\begin{aligned}(1+i)^m + (1-i)^m &= 2(\sqrt{2})^m \cos m \frac{\pi}{4}, \\ -i(1+i)^m + i(1-i)^m &= 2(\sqrt{2})^m \sin m \frac{\pi}{4}, \\ (+i)^m + (-i)^m &= 2 \cos m \frac{\pi}{4}, \\ -i(+i)^m + i(-i)^m &= 2 \sin m \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

nous obtenons facilement, pour toutes les formes du nombre α , les valeurs de

$$4S_m^0, \quad 4S_m^1, \quad 4S_m^2, \quad 4S_m^3.$$

Si α est de la forme $4\alpha + 1$,

$$\begin{aligned}4S_m^0 &= (\alpha+1)^m + 2(\sqrt{2})^m \cos m \frac{\pi}{4}, \\ 4S_m^1 &= (\alpha+1)^m + 2(\sqrt{2})^m \sin m \frac{\pi}{4}, \\ 4S_m^2 &= (\alpha+1)^m - 2(\sqrt{2})^m \cos m \frac{\pi}{4}, \\ 4S_m^3 &= (\alpha+1)^m - 2(\sqrt{2})^m \sin m \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Si α est de la forme $4\alpha + 2$,

$$\begin{aligned}4S_m^0 &= (\alpha+1)^m + 1 + 2 \cos m \frac{\pi}{4}, \\ 4S_m^1 &= (\alpha+1)^m - 1 + 2 \sin m \frac{\pi}{4}, \\ 4S_m^2 &= (\alpha+1)^m + 1 - 2 \cos m \frac{\pi}{4}, \\ 4S_m^3 &= (\alpha+1)^m - 1 - 2 \sin m \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Si α est de la forme $4\alpha + 3$,

$$4S_m^0 = 4S_m^1 = 4S_m^2 = 4S_m^3 = (\alpha+1)^m.$$

Si α enfin est de la forme $4\alpha + 4$,

$$\begin{aligned}4S_m^0 &= (\alpha+1)^m + 3, \\ 4S_m^1 &= 4S_m^2 = 4S_m^3 = (\alpha+1)^m - 1.\end{aligned}$$

6. Afin de permettre quelques vérifications numériques de ces formules, et de donner une idée des rectangles que nous étudions, je vais transcrire ici les commencements des rectangles d'ordres 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire des rectangles les plus simples parmi ceux dont les ordres sont respectivement compris dans les formes $4\alpha + 1$, $4\alpha + 2$, $4\alpha + 3$, $4\alpha + 4$ du nombre α .

Voici le commencement du rectangle d'ordre 1 :

1	1	0	0
1	2	1	0
1	3	3	1
2	4	6	4
6	6	10	10
16	12	16	20
36	28	28	36
72	64	56	64
"	"	"	"

Voici celui du rectangle d'ordre 2 :

1	1	1	0
2	2	3	2
7	6	7	7
21	20	20	20
61	61	61	60
182	182	183	182
547	546	547	547
1641	1640	1640	1640
"	"	"	"

Voici celui du rectangle d'ordre 3 :

1	1	1	1
4	4	4	4
16	16	16	16
64	64	64	64
256	256	256	256
"	"	"	"

Voici enfin celui du rectangle d'ordre 4 :

2	1	1	1
7	6	6	6
32	31	31	31
157	156	156	156
782	781	781	781
"	"	"	"

7. Si nous examinons attentivement, soit sur nos formules, soit sur nos rectangles numériques, les quatre valeurs de

$$S_m^0, S_m^1, S_m^2, S_m^3,$$

c'est-à-dire les quatre nombres formant la $m^{\text{ième}}$ ligne de notre rectangle, nous constatons les résultats suivants :

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 1$, ces quatre valeurs sont égales deux à deux si m est impair; au contraire, si m est pair, il y en a deux d'égales et deux d'inégales;

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 2$, trois des quatre sommes sont toujours égales entre elles, la quatrième étant égale à leur valeur commune, plus 1 si m est pair, moins 1 si m est impair;

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 3$, les quatre valeurs $S_m^0, S_m^1, S_m^2, S_m^3$ sont, quel que soit m , toujours égales entre elles;

Enfin, lorsque a est de la forme $4\alpha + 4$, les trois dernières sommes sont toujours égales entre elles, la première étant toujours égale à leur valeur commune augmentée de l'unité.

Le plus remarquable de ces résultats nous paraît être celui qui se présente lorsque a est de la forme $4\alpha + 3$, puisque, dans ce cas, nos quatre sommes sont égales. Ce résultat se rapproche beaucoup d'un théorème que nous avons publié autrefois ⁽¹⁾ en l'énonçant ainsi :

Les termes, pris de $a + 1$ en $a + 1$ dans la suite des nombres des combinaisons régulières d'ordre a , ont une somme cons-

⁽¹⁾ *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications, déjà cité, p. 167.*

tante, quel que soit celui des $a + 1$ premiers termes par lequel on commence.

Quoi qu'il en soit, tous les résultats qui précèdent se démontrent en toute rigueur à l'aide de nos formules (5). Mais il est à remarquer que plusieurs d'entre eux n'appartiennent point exclusivement à nos développements; ils se retrouvent pour les sommes des termes, pris de quatre en quatre, dans toutes les suites de nombres où les termes équidistants des extrêmes sont constamment égaux entre eux.

Comme on peut le voir, en effet, d'une manière très simple, si l'on appelle t le nombre des termes d'une quelconque de ces suites :

Lorsque t est impair, deux des quatre sommes sont toujours égales entre elles, les deux autres étant, en général, différentes;

Lorsque t est pair, les quatre sommes sont égales deux à deux.

8. Partant des expressions trouvées précédemment (5), dans le rectangle d'ordre a , pour les quatre sommes

$$4S_m^0, 4S_m^1, 4S_m^2, 4S_m^3,$$

nous en déduisons sans peine les expressions de

$$4S_{m+1}^0, 4S_{m+1}^1, 4S_{m+1}^2, 4S_{m+1}^3.$$

Comparant ces nouvelles expressions chacune à chacune avec les précédentes, nous arrivons aux résultats suivants :

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 1$,

$$4(S'_{m+1} + 4S'_m) = (a+1)^m[(a+1)^4 + 4],$$

quelle que soit la valeur de m , et quel que soit aussi celui des nombres 0, 1, 2, 3 que représente l'indice supérieur j ;

Lorsque a est de l'une quelconque des trois formes $4\alpha + 2$, $4\alpha + 3$, $4\alpha + 4$,

$$4(S'_{m+1} - S'_m) = (a+1)^m[(a+1)^4 - 1],$$

égalité qui subsiste, comme la précédente, pour toutes les valeurs possibles des indices m et j .

Ces deux égalités établissent, on le voit, des relations simples entre les nombres figurant dans les lignes, prises de quatre en quatre, de notre rectangle d'ordre α . Nous allons les étudier l'une après l'autre en commençant par la plus simple, c'est-à-dire par la seconde.

9. Considérons la relation générale

$$4(S'_{m+4} - S'_m) = (\alpha + 1)^m[(\alpha + 1)^4 - 1],$$

où α est de l'une des trois formes $4\alpha + 2$, $4\alpha + 3$, $4\alpha + 4$.

D'abord, quel que soit m , son second membre est divisible par 5. Il en est évidemment ainsi, en effet, lorsque $\alpha + 1$ est divisible par 5; et, lorsqu'il ne l'est pas, comme il est alors premier avec 5, le crochet est divisible par 5, d'après le théorème de Fermat.

Supposons α de la forme $4\alpha + 2$ ou $4\alpha + 4$. Dans chacun de ces cas, $\alpha + 1$ est impair; le crochet qui figure au second membre est le produit des trois facteurs pairs

$$(\alpha + 1)^2 + 1, \quad \alpha + 2, \quad \alpha;$$

donc ce second membre, quel que soit m , est divisible par 8.

Lorsque α est de la forme $4\alpha + 3$, le binome $\alpha + 1$ peut s'écrire $4\alpha + 4$ ou $4(\alpha + 1)$, et il y a deux cas à distinguer suivant que $\alpha + 1$ est pair ou impair. Si $\alpha + 1$ est pair, $(\alpha + 1)^m$ est, pour toute valeur de m , divisible par 8; si $\alpha + 1$ est impair, $(\alpha + 1)^m$ n'est divisible par 8 que quand m dépasse l'unité.

Il suit de tout cela que, dans les divers cas considérés, le premier membre de notre seconde relation est toujours divisible par 40; et, par conséquent, que la différence

$$S'_{m+4} - S'_m$$

est toujours, dans ces mêmes cas, divisible par 10.

10. Revenons à notre première égalité

$$4(S'_{m+4} + 4S'_m) = (\alpha + 1)^m[(\alpha + 1)^4 + 4].$$

Elle suppose, nous l'avons vu, que α est de la forme $4\alpha + 1$, et, par conséquent, que $\alpha + 1$ est toujours pair.

Il s'ensuit immédiatement que son second membre est toujours, quel que soit m , divisible par 8. En effet, le premier facteur $(a+1)^m$ est toujours divisible par 2, et le second, qui n'est autre que le crochet, est toujours divisible par 4.

Ce même second membre est toujours aussi divisible par 5. Il l'est, en effet, évidemment, si $a+1$ est un multiple de 5; et, quand $a+1$ n'est pas un multiple de 5, le crochet en est un, car il peut s'écrire

$$(a+1)^4 - 1 + 5,$$

et, dans ce trinôme, l'ensemble des deux premiers termes est divisible par 5, d'après le théorème de Fermat.

Ainsi, quel que soit m , le second membre de notre égalité est divisible par 40; et par conséquent l'expression

$$S'_{m+1} + 4S'_m$$

est toujours un multiple de 10.

On en conclut immédiatement, quel que soit m , que S^j_{m+1} est toujours pair; ou bien, ce qui revient au même, que S^j_m est pair pour toutes les valeurs de m supérieures à 4. Mais, comme on peut le voir par le calcul, sur les expressions (5) de $S^0_m, S^1_m, S^2_m, S^3_m$ qui correspondent à la forme $4\alpha+1$ de a , il se trouve que S^j_4 est toujours pair. Nous pouvons donc dire que S^j_m est pair pour toutes les valeurs de m supérieures à 3.

Cela posé, remarquons que notre égalité

$$S'_{m+1} + 4S'_m = \text{mult. de } 10$$

peut s'écrire

$$S'_{m+1} - S'_m = \text{mult. de } 10 - 5S'_m.$$

Pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, la somme S^i_m est paire. Donc le nouveau second membre est divisible par 10. Donc, pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, la différence

$$S'_{m+1} - S'_m$$

est un multiple de 10.

11. Conservant toujours aux lettres a, m, j les significations que nous leur avons respectivement attribuées, nous pouvons ré-

sumer, de la manière suivante, tous les résultats que nous venons d'obtenir :

1° Si a est de l'une des formes $4\alpha + 2$ ou $4\alpha + 4$, la différence

$$S_{m+1}^j - S_m^j$$

est un multiple de 10, pour toutes les valeurs de m ;

2° Si a est de la forme $4\alpha + 3$ et que $\alpha + 1$ soit pair, la même différence est un multiple de 10, pour toutes les valeurs de m ;

3° Si a est encore de la forme $4\alpha + 3$, mais que $\alpha + 1$ soit impair, cette même différence est un multiple de 10, pour toutes les valeurs de m supérieures à l'unité;

4° Enfin, si a est de la forme $4\alpha + 1$, cette même différence est un multiple de 10, pour toutes les valeurs de m supérieures à 3.

Négligeant les valeurs 1, 2, 3 du nombre m , nous pouvons donc énoncer ce théorème unique :

THÉORÈME. — Pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, et quel que soit l'ordre a , la somme S_{m+1}^j est congrue à la somme S_m^j , selon le module 10.

Comme ce module 10 est précisément la base de notre numération, ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Les valeurs numériques de S_{m+1}^j et de S_m^j finissent toujours par le même chiffre.

Et c'est ce qui explique que les congruences particulières de M. Estanave aient été découvertes par la simple observation.

12. Le théorème que nous venons d'énoncer est tout à fait général : il ne dépend ni de a , ni de j , et il suppose simplement que m soit supérieur à 3. Il comprend celui que nous avons donné autrefois pour les combinaisons simples. Il établit, pour les lignes de notre rectangle, prises de quatre en quatre, une sorte de périodicité, analogue à celle que nous présentent les suites illimitées de nombres entiers, soit en progression arithmétique, soit en progression géométrique.

Ce théorème général, d'ailleurs, pourrait lui-même être généralisé. Au lieu de considérer les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque, on pourrait considérer les sommes de ces mêmes nombres, pris de p en p . Au lieu de prendre, dans le rectangle formé de ces sommes, les lignes de quatre en quatre, on les pourrait prendre de q en q , sans supposer que q fût égal à p . En opérant alors comme nous venons de le faire, et par des moyens pour ainsi dire identiques, on obtiendrait des résultats analogues à ceux qui précèdent; on arriverait à des congruences nouvelles : par exemple, si p était égal à 3, et q à 6, à des congruences de module 7. Seulement, ces congruences nouvelles, qu'on trouverait par le calcul, n'auraient pas, en général, pour module la base 10 de notre numération. L'observation, non aidée du calcul, serait impuissante à les déceler.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$;

PAR M. DE MONTCHEUIL.

Soient S une surface quelconque, ρ le segment qui relie ses centres de courbure, x, y, z les coordonnées de sa surface moyenne; on a tout le long des lignes de cette dernière surface correspondant aux lignes ombilicales de S

$$d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En effet, ξ, u, u_1 désignant les coordonnées d'O. Bonnet relatives à S; R, R' ses rayons de courbure; ds l'élément linéaire de la surface moyenne, on vérifie la relation

$$ds^2 = \left[d \left(\frac{R + R'}{2} \right) \right]^2 + \left(\frac{R - R'}{1 + uu_1} \right)^2 du du_1 \quad (1).$$

D'où, pour $R = R'$,

$$\left[d \left(\frac{R + R'}{2} \right) \right]^2 = d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

(1) La développée moyenne et les surfaces applicables (Bulletin de la Société mathématique, t. XXXI, 1903).

Il suffira donc de se donner une surface S quelconque et de déterminer ses lignes ombilicales pour obtenir des expressions sans signe de quadrature des coordonnées et de l'arc d'une courbe quelconque de l'espace.

On obtiendra les courbes réelles en choisissant pour S une surface réelle à lignes ombilicales réelles.

Si nous définissons S par l'équation

$$\zeta = uF_1 + u_1F + \Phi + \Phi_1;$$

F, Φ désignant deux fonctions quelconques de u ; F_1, Φ_1 deux fonctions de u_1 ; F', Φ', F'_1, Φ'_1 leurs dérivées, on obtient le système de formules

$$\begin{aligned} x &= uF' - F - \Phi', \\ y &= i(F - uF' - \Phi'), \\ z &= \Phi - u\Phi' - F', \\ s &= \Phi - u\Phi' + F'. \end{aligned}$$

On trouve pour les courbes réelles

$$\begin{aligned} x &= \alpha\theta - A', \\ y &= \beta\theta - B', \\ z &= \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}\right)\theta - \alpha A' - \beta B' + A + B, \\ s &= \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)\theta - \alpha A' - \beta B' + A + B, \end{aligned}$$

A, B désignant ici des fonctions respectives de α, β . Ces variables s'expriment en fonction de θ au moyen des relations

$$A' = B' = \theta.$$

Il faudra prendre pour A, B deux fonctions réelles permettant d'exprimer α, β par des fonctions réelles de θ .

Des relations précédentes on déduit le système

$$\frac{dx}{2\alpha} = \frac{dy}{2\beta} = \frac{dz}{\alpha^2 + \beta^2 - 1} = \frac{ds}{\alpha^2 + \beta^2 + 1},$$

qui permet de déterminer aisément les courbes de l'espace analogues aux *courbes de direction* étudiées par Laguerre.

**SUR LES DROITES FONDAMENTALES DANS LES COLLINÉATIONS
DE L'ESPACE À $n-1$ DIMENSIONS;**

Par M. LÉON AUTONNE.

Si l'on considère $2n$ variables x_i et u_i , $\{i = 1, 2, \dots, n\}$ comme les coordonnées homogènes d'un point x , ou d'un plan u , dans un espace à $n-1$ dimensions, la substitution linéaire n -aire, $\{j = 1, 2, \dots, n\}$

$$p = \left| x_i \quad \sum_j p_{ij} x_j \right| = |x_i \quad p[x_i]|,$$

de déterminant $|p| \neq 0$, est une collinéation. Le point $p[x]$, ayant les $p[x_i]$ pour coordonnées, est le *point-image par la collinéation p* du point x .

On a, comme on sait, un point *fondamental* x , si x et $p[x]$ coïncident. Une définition analogue donne les plans fondamentaux.

Mettant à profit quelques indications données, d'après Weierstrass, par M. Frobenius, dans son Mémoire *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (J. f. r. u. a. M., t. LXXXIV), j'ai pu ⁽¹⁾ mettre p sous une expression *typique* simple, grâce à laquelle les points ou plans fondamentaux s'obtiennent par une règle générale facile.

Toutes ces théories peuvent recevoir de l'extension.

Appliquant au cas de $n-1$ dimensions la terminologie de l'espace ordinaire, $n=4$, on dira qu'une *droite* d_m , de *degré* m et de *classe* $n-m$, est l'intersection de $n-m$ plans. d_m est aussi le lieu des points x , qui dépendent linéairement de m points donnés b_g , $\{g = 1, 2, \dots, m\}$, $m < n$,

$$x_i = \sum_g t_g b_{gi} \quad t_g = \text{param. variable.}$$

Un point est une d_1 . Un plan est une d_{n-1} .

⁽¹⁾ Sur le connexe linéaire dans l'espace à $n-1$ dimensions (Comptes rendus, 9 mai 1904). — Sur les formes mixtes (Annales de l'Université de Lyon, 1903, 1^{re} Partie).

Une droite d_m sera *fondamentale* pour la collinéation p , si d_m est invariante par p , autrement dit : d_m est le lieu, à la fois, du point x et du point $p[x]$.

Le travail ci-après résout complètement le problème relatif à la construction des droites fondamentales. On fait encore usage de la forme typique de p .

La règle est analogue à celle qui a été donnée déjà pour les points et plans fondamentaux, mais, bien entendu, un peu plus compliquée.

1. Dans un espace à $n - 1$ dimensions prenons

$$(j = 1, 2, \dots, n),$$

un point x par ses n coordon- nées homogènes x_j , coordon- nées <i>ponctuelles</i> ;	un plan u par ses n coordon- nées homogènes u_j , coordon- nées <i>planaires</i> .
---	--

m points b_g ($m \leq n$) sont dits *linéairement distincts* ou *indépendants*, si l'on ne peut satisfaire aux relations

$$(o) \quad \sum_g t_g b_{gj} = 0 \quad \begin{cases} g = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

qu'en égalant tous les t_g à zéro, les b_{gj} étant les coordonnées du point b_g . Il faut et il suffit évidemment pour cela que le tableau à m lignes et à n colonnes

$$b = [b_{gj}] = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{g1} & \dots & b_{gj} & \dots & b_{gn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & \dots & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

ait son rang maximum m .

Si au contraire on peut satisfaire aux relations (o) sans annuler tous les t_g , il y aura, entre les m points b_g , une *dépendance linéaire*.

2. Considérons m points b_g linéairement distincts et m para-

mètres variables t_g . Le lieu du point x tel que

$$x_j = \sum_g t_g b_{gj}$$

sera, *par définition*, une droite d_m , de degré m .

On peut dire aussi que le point x est sur l'intersection de $n - m$ plans et que la droite d_m a pour degré m et pour classe le nombre $n - m$.

Un point est une droite d_1 de degré 1 et de classe $n - 1$. Un plan est une droite d_{n-1} de degré $n - 1$ et de classe 1.

3. Désignons, ce qui ne peut faire ambiguïté, par une même lettre p :

I. Une matrice n -aire

$$p = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad \{i, j = 1, 2, \dots, n\};$$

II. Une forme bilinéaire

$$p(x; u) = \sum_{ij} p_{ij} u_i x_j.$$

III. Une collinéation ou substitution linéaire

$$p = \left| \begin{array}{c} x_i \\ \sum_j p_{ij} x_j \end{array} \right| = |x_i \quad p[x_i]|;$$

J'écrirai plus simplement

$$p = |x \quad p[x]|$$

et je dirai que le point $p[x]$ ayant pour coordonnées les

$$p[x_i] = \sum_j p_{ij} x_j,$$

est le *transformé* ou l'*image* par p du point x .

L'équation symbolique

$$p[x] = 0$$

sera, par définition, équivalente aux n équations

$$p[x_i] = \sum_j p_{ij} x_j = 0.$$

4. Prenons une substitution p de déterminant $|p| \neq 0$. On sait qu'un point x , ou un plan u , est *fondamental* si son image par p se confond avec lui-même.

$$p[x] = \rho x \quad \text{ou} \quad p[u] = \rho u.$$

Le point *fondamental* x est invariant par rapport à p . En vertu de la relation

$$\rho x - p[x] = 0,$$

on voit qu'il y a dépendance linéaire (1) entre les *deux* points x et $p[x]$.

Je me propose de généraliser cette notion de point *fondamental*.

5. Une droite d_m de degré m sera *fondamentale* pour la substitution linéaire n -aire p , si d_m est invariante vis-à-vis de p . Autrement dit p ne fait que permuer entre eux les différents points de d_m .

La construction des fondamentales d_m est le principal objet du présent travail.

6. Considérons une d_m . Elle est définie par m quelconques de ses points, pourvu qu'ils soient linéairement indépendants. Réciproquement une d_m ne peut contenir plus de m points linéairement indépendants ou distincts.

Prenons maintenant la suite indéfinie de points

$$(\Xi) \quad p^\sigma[x], \quad \sigma = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Je montrerai plus loin (9) qu'ils sont tous situés sur une droite $\bar{x}$, de degré *fini* h .

Il y aura entre différents points de la suite des dépendances linéaires, de façon que la suite contient seulement h points linéairement distincts.

Une droite $\bar{x}$ est évidemment *fondamentale*.

7. Soit maintenant une fondamentale d_m quelconque. Si d_m contient le point x , elle contient évidemment toute la droite $\bar{x}$, qui compte pour h points linéairement distincts. d_m est évidemment une collection de droites $\bar{x}$ et l'on a

$$m = \sum h.$$

Notre problème revient donc à la construction des droites $\bar{x}$, de degré h .

8. Prenons un polynome

$$f(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots, \quad c_0, c_1, \dots = \text{const.}$$

Frobenius (p. 9 du Mémoire cité) appelle l'expression

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots,$$

fonction entière de la matrice n -aire p et désigne cette expression par $f(p)$.

Puisque dans la suite des points

$$(\Xi) \quad p^\sigma[x]$$

il n'y a que h points linéairement distincts (6), c'est qu'entre différents points de la suite Ξ existent des relations telles que celle-ci

$$(1) \quad C_0 p^\alpha[x] + C_1 p^{\alpha+\alpha_1}[x] + \dots = 0,$$

où les C sont des constantes, tandis que les α sont des entiers positifs, puisque l'on peut toujours multiplier le premier membre de (1) par une puissance de p .

Désignons maintenant par $f(r)$ le polynome

$$f(r) = C_0 r^\alpha + C_1 r^{\alpha+\alpha_1} + \dots,$$

car nous verrons plus loin que la relation (1) ne contient qu'un nombre fini de termes (9), et posons

$$P = f(p).$$

La condition (1) s'écrit

$$(2) \quad P[x] = 0$$

et entraîne diverses sujétions entre :

les coordonnées du point x ;
les coefficients de polynôme $f(r)$;
la substitution n -aire p .

Je me propose d'étudier ces sujétions.

9. On sait (Frobenius, p. 26) que toute n -aire p satisfait à une *équation de degré minimum*

$$\psi(p) = 0,$$

où le polynôme $\psi(r)$, de degré $n_0 \leq n$, a l'expression construite plus loin (21). Posons

$$Q = \psi(p);$$

la n -aire Q sera identiquement zéro et, pour *tout* point x , on a

$$Q[x] = e_0 x + e_1 p[x] + \dots + e_{n_0} p^{n_0}[x] = 0,$$

$$\psi(r) = e_0 + e_1 r + \dots + e_{n_0} r^{n_0} \quad (e_{n_0} \neq 0).$$

De plus, pour tout entier σ non négatif, on a

$$p^\sigma = \sum_{\tau} p^\tau L_{\sigma\tau},$$

$$\tau = 0, 1, \dots, n_0 - 1; \quad L_{\sigma\tau} = \text{const.}$$

Tout point $p^\sigma[x]$, $\sigma \geq 0$, dépend donc linéairement des n_0 points

$$(1) \quad x, p[x], \dots, p^{n_0-1}[x].$$

Passons aux points $p^{-\sigma}[x]$, $\sigma > 0$, c'est-à-dire aux points

$$\pi^\sigma[x] \quad \text{où} \quad \pi = p^{-1}.$$

Dans le polynôme $\psi(r)$ on a $e_0 \neq 0$, car, autrement, on pourrait diviser $\psi(p)$ par p , car $|p| \neq 0$, et l'équation $\psi(p) = 0$ aurait son degré inférieur à n_0 , ce que nous excluons.

Posons

$$\psi(r) = e_0 + r\pi(r), \quad \pi(r) = e_1 + e_2 r + \dots$$

On a

$$0 = \psi(p) = e_0 E + p\pi(p),$$

E étant la n -aire unité.

Enfin

$$\varpi = p^{-1} = -\frac{1}{e_0} \pi(p).$$

Les points $\varpi^\sigma[x]$ dépendent encore linéairement des n_0 points (1).

Le présent raisonnement montre que :

I. La droite $\bar{x}$ du n° 6 a un degré fini, égal ou inférieur à n_0 ;

II. Le premier membre de la relation (1) du n° 8 contient un nombre fini de termes.

Je suis maintenant à même d'étudier les conditions (8)

$$P[x] = 0, \quad P = f(p),$$

$f(r)$ étant un polynome.

10. Désignons par des minuscules grecques des polynomes

$$\alpha(r), \quad \beta(r), \quad \gamma(r), \quad \dots$$

et par des majuscules latines

$$A = \alpha(p), \quad B = \beta(p), \quad C = \gamma(p), \quad \dots$$

les n -aires correspondantes, fonctions entières de la n -aire p .

$A, B, \dots$ sont échangeables entre elles et tous les calculs de multiplication et d'addition se font suivant les règles de l'Algèbre élémentaire, comme les calculs analogues sur les polynomes $\alpha(r), \beta(r), \dots$

LEMME I. — Si

$$\gamma(r) = \alpha(r)\beta(r) \quad \text{et} \quad B[x] = 0,$$

on a aussi

$$C[x] = 0.$$

En effet

$$C = AB, \quad C[x] = AB[x] = 0.$$

Ainsi la condition

$$C[x] = 0$$

est une conséquence de la relation

$$B[x] = 0.$$

Supposons que $\beta(r)$ a un degré supérieur ou égal à celui de $\alpha(r)$.
Divisons β par α ; nommons $\varpi(r)$ le quotient et $\rho(r)$ le reste,

$$\beta(r) = \varpi(r)\alpha(r) + \rho(r).$$

LEMME II. — *Les deux relations*

$$A[x] = 0 \quad \text{et} \quad B[x] = 0,$$

si elles coexistent, ont pour conséquence la relation

$$R[x] = 0.$$

On a, en effet,

$$B = PA + R \quad \text{et} \quad 0 = B[x] = (PA + R)[x] = PA[x] + R[x] = R[x],$$

car

$$PA[x] = 0 \quad (\text{lemme I}).$$

On peut recommencer le raisonnement sur les deux relations $A[x] = 0$ et $R[x]$ et sur les deux polynômes $\alpha(r)$ et $\rho(r)$. On continuera jusqu'à ce qu'on parvienne au plus grand commun diviseur $\delta(r)$ de $\alpha(r)$ et $\beta(r)$.

COROLLAIRE. — *Les deux relations $A[x] = 0$ et $B[x] = 0$, si elles coexistent, sont conséquences de la relation unique $D[x] = 0$.*

En effet, on vient de voir (lemme II) que $D[x] = 0$. Or $A = LD$ et $B = MD$, si $\alpha = \lambda\delta$, $\beta = \mu\delta$, et le raisonnement s'achève par le corollaire du lemme I.

11. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ divers polynômes en r et $\delta(r)$ leur plus grand commun diviseur.

THÉORÈME. — *Les relations $A[x] = 0, B[x] = 0, C[x] = 0, \dots$ sont, si elles coexistent, conséquences de la relation unique $D[x] = 0$.*

La proposition découle immédiatement du corollaire du lemme II. Remarquons par contre deux choses.

D'abord, dans la présente théorie, il est licite, en vertu du n° 9, d'introduire seulement des polynômes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ de degré limité, égal ou inférieur à $n_0(9)$.

En second lieu le théorème ne serait pas infirmé si les relations $A[x] = 0$, $B[x] = 0$, ... étaient en nombre illimité ou même infini.

12. Reprenons (9) l'équation

$$\psi(p) = 0$$

de degré minimum à laquelle satisfait p .

Soient un point x de l'espace et une droite $\bar{x}$, qui part de x . On a (8, *in fine*) des relations en nombre illimité

$$\begin{aligned} (1) \quad & P_1[x] = 0, \quad P_2[x] = 0, \quad \dots, \\ & P_1 = F_1(p), \quad P_2 = F_2(p), \quad \dots, \\ & F(r), \quad F_2(r), \quad \dots = \text{polynomes.} \end{aligned}$$

On a sûrement, pour ce point x là,

$$Q[x] = 0$$

puisque

$$Q = \psi(p) = 0.$$

Nommons $f(r)$ le plus grand commun diviseur des divers polynomes $F(r)$ et du polynome $\psi(r)$ et écrivons

$$P = f(p).$$

Toutes les relations (1) sont conséquences de la relation *unique*

$$P[x] = 0.$$

Dès lors notre problème se décompose en deux problèmes réciproques **A** et **B**.

A. *Après avoir choisi, parmi les diviseurs du polynome $\psi(r)$, le polynome $f(r)$ de degré h , trouver à quelles conditions doit satisfaire un point x pour que l'on ait*

$$P[x] = 0, \quad P = f(p),$$

sans avoir, pour ce même point x , pour un autre diviseur f_1 de $\psi(r)$

$$P_1[x] = 0, \quad P_1 = f_1(p),$$

à moins que le diviseur f_1 ne soit divisible par f .

B. *Un point x étant donné, trouver parmi les diviseurs de $\psi(r)$ un polynome $f(r)$ de degré minimum h , tel que l'on ait*

$$P[x] = 0, \quad P = f(p).$$

La solution du problème **B** est exempte d'ambiguïté : si l'on trouvait deux diviseurs f et f_1 du même degré h , ils ne sauraient être distincts, car leur plus grand commun diviseur aurait aussi le degré h .

13. Passons à la construction des droites $\bar{x}$ (6). Une pareille droite est connue dès qu'on possède le point x dont elle est issue.

Donnons-nous un point x et introduisons la suite Ξ (6). Le problème **B**, une fois résolu, donne un polynome de degré h

$$f(r) = c_0 + c_1 r + \dots + c_h r^h$$

diviseur de $\psi(r)$. Entre des points de la suite Ξ existe la relation

$$0 = P[x] = c_0 x + c_1 p[x] + \dots + c_h p^h[x]$$

qui permet d'exprimer, de proche en proche, tous les points de Ξ linéairement à l'aide des h points

$$x, \quad p[x], \quad \dots, \quad p^{h-1}[x].$$

Ces derniers points eux-mêmes sont d'ailleurs linéairement distincts, car si l'on avait par exemple

$$0 = P'[x] = c'_0 x + \dots + c'_{h'} p^{h'}[x], \quad h' < h,$$

le polynome $f(r)$ fourni par la solution du problème **B** ne serait pas de degré minimum, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc le degré h du polynome $f(r)$ est précisément aussi le degré de la droite $\bar{x}$ issue du point x .

Réciproquement, donnons-nous h et cherchons les droites $\bar{x}$ qui ont ce degré, ou, ce qui revient au même, les points x , origines de ces droites $\bar{x}$.

Parmi les diviseurs, de degré h , que possède le polynome $\psi(r)$, choisissons $f(r)$. Le problème **A**, supposé résolu, donne tous les points x cherchés.

les deux matrices λ — aires

$$K = \begin{vmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & K_3 & \dots & K_{\lambda-2} & K_{\lambda-1} \\ 0 & K_0 & K_1 & K_2 & \dots & \dots & K_{\lambda-2} \\ 0 & 0 & K_0 & K_1 & \dots & \dots & K_{\lambda-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & K_0 & K_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K_0 \end{vmatrix}$$

et

$$Z = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & \dots & \dots & z_{\lambda-2} & z_{\lambda-1} & z_\lambda \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & \dots & z_{\lambda-2} & z_{\lambda-1} & z_\lambda & 0 \\ z_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & z_{\lambda-1} & z_\lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{\lambda-1} & z_\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ z_\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans K , la g -ième colonne contient les coefficients que possède dans le système Ω l'inconnue z_{g+1} . Dans Z , la α -ième colonne est celle des coefficients que possède, dans Ω , l'inconnue $K_{\alpha-1}$.

16. Discutons la façon dont le système Ω détermine les inconnues z_α . On s'assure aisément de ce qui suit.

Si $K_0 \neq 0$, toutes les z_α sont nulles. Si $K_0 = 0$, mais $K_1 \neq 0$, l'inconnue z_1 ne figure plus dans Ω et reste arbitraire, mais les $\lambda - 1$ autres inconnues sont nulles.

.....

En général : si la suite $\overline{K}$ débute exactement par σ zéros, $\sigma \leq \lambda$,

$$K_0 = K_1 = \dots = K_{\sigma-1} = 0, \quad K_\sigma \neq 0,$$

alors les σ premières inconnues $z_1, \dots, z_\sigma$ ne figurent plus dans Ω et restent arbitraires, tandis que les $\lambda - \sigma$ dernières

$$z_{\sigma+1}, z_{\sigma+2}, \dots, z_\lambda$$

sont des zéros.

La suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros au moins, car le système Ω ne nous apprend rien sur les valeurs de $z_1, \dots, z_\sigma$ et est satisfait indépendamment d'elles.

17. Étudions la façon dont le système Ω détermine les λ inconnues K_σ . Une discussion analogue à celle ci-dessus montre ce qui suit :

Si la suite $\bar{L}$ se termine exactement par $\lambda - \sigma$ zéros

$$z_\lambda = z_{\lambda-1} = \dots = z_{\sigma+1} = 0, \quad z_\sigma \neq 0,$$

alors la suite $\bar{K}$ débute par σ zéros au moins

$$K_0 = K_1 = \dots = K_{\sigma-1} = 0,$$

tandis que les $\lambda - \sigma$ derniers termes de la suite

$$K_\sigma, K_{\sigma+1}, \dots, K_{\lambda-1}$$

ne figurent plus dans Ω et restent indéterminées.

Les équations Ω ne nous apprennent plus rien sur les valeurs de $K_\sigma, \dots, K_{\lambda-1}$.

18. Pour résoudre les problèmes A et B (12), je supposerai (ce qui ne restreint en rien la généralité) la n — aire p , de déterminant $|p| \neq 0$, ramenée à l'expression *typique* dont j'ai fait usage ailleurs ⁽¹⁾ déjà.

Supposons la fonction caractéristique

$$\varphi(r) = |rE - p|$$

de p , où E est la n — aire unité, décomposée en ses *Elementarteiler* ou *successifs*

$$\varphi(r) = \prod (r - l)^\lambda, \quad n = \sum \lambda,$$

l étant une racine de l'équation caractéristique Θ , $\varphi(r) = 0$.

Au successif $(r - l)^\lambda$ correspondent :

1° Une matrice *partielle* ou *composante* λ — aire L ; 2° 2λ variables z_α et w_α $\{\alpha = 1, 2, \dots, \lambda\}$ choisies parmi les $2n$ variables x_j et u_j $\{j = 1, 2, \dots, n\}$.

(1) *Sur les connexes linéaires dans l'espace à $n-1$ dimensions (Comptes rendus du 9 mai 1904). — Sur les formes mixtes (Annales de l'Université de Lyon, 1905) : première Partie du Mémoire.*

Nommons $\chi(s)$ un symbole, tel que

$$\begin{cases} \chi(s) = 0, & \text{pour } s \text{ négatif,} & s < 0, \\ \chi(s) = 1, & \text{pour } s \text{ positif ou nul,} & s \geq 0. \end{cases}$$

La forme bilinéaire $L(z; w)$ est (3)

$$L(z; w) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} z_{\alpha} + \sum_{\alpha} w_{\alpha} z_{\alpha+1} \chi(\lambda - 1 - \alpha).$$

Dans chaque composante L les variables z_{α} , par exemple, sont rangées dans un ordre déterminé.

L'expression typique est, pour la n — aire p ,

$$p(x; u) = \sum L(z; w),$$

$\sum$ s'étendant aux diverses composantes L .

Je range dans un même *hypersystème* (l) les diverses composantes où le l est égal à une même racine distincte de l'équation caractéristique.

19. Reprenons le polynome $f(r)$ et la n — aire $P = f(p)$, déjà considérés plus haut (problèmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$). Puisque, dans l'expression typique, $p = \sum L$, on a

$$P = f(p) = \sum \Lambda, \quad \Lambda = f(L).$$

Les relations $P[x] = 0$ se traduisent, sur les variables z_{α} de la composante L , par les relations

$$\Lambda[z] = 0,$$

qu'on a à étudier.

20. On peut écrire

$$L = lE + S,$$

où la n — aire S est, $\{\alpha = 1, 2, \dots, \lambda\}$,

$$S = |z_{\alpha} \quad z_{\alpha+1} \chi(\lambda - 1 - \alpha)|,$$

tandis que E est la n — aire unité. De plus $S^{\lambda} = 0$.

Un calcul simple montre que

$$\Lambda = f(L) = f(lE + S) = \sum_g K_g S^g,$$

$$g = 0, 1, \dots, \lambda - 1, \quad K_g = \frac{1}{g!} \frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g}.$$

Les conditions $\Lambda[z] = 0$ s'écrivent

$$\Lambda[z_\alpha] = \sum_g K_g z_{\alpha+g} \chi(\lambda - \alpha - g) \quad |\alpha = 1, 2, \dots, \lambda|,$$

puisque

$$S^g = |z_\alpha \quad z_{\alpha+g} \chi(\lambda - g - \alpha)|.$$

On est conduit entre les 2λ quantités K_g et z_α précisément au système Ω déjà étudié (15, 16, 17).

21. Construisons le polynôme $\psi(r)$, de degré n_0 , tel que $\psi(p) = 0$ soit l'équation de degré minimum à laquelle satisfait p .

Frobenius (p. 26) enseigne à construire $\psi(r)$. Voici la règle, traduite dans la terminologie actuelle.

Nommons, pour l'hypersystème (l) , λ_0 l'ordre maximum des composantes L , $\lambda \leq \lambda_0$. Il viendra

$$\psi(r) = \prod (r - l)^{\lambda_0}, \quad n_0 = \sum \lambda_0,$$

la somme et le produit s'étendant aux divers hypersystèmes (l) de p .

Je dirai que dans un hypersystème (l) une composante L est *principale*, si l'ordre λ de L est précisément égal au maximum λ_0 .

Un polynôme $f(r)$, de degré h , diviseur de $\psi(r)$, est évidemment

$$f(r) = \prod_{0 \leq \mu \leq \lambda_0} (r - l)^\mu, \quad h = \sum \mu.$$

L'exposant μ , que possède dans $f(r)$ le facteur $r - l$, ne peut dépasser l'ordre λ d'une composante principale dans l'hypersystème (l) .

22. On a vu (20) que, dans une même composante L , les z_α et les K_g sont liées par le système Ω .

Supposons que :

la suite $\overline{K}$ débute par τ zéros

$$K_0 = \dots = K_{\tau-1} = 0, \quad K_\tau \neq 0;$$

la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros

$$z_\sigma \neq 0, \quad z_{\sigma+1} = \dots = z_\lambda = 0.$$

Si l'on se donne τ (cas du n° 16) la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \tau$ zéros *au moins*; par suite $\lambda - \tau \leq \lambda - \sigma$, $\tau \geq \sigma$, $\sigma = \tau - \varepsilon$, ε étant un entier non négatif.

Si l'on se donne σ (cas du n° 17), la suite $\overline{K}$ débute par σ zéros au moins. $\sigma \leq \tau$ et encore $\sigma = \tau - \varepsilon$.

Donc la formule $\sigma = \tau - \varepsilon$ est générale, à condition bien entendu que $\tau \leq \lambda$, $\sigma \leq \lambda$.

23. Comme (20)

$$K_g = \frac{1}{g!} \frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g} \quad \text{et} \quad f(r) = \prod (r - l)^\mu,$$

on a

$$\begin{aligned} \tau &= \mu & \text{si} & \quad \mu \leq \lambda, \\ \tau &= \lambda & \text{si} & \quad \mu > \lambda; \end{aligned}$$

ce qu'on exprime par la formule unique

$$(1) \quad \tau = \mu + (\lambda - \mu) \chi(\mu - \lambda),$$

$\chi(s) = 0$ ou 1 suivant que $s < 0$ ou $s \geq 0$.

Si l'on a affaire à une composante principale (21, *in fine*) $\mu \leq \lambda$ et $\tau = \mu$. Enfin, pour une composante principale, il vient (22)

$$(2) \quad \tau = \mu = \sigma + \varepsilon.$$

Problème A.

24. Le polynome

$$f(r) = \prod (r - l)^\mu, \quad h = \sum \mu,$$

une fois choisi, on possède les exposants μ , ainsi que les quantités

$$K_g = \frac{1}{g!} \frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g}$$

et le nombre τ , du n° 23,

$$\tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda).$$

Parmi les λ inconnues z_α , les $\lambda - \sigma$ dernières sont nulles, les σ premières arbitraires (cas du n° 16). Enfin $\sigma = \tau - \varepsilon$, $\varepsilon =$ non négatif.

Pour une composante principale $\tau = \mu$, $\sigma = \mu - \varepsilon$.

La solution du problème **A** se formule ainsi : *après avoir choisi le polynôme*

$$f(r) = \prod (r - l)^\mu, \quad h = \sum \mu,$$

c'est-à-dire l'exposant μ afférent à chaque hypersystème (l) , on annule, dans la composante λ — aire L de (l) , les

$$(o) \quad \lambda - \tau = \lambda - \{\mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda)\} = (\lambda - \mu)\{1 - \chi(\mu - \lambda)\}$$

dernières variables z_α , en laissant aux

$$(1) \quad \tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda)$$

premières des valeurs quelconques.

23. La solution du problème **A** ainsi énoncée répond-elle à l'énoncé du problème donné au n° 12? Autrement dit : existe-t-il, pour le même point x (ou les mêmes z_α), un autre polynôme, non divisible par $f(r)$,

$$f_1(r) = \prod (r - l)^{\mu_1},$$

tel que (avec des notations faciles à comprendre) on ait encore

$$\Lambda_1[s] = 0, \quad \Lambda_1 = f_1(p)?$$

Non, tant que les z_α , non forcément nulles, conservent des valeurs *quelconques*. Voici comment on s'en assure.

Puisque $f(r)$ ne divise pas $f_1(r)$, on trouvera au moins un hypersystème (l) dans lequel $\mu_1 < \mu$ ou $\mu_1 = \mu - \theta$, $\theta =$ entier positif. Prenons une composante principale L de cet hypersystème (l) . On aura à la fois à tenir compte de Λ et de Λ_1 .

Tenons compte de Λ . Sont forcément nulles les $\lambda - \tau = \lambda - \mu$ dernières z_α . Les μ premières conservant des valeurs *quelconques*, on fera

$$(1) \quad z_1, z_2, \dots, z_\mu \neq 0; \quad z_{\mu+1} = \dots = z_\lambda = 0.$$

Tenons compte de Λ_1 . La formule (2) du n° 23 donne, avec des notations faciles à comprendre,

$$\sigma_1 = \mu_1 - \varepsilon_1 = \mu - \theta - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \geq 0.$$

On doit faire $z_{\sigma_1+1} = 0$, ce qui est contraire à (1), car $\mu \leq \mu - \theta - \varepsilon_1 + 1$.

On peut se demander si le raisonnement subsiste en particulier les z_α arbitraires. Cela revient à se donner les z_α et l'on est ramené au problème B.

Problème B.

26. Donnons-nous le point x , c'est-à-dire les z_α , et cherchons à construire le polynôme $f(r)$, de degré minimum, c'est-à-dire à calculer les exposants μ .

Supposons que dans la composante λ — aire L on ait

$$z_\sigma \neq 0, \quad z_{\sigma+1} = \dots = z_\lambda = 0,$$

c'est-à-dire que la suite $\bar{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros. On possède le nombre σ puisqu'on possède les z_α . On a (n° 24)

$$\tau = \sigma + \varepsilon$$

et, comme $f(r)$ est divisible par $(r-l)^\tau$, $f(r)$ est divisible par $(r-l)^{\sigma+\varepsilon}$. Donc

$$\mu \geq \sigma.$$

Nommons σ_0 le maximum des nombres σ pour les différentes composantes L de l'hypersystème (l) . On a $\mu \geq \sigma_0$. Comme $f(r)$ doit avoir le degré minimum, on fera $\mu = \sigma_0$. Bien entendu, le μ ainsi calculé doit être $\mu \leq \lambda_0$, $\lambda_0 =$ ordre maximum des composantes L de (l) .

D'ailleurs, comme $0 \leq \tau \leq \lambda$, $\tau \leq \sigma_0$, $\lambda \leq \lambda_0$, la condition $\mu = \sigma_0 \leq \lambda_0$ peut être satisfaite.

La solution du problème **B** se formule donc ainsi : *quand on se donne le point x , c'est-à-dire, pour chaque composante λ — aire L de l'hypersystème (l) , les valeurs de z_α , on possède le nombre σ tel que*

$$z_\sigma \neq 0, \quad z_{\sigma+1} = \dots = z_\lambda = 0;$$

nommons σ_0 le maximum des σ pour les différentes L de (l) ; l'exposant du facteur $r - l$ dans le polynome $f(r)$ sera précisément $\mu = \sigma_0$.

Pour un point x pris au hasard dans l'espace, aucune des z_α n'est zéro; $\sigma = \lambda$, $\sigma_0 = \lambda_0$, $f(r)$ se confond avec $\psi(r)$.

27. Appliquons la méthode, qui vient d'être exposée, à construire les points fondamentaux de p , c'est-à-dire les droites fondamentales d_i de degré 1 (n° 2 et 3).

On a $m = 1$. d_i contient une seule droite $\bar{x}$ de degré $h = 1$. Le polynome $f(r)$ est de degré 1. L'exposant μ est zéro pour tous les hypersystèmes, sauf un, (l) par exemple. Pour (l) , $\mu = 1$.

Prenons une composante λ — aire L de l'hypersystème (l') , $l' \neq l$. On a $\mu = 0$. La formule (o) du n° 24 (problème **A**) montre qu'il faut annuler les λ dernières z_α , c'est-à-dire les annuler toutes.

Supposons, au contraire, que L est dans l'hypersystème (l) . Alors $\mu = 1$.

Si $\lambda > 1$, la règle du n° 24 (problème **A**) montre que l'on doit faire

$$z_1 = \text{arbitr.}, \quad z_2 = z_3 = \dots = z_\lambda = 0.$$

Si $\lambda = 1$, z_1 l'unique variable z_α , doit rester arbitraire.

Tout cela est d'accord avec la règle que j'ai déjà donnée dans ma Note aux *Comptes rendus* du 9 mai 1904.

**SUR LE CAS D'EXCEPTION DE M. PICARD
ET LES FONCTIONS MULTIFORMES;**

Par M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Ce travail est le développement d'une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (20 juin 1904). Dans mon Mémoire, qui a été présenté à la Faculté des Sciences de Paris comme thèse de l'Université, je fais l'étude des zéros des fonctions multiformes en étendant le théorème de M. Picard et ses généralisations à toutes les fonctions ayant un nombre fini de branches, définies par une équation telle que

$$f(z, u) = u^v + A_1(z)u^{v-1} + A_2(z)u^{v-2} + \dots + A_{v-1}(z)u + A_v(z) = 0,$$

les $A_i(z)$ étant des fonctions entières ou bien des fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, et à certaines classes de fonctions à un nombre infini de branches (voir *Comptes rendus*, 8 février 1904).

J'ai, à plusieurs reprises, signalé le fait que ces recherches ont pour base un théorème fondamental de la théorie des fonctions, dû à M. Borel. Ce théorème s'énonce comme il suit :

Si les fonctions entières $Q_i(z)$ croissent moins vite que $e^{\mu(z)}$, les exposants $H_i(z)$ croissant tous plus vite que $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, où α est un nombre positif quelconque, l'identité

$$(1) \quad Q_1(z)e^{H_1(z)} + Q_2(z)e^{H_2(z)} + \dots + Q_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne ⁽¹⁾ la nullité de tous les coefficients $Q_i(z)$.

Dans le cas où les fonctions $Q_i(z)$ et $H_i(z)$ sont d'ordre fini, le théorème de M. Borel est susceptible d'une généralisation, grâce à quelques résultats de MM. Lindelöf ⁽²⁾ et Boutroux ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Nous supposons que l'identité ne soit pas réductible à une autre de même forme et ayant un nombre moindre d'exponentielles (de termes); en d'autres termes, nous supposons que toutes les différences $H_i(z) - H_1(z)$ jouissent elles-mêmes de la propriété de croître plus vite que $[\mu(r)]^{1+\alpha}$.

⁽²⁾ *Acta Societatis scientiarum Fennicae*, t. XXXI, n° 1, 1902.

⁽³⁾ Thèse *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (Stockholm, Centraltryckeriet).

2. D'après ces auteurs, si le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière $F(z)$ satisfait aux inégalités

$$(2) \quad \begin{cases} M(r) < e^{r^{\rho_1} (\log r)^{\rho_2} \dots (\log_{\mu} r)^{\rho_{\mu+1}}}, \\ M(r) > e^{r^{\rho_1} (\log r)^{\rho_2} \dots (\log_{\mu} r)^{\rho_{\mu+1}}}, \end{cases}$$

la première à partir d'une certaine valeur de r et la seconde pour une infinité de valeurs de r dépassant toute limite donnée, on aura aussi l'inégalité

$$(3) \quad |F(z)| > e^{-r^{\rho_1} (\log r)^{\rho_2} \dots (\log_{\mu} r)^{\rho_{\mu+1}}},$$

pour une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment. C'est le théorème bien connu de M. Hadamard (sur le module minimum) précisé.

Dans son travail publié par l'*Arkiv for Matematik, Astrofysik, och Fysik, utgivet af k. Svenska Vetenskapsakademien*, M. Wiman a précisé le théorème de M. Hadamard d'une autre manière relativement aux *intervalles d'exclusion*. D'après ses résultats, la longueur d'un intervalle d'exclusion commençant par r_0 peut être prise égale à $r_0 V$, V étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra, fixé d'avance.

On en déduit le fait suivant, important pour notre but, à savoir :

Etant donné un nombre quelconque fini de fonctions entières, il y a toujours une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment, pour lesquelles toutes ces fonctions satisfont à l'inégalité (3).

Dans une Note récente du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXII, 1904, p. 314) nous avons précisé davantage le théorème de M. Hadamard concernant les points d'exclusion, mais sans utiliser la définition d'ordre de $M(r)$ plus précise de MM. Lindelöf et Boutroux.

3. En précisant un résultat de M. Borel, M. Boutroux a pu énoncer un théorème très important sur la croissance de la dérivée d'une fonction entière : il a démontré que, si l'on exclut du champ de la variable certaines aires fermées entourant les pôles, aires dont la somme peut être rendue négligeable, la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini est comparable, par-

tout ailleurs, à une puissance finie de la variable (*Thèse*, deuxième Partie).

Il résulte immédiatement de là que, si une fonction $F(z)$ satisfait aux inégalités (2), il en sera de même de sa dérivée $F'(z)$, pourvu que l'on y remplace ϵ par $\epsilon_1 < \epsilon$. En d'autres termes, la dérivée $F'(z)$ a le même ordre $(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu)$ que la fonction $F(z)$, même lorsqu'on attribue à la notion de l'ordre le sens plus large considéré par M. Lindelöf.

Considérons maintenant un nombre fini de fonctions $F_1(z), F_2(z), \dots, F_m(z)$ d'ordre $(\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu)$ et une fonction $R(F_1, F_2, \dots, F_m)$ rationnelle ⁽¹⁾ par rapport à $F_1(z), F_2(z), \dots, F_m(z)$; il est clair que les résultats ci-dessus indiqués nous conduisent à la conclusion que le module de la fonction

$$\Phi(z) = R[F_1(z), F_2(z), \dots, F_m(z)]$$

sera compris sur une infinité de cercles de rayons croissant indéfiniment [cf. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, 1897)], entre

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \epsilon}} \quad \text{et} \quad e^{-r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \epsilon}}.$$

Dès lors, il est aisé, en utilisant les résultats exposés plus haut et en suivant exactement le procédé par lequel M. Borel a démontré son théorème, d'établir le théorème suivant :

Si les fonctions $Q_i(z)$ croissent moins vite que

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}},$$

tandis que les fonctions $H_i(z)$ croissent plus vite que

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \alpha}},$$

α étant un nombre positif quelconque, l'identité

$$(4) \quad Q_1(z) e^{H_1(z)} + Q_2(z) e^{H_2(z)} + \dots + Q_n(z) e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne ⁽²⁾

$$Q_1(z) = 0, \quad Q_2(z) = 0, \quad \dots, \quad Q_n(z) = 0.$$

⁽¹⁾ D'une façon plus précise, il en serait de même d'une fonction rationnelle des $F_1, F_2, \dots, F_m$ et de leurs dérivées d'ordre quelconque (en nombre fini).

⁽²⁾ On suppose toujours qu'aucune des différences $H_i(z) - H_1(z)$ ne soit d'ordre inférieur à $r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}$. (J'utilise ici la définition d'ordre donnée par M. Lindelöf.)

C'est une généralisation du cas correspondant du théorème de M. Borel; le lecteur est prié de se reporter à son Mémoire précité (p. 385) pour se rendre bien compte des résultats de ce travail.

4. J'exposerai maintenant une extension du théorème de M. Borel, extension poussée assez loin pour permettre de considérer des identités de la forme (1), où les coefficients $Q_i(z)$ et les exposants $H_i(z)$ ne sont plus des fonctions analytiques. A cette extension nous conduisent les résultats remarquables auxquels M. A. Wiman est arrivé par les considérations plus précises du mode de croissance de $M(r)$ dues à MM. Boutroux et Lindelöf : M. Wiman a mis en lumière le cas où les inégalités établies par ces auteurs, entre l'ordre de grandeur du module maximum et la distribution des zéros, ne sont plus vérifiées. C'est un cas d'exception de M. Picard généralisé. M. Wiman a montré que, lorsque ce cas se présente, la fonction entière $F(z)$ se décompose comme il suit :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F(z) = F_1(z) e^{-\frac{z^p}{p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p} \right)} & \text{dans le cas } p = \rho - 1, \\ F(z) = F_1(z) e^{\frac{z^p}{p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p} \right)} & \text{dans le cas } p = \rho, \end{array} \right.$$

p désignant le genre et ρ l'ordre de $F(z)$, le deuxième facteur, qui croît comme une exponentielle, ayant un ordre de grandeur supérieur à celui de $F_1(z)$; j'entends par là que, si le module maximum $M(r)$ de $F(z)$ est de l'ordre $e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}}$, celui de $F_1(z)$ reste inférieur à $e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu} - \alpha}$, α étant un nombre positif quelconque. Quant à l'entier n_1 , qui figure dans les formules (5), il est défini par les inégalités

$$(6) \quad r_{n_1} < r < r_{n_1+1},$$

r étant toujours le module de z et r_n celui du zéro a_n de rang n ; on voit bien que le nombre n_1 , ainsi défini, est une fonction de $r = |z|$ et qu'il en est de même de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p}$ que nous désignerons par $q(r)$. Il en résulte que le facteur exponentiel

$$(7) \quad \tau(z) = e^{-q(r) \frac{z^p}{p}}$$

n'est pas une fonction analytique, puisque la fonction

$$\frac{2}{z^2} \log \sigma(z) = -q(r)$$

n'est pas une fonction analytique de z , et il en est nécessairement de même de l'autre facteur $F_1(z)$. Comme M. Wiman l'a montré, la fonction $F(z)$ doit être considérée comme exceptionnelle, puisque aucune des fonctions $F(z) + f(z)$, où $f(z)$ désigne une fonction d'ordre inférieur à celui de $F(z)$, ne saurait présenter les mêmes caractères que $F(z)$; nous sommes donc en présence d'un cas d'exception, qui comprend comme cas particulier le cas d'exception usuel et dont le caractère exceptionnel n'a pu se présenter que par une décomposition de la fonction $F(z)$ en deux facteurs non *analytiques* par rapport à z .

5. Supposons maintenant que le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$, qui figurent dans la fonction $f(z, u)$, soit

$$(8) \quad e^{r^2 \log r} r^{p_1} (\log r)^{p_2} \dots (\log r)^{p_k}.$$

Il est d'abord facile de constater qu'il est impossible d'avoir ν valeurs de $u, u_1, u_2, \dots, u_\nu$, pour lesquelles la fonction $f(z, u)$ soit d'ordre inférieur à (8), parce que, s'il en était ainsi, il résulterait de la résolution des équations

$$(9) \quad f(z, u_1) = f_1(z), \quad f(z, u_2) = f_2(z), \quad \dots, \quad f(z, u_\nu) = f_\nu(z),$$

que *tous* les coefficients $A_i(z)$ seraient d'ordre inférieur à (8), ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. S'il y a de telles valeurs de u , appelons-les *valeurs exceptionnelles* (E).

Supposons maintenant qu'il y ait $\nu + 1$ valeurs de u autres que (E), pour lesquelles la fonction $f(z, u)$ soit *exceptionnelle* au sens précis du mot, d'après M. Wiman. Je dis que cela est impossible.

Soient, en effet, $u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu$ ces $\nu + 1$ valeurs de u ; on aura

$$(10) \quad \begin{cases} f(z, u_0) = f_0(z) e^{q_0^{(r)} \frac{z^p}{p}}, \\ f(z, u_1) = f_1(z) e^{q_1^{(r)} \frac{z^p}{p}}, \\ \dots\dots\dots, \\ f(z, u_\nu) = f_\nu(z) e^{q_\nu^{(r)} \frac{z^p}{p}}, \end{cases}$$

les $f_0(z), f_1(z), \dots, f_v(z)$ désignant des fonctions (non analytiques, en général) d'ordre inférieur à (8) et les q_i désignant les sommes de M. Wiman indiquées plus haut, qui, ne dépendant que de $r = (z)$, sont telles que les facteurs exponentiels soient de l'ordre (8).

Comme M. Wiman l'a démontré dans son travail cité, les fonctions $f_i(z)$ obéissent aux inégalités de MM. Boutroux et Lindelöf et au théorème de M. Hadamard sur le module minimum.

D'autre part, si nous différencions les deux membres de l'égalité

$$(11) \quad F_i(z) = f(z, u_i) = f_i(z) e^{q_i \frac{z^p}{p}}$$

en faisant varier la variable sur la circonférence de rayon r , nous obtenons

$$(12) \quad F'_i(z) = e^{q_i \frac{z^p}{p}} [f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{p-1}].$$

Or, le rapport $F'_i(z) : F_i(z)$ est comparable ⁽¹⁾, d'après les résultats de M. Boutroux, à une puissance finie de z et, par conséquent, $F'_i(z)$ est *exceptionnelle*, au sens de M. Wiman, en même temps que $F_i(z)$.

Il n'y a donc que deux hypothèses possibles pour la fonction

$$(13) \quad f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{p-1} :$$

ou bien elle est aussi exceptionnelle ⁽²⁾, ou bien elle est d'ordre moindre que (8). Mais il n'est pas difficile de constater que c'est la seconde hypothèse qui est vraie : si l'on divise, en effet, membre à membre, les deux égalités (11) et (12), on obtient

$$(14) \quad \frac{F'_i(z)}{F_i(z)} = \frac{f'_i(z)}{f_i(z)} + q_i z^{p-1}.$$

Le rapport $F'_i(z) : F_i(z)$ étant comparable à une puissance finie de z (si l'on exclut le voisinage immédiat des zéros), il en est de même de $f'_i(z) : f_i(z)$ et, par conséquent, l'ordre de $f'_i(z)$ n'est

⁽¹⁾ Sauf le voisinage immédiat des zéros de $F_i(z)$.

⁽²⁾ C'est-à-dire susceptible d'une décomposition de M. Wiman ayant un facteur principal de la forme $e^{q^{(1)} \frac{z^p}{p}}$.

pas supérieur à celui de $f_i(z)$. Il en résulte que la dérivée $F'_i(z)$ a le même facteur *principal* $e^{q_i \frac{z^p}{p}}$ que la fonction $F_i(z)$. Il est maintenant aisé de prouver que le facteur $f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{p-1}$ dans la décomposition (12) obéit au théorème de M. Hadamard sur ce module minimum; si l'on effectue, en effet, la décomposition régulière de la fonction exceptionnelle $F'_i(z)$ suivant la méthode de M. Wiman (voir le paragraphe 4; on pourrait l'appeler : *décomposition de M. Wiman*), on obtient

$$(15) \quad F'_i(z) = e^{K_i \frac{z^p}{p}} \varphi_i(z)$$

avec

$$(16) \quad K_i = - \sum_{n_1} \frac{1}{a'_{n_1}{}^p} \quad (p = \rho - 1) \quad \text{ou bien} \quad K_i = \sum_1^{n_1} \frac{1}{a'_{n_1}{}^p} \quad (p = \rho),$$

les $a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n, \dots$ désignant les zéros de $F'_i(z)$ et $\varphi_i(z)$ ayant un ordre inférieur à celui de $e^{K_i \frac{z^p}{p}}$.

Nous aurons

$$(17) \quad f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{p-1} = \varphi_i(z) e^{(K_i - q_i) \frac{z^p}{p}} \quad (1).$$

Comme nous l'avons dit plus haut, M. Wiman a établi dans son travail cité que la fonction $\varphi_i(z)$, qui n'est pas toujours analytique, obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum; dès lors, l'égalité (17) nous montre bien clairement qu'il en est de même de la fonction (13).

6. Rien ne nous manque plus pour aller plus loin : l'élimination des coefficients $A_i(z)$ entre les $\nu + 1$ équations (10) nous conduit à l'identité

$$(18) \quad \lambda_0 f_0(z) e^{q_0(r) \frac{z^p}{p}} + \lambda_1 f_1(z) e^{q_1(r) \frac{z^p}{p}} + \lambda_2 f_2(z) e^{q_2(r) \frac{z^p}{p}} + \dots + \lambda_\nu f_\nu(z) e^{q_\nu(r) \frac{z^p}{p}} = \lambda,$$

(1) Il est clair que la différence $K_i - q_i$ croît moins vite que

$$(\log r)^{\epsilon_1} (\log_2 r)^{\epsilon_2} \dots (\log_\mu r)^{\epsilon_{\mu-1}},$$

ϵ étant un certain nombre positif.

où

$$(19) \quad \lambda_i = \begin{vmatrix} 1 & u_{i+1} & u_{i+1}^2 & \dots & u_{i+1}^{y-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_y & u_y^2 & \dots & u_y^{y-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \dots & u_{i-1}^{y-1} \end{vmatrix} \quad \lambda = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \dots & u_0^y \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_y & u_y^2 & \dots & u_y^y \end{vmatrix}.$$

Tous ces déterminants de Vandermonde représentent des nombres essentiellement différents de zéro.

Il n'y a rien à changer maintenant à la démonstration de M. Borel pour établir l'impossibilité de (18); nous remarquerons d'abord que, quelles que soient les réductions qui peuvent avoir lieu dans le premier membre de cette identité, le second membre λ restera intact et constituera toujours le terme algébrique unique; d'autre part, ces réductions ne sauraient nuire aux propriétés caractéristiques de l'identité. Si, par exemple, la différence $q_1(r) - q_0(r)$ croît moins vite que $(\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu - \alpha}$, α étant un nombre positif quelconque, nous aurons

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_0 f_0(z) e^{\frac{q_0(r)}{\rho} z} + \lambda_1 f_1(z) e^{\frac{q_1(r)}{\rho} z} &= \left[\lambda_0 f_0(z) + \lambda_1 f_1(z) e^{\frac{\delta(r)}{\rho} z} \right] e^{\frac{q_0(r)}{\rho} z} = \psi(z) e^{\frac{q_0(r)}{\rho} z}, \\ \delta(r) &= q_1(r) - q_0(r), \quad \psi(z) = \lambda_0 f_0(z) + \lambda_1 f_1(z) e^{\frac{\delta(r)}{\rho} z}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi les deux termes ont été remplacés par un seul de la même forme, puisque $\psi(z)$ croît moins vite que $r^b (\log r)^{\rho_1} \dots (\log_\mu r)^{\rho_\mu - b}$, b étant un nombre positif. Par un procédé exposé dans le paragraphe précédent, on démontrera encore que la fonction $\psi(z)$ obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum. En effet, le produit $\psi(z) e^{\frac{q_0(r)}{\rho} z}$ désignant une fonction entière *analytique*, on aura la décomposition de M. Wiman :

$$(21) \quad \psi(z) e^{\frac{q_0(r)}{\rho} z} = W(z) e^{\frac{\theta(r)}{\rho} z},$$

où $W(z)$ obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum. L'ordre de $\psi(z)$ étant inférieur à (8), il est clair que la

différence $\theta(r) - q_0(x)$ doit croître moins vite que

$$(22) \quad (\log r)^{p_1} (\log_2 r)^{p_2} \dots (\log_\mu r)^{p_\mu - \alpha},$$

α étant positif, et, par conséquent, la fonction $\psi(z)$ sera égale au produit de deux fonctions $W(z)$ et $e^{\frac{[\beta(r) - q_0(r)]}{\rho} z^\rho}$ obéissant au théorème de M. Hadamard sur le module minimum et d'ordre *non supérieur* à celui de $\psi(z)$. Il en sera donc de même de $\psi(z)$.

Nous démontrons aussi, à l'aide du théorème cité plus haut de M. Boutroux, que la dérivée du produit $\psi(z) e^{\frac{q_0(r)}{\rho} z^\rho}$ est une fonction exceptionnelle de la même forme.

Cela acquis, si nous prenons la dérivée de deux membres de l'identité (18), nous obtiendrons une identité *de la même forme avec les mêmes propriétés des coefficients et des exposants*, mais ayant un terme de moins.

Pour les détails de la démonstration, je renvoie au Mémoire précité de M. Borel (p. 385), puisque, au point de vue de la marche de la démonstration, il n'y a rien qui puisse distinguer les identités (18) des identités ordinaires de M. Borel.

Le fait que les coefficients et les exposants ne sont pas des fonctions analytiques n'intervient pas dans la démonstration, car nous avons acquis plus haut les trois éléments nécessaires de la démonstration : 1° la conservation des conditions d'inégalité d'ordre entre les coefficients et les exposants dans les identités déduites de (18) par des dérivations successives ; 2° l'application du théorème sur le module minimum aux coefficients de l'identité (18) ; 3° l'application du même théorème à toutes les identités, déduites de (18) par les dérivations successives.

Nous sommes donc en présence d'une forme *singulière*, pour ainsi dire, du théorème généralisé de M. Borel, que nous avons énoncé dans le paragraphe 3.

7. Les considérations précédentes nous conduisent à l'extension au cas d'exception de M. Picard, *généralisé par M. Wiman*, des résultats que nous avons communiqués autrefois à l'Académie ⁽¹⁾

(1) Voir *Comptes rendus*, 20 avril 1903, 8 février 1904 et *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1904, p. 44 : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendentes*. Ces résultats seront développés en détail dans ma thèse.

sur les fonctions à ν branches d'ordre fini et sur certaines classes de fonctions à un nombre infini de branches. Nous avons ainsi précisé considérablement ces résultats, grâce aux recherches récentes de MM. Boutroux, Lindelöf et Wiman. On a, entre autres, le théorème suivant :

Si nous désignons par $u = \omega(z)$ la fonction multiforme définie par l'équation $f(z, u) = 0$ d'ordre $e^{r^2(\log r)^{\rho_1} \dots (\log \mu r)^{\rho_\mu}}$, les zéros de l'équation

$$(23) \quad \omega(z) = \alpha$$

(α étant un nombre quelconque) obéissent aux inégalités établies par MM. Boutroux et Lindelöf pour les fonctions entières du même ordre. Il ne peut pas y avoir d'exception pour plus de $2\nu - 1$ valeurs finies de α . Il en est de même des équations

$$(24) \quad \omega(z) = G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à

$$(25) \quad e^{r^2(\log r)^{\rho_1} \dots (\log \mu r)^{\rho_\mu}}.$$

Ainsi, si la densité des zéros d'une équation (24) est inférieure à celle d'une fonction entière du même ordre (suivant les inégalités de MM. Boutroux et Lindelöf), cette équation doit être considérée comme exceptionnelle.

Nous appelons ordre de la fonction $\omega(z)$ à ν branches le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$ de $f(z, u)$. Il est aisé de voir que la fonction $\omega(z)$ ne saurait croître plus vite que

$$e^{r^2(\log r)^{\rho_1} \dots (\log \mu r)^{\rho_\mu + \alpha}},$$

α étant un nombre positif; car, s'il en était ainsi, l'égalité

$$[\omega(z)]^\nu + A_1(z)[\omega(z)]^{\nu-1} + A_2(z)[\omega(z)]^{\nu-2} + \dots + A_\nu(z) = 0$$

serait impossible. En effet, le rapport de chaque terme au suivant tend vers l'infini avec un ordre équivalent à celui de $\omega(z)$.

Il est clair aussi qu'une branche, au moins, de $\omega(z)$ sera d'ordre égal à (25), suivant la définition de M. Lindelöf étendue aux fonc-

tions multiformes, car, si toutes les branches étaient d'ordre moindre que (25), il en serait de même de tous les coefficients $A_i(z)$, ce qui est contradictoire à notre hypothèse. Ainsi se trouve justifiée la définition d'ordre des fonctions à v branches donnée ci-dessus.

SUR LE PROBLÈME DE MONGE (1);

Par M. E. GOURSAT.

La publication d'une Note récente de M. Zervos (*Comptes rendus*, 10 avril 1905) a ramené mon attention sur certains résultats, relatifs au problème de Monge, qui, quoique très incomplets, peuvent peut-être offrir quelque intérêt pour les mathématiciens qui s'occupent de ce genre de questions. Je les indiquerai rapidement.

1. Il est commode, pour faciliter les raisonnements et les énoncés, d'employer le langage de la Géométrie à n dimensions. Étant données $(n+1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, nous dirons que tout système particulier de valeurs de ces variables représente les *coordonnées d'un point* dans l'espace à $(n+1)$ dimensions. Nous continuerons à appeler *surface* toute variété à n dimensions située dans cet espace à $(n+1)$ dimensions, et *courbe* toute variété à une dimension. Toute surface est représentée par une seule relation entre les coordonnées de ses points; si cette relation est linéaire, la surface sera appelée *surface plane* ou *plan*. De même, nous appellerons *droite* une variété linéaire à une dimension, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les coordonnées X_i satisfont à n relations de la forme

$$(1) \quad \frac{X_1 - x_1}{a_1} = \frac{X_2 - x_2}{a_2} = \dots = \frac{X_{n+1} - x_{n+1}}{a_{n+1}};$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les coordonnées d'un point particulier de cette droite, $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ses *paramètres directeurs*.

(1) Cette Note a été présentée à la Société Mathématique, dans la séance du 15 juin 1905. Une Note de M. Bottasso, sur le même sujet, a été présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 13 juin 1905.

Un plan P passant par un point de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$

$$(2) \quad A_1(X_1 - x_1) + A_2(X_2 - x_2) + \dots + A_{n+1}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$

est, en général, déterminé, s'il doit contenir n droites passant par ce point $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$; car les coefficients A_i doivent vérifier un système de n équations linéaires et homogènes.

Une droite D, passant par un point fixe M de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, et dont les paramètres directeurs dépendent de p variables arbitraires α_i ($p < n$), engendre une *variété conique* de sommet M. Si $p = 1$, nous dirons que cette variété conique à deux dimensions est un *cône* de sommet M. Tout cône de sommet M est, d'après cela, représenté par un système de $(n - 1)$ équations distinctes

$$(3) \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; X_1 - x_1, \dots, X_{n+1} - x_{n+1}) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

les f_i étant des fonctions homogènes des différences $X_i - x_i$. Si, dans les équations (1), les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ sont fonctions d'une seule variable indépendante α , ces droites sont les *génératrices* d'un cône de sommet M $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, et à chaque valeur de α correspond une génératrice déterminée.

Étant donné un cône de sommet M, tout plan passant par M renferme un certain nombre de génératrices. Si, par exemple, les génératrices du cône sont représentées par les équations (1), $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ étant fonctions d'une variable indépendante α , les valeurs de α correspondant aux génératrices situées dans le plan (2) sont racines de l'équation

$$(4) \quad U(\alpha) = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_{n+1} a_{n+1} = 0.$$

On peut disposer des coefficients $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ de façon que ce plan ait en commun avec le cône n génératrices confondues avec une génératrice déterminée. Si α_0 est la valeur correspondante de la variable α , il faut et il suffit pour cela que α_0 soit une racine multiple d'ordre n de l'équation $U(\alpha) = 0$; on a ainsi n équations de condition

$$(5) \quad U(\alpha_0) = 0, \quad U'(\alpha_0) = 0, \quad \dots, \quad U^{n-1}(\alpha_0) = 0,$$

qui déterminent, en général, les rapports des coefficients A_i ,

$A_2, \dots, A_{n+1}$. Nous dirons que le plan ainsi obtenu est *osculateur* au cône (T) suivant la génératrice (α_0) . En éliminant α_0 entre les n équations (5), on arrive, en général, à $(n - 1)$ équations de condition homogènes par rapport à $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$,

$$(6) \quad F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

dépendant, en outre, des variables $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, si les paramètres directeurs $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ dépendent non seulement de α , mais des coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ du sommet. Nous dirons, pour abréger, que les relations (6) sont les *équations tangentielles* du cône considéré de sommet $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$.

Lorsque le cône est représenté par un système de $n - 1$ équations de la forme (3), les n équations (2) et (3) déterminent les génératrices du cône situées dans le plan P. On obtiendra encore les équations tangentielles du cône en exprimant que n de ces génératrices sont confondues. Par exemple, en éliminant $n - 1$ des rapports $\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_1}, \dots, \frac{x_{n+1} - x_{n+1}}{x_1 - x_1}$ entre les n relations (2) et (3), on arrive à une équation pour déterminer le dernier rapport, et cette équation devra avoir une racine multiple d'ordre n .

2. Réciproquement, tout système de $n - 1$ équations de la forme (6), homogènes par rapport à $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$, peut être considéré comme représentant les équations tangentielles d'un cône de sommet $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$.

En effet, imaginons que des $(n - 1)$ équations (6) on ait tiré les valeurs de $(n - 1)$ des rapports $\frac{A_2}{A_1}, \dots, \frac{A_{n+1}}{A_1}$, en fonction de l'un d'eux α . Le plan P représenté par l'équation (2)

$$U(\alpha) = A_1(X_1 - x_1) + \dots + A_{n+1}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$

ne dépend plus que d'un paramètre variable α . Les n équations

$$(7) \quad U(\alpha) = 0, \quad U'(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad U^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

représentent, quand on donne à α une valeur particulière, une droite D passant par le point M $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Lorsque α varie, cette droite D engendre un cône de sommet M, et, d'après la façon même dont on l'a obtenu, il est clair que le plan P a n génératrices communes avec ce cône qui sont confondues avec la

génératrice (α). En éliminant α entre les $(n-1)$ équations (7), on aura donc les équations d'un cône de sommet M dont les équations (6) sont les équations tangentielles.

3. Considérons maintenant un système de k équations de Monge ($k \leq n-1$),

$$(8) \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \dots, dx_{n+1}) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

les f_i étant des fonctions homogènes par rapport à $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$. Le problème de l'intégration de ce système consiste à exprimer $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ explicitement en fonction d'une variable auxiliaire t , de $n-k$ fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées successives jusqu'à un ordre déterminé. Ce problème a été résolu par Monge dans le cas particulier où l'on a $n=2, k=1$. Nous allons examiner le cas où l'on a, n étant quelconque, $k=n-1$.

Si, dans les $(n-1)$ équations (8), on remplace dx_i par $X_i - x_i$, on a les équations d'un cône de sommet $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. A chaque point de l'espace à $(n+1)$ dimensions les équations proposées font correspondre un cône (T) ayant son sommet en ce point, et le problème de Monge peut encore être formulé en ces termes :

Déterminer les courbes de l'espace à $n+1$ dimensions qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des génératrices du cône (T) ayant ce point pour sommet.

Écrivons l'équation d'un plan passant par le point $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ sous la forme

$$(9) \quad X_{n+1} - x_{n+1} = p_1(X_1 - x_1) + \dots + p_n(X_n - x_n);$$

les équations tangentielles du cône (T) de sommet $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ sont alors de la forme

$$(10) \quad F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Si l'on considère $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme n variables indépendantes, x_{n+1} comme une fonction de ces n variables, et $p_1, p_2, \dots, p_n$ comme les dérivées partielles de x_{n+1} ($p_i = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i}$), les rela-

lions (10) forment un système de $(n - 1)$ équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue. A tout système de $(n - 1)$ équations de Monge

$$(9') \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \dots, dx_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

correspond ainsi un système (10) de $(n - 1)$ équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre, que nous appellerons le *système associé* du premier système (9).

4. Cela posé, il est facile de montrer que la méthode de Monge s'étend sans peine au cas où le système associé d'équations aux dérivées partielles (10) est *en involution*.

Soit, en effet,

$$(11) \quad V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; a, b) = 0$$

une intégrale complète de ce système. Le plan tangent à l'une des surfaces intégrales S passant en un point donné $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ a pour équation

$$(12) \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} (X_1 - x_1) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} (X_{n+1} - x_{n+1}) = 0,$$

les deux paramètres a et b étant liés par la relation (11). Ce plan ne dépend donc, en réalité, que d'un seul paramètre variable, et, d'après la façon dont on a déduit le système adjoint (10) du système (9'), le plan représenté par l'équation (12) reste osculateur au cône (T) de sommet $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ représenté par les équations

$$(13) \quad \begin{cases} f_i(x_1, \dots, x_{n+1}; X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_{n+1} - x_{n+1}) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Pour déduire les équations (13) de l'intégrale complète (11), on pourrait donc procéder comme il suit. Regardons, pour fixer les idées, a comme un paramètre variable et b comme une fonction de ce paramètre définie par la relation (11). Les dérivées successives

$$b' = \frac{db}{da}, \quad b'' = \frac{d^2b}{da^2}, \quad \dots, \quad b^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}b}{da^{n-1}}, \quad b^{(n)} = \frac{d^n b}{da^n}$$

xxxiii.

14

Si $k = 1$, le système associé est de la forme

$$(20) \quad F_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

et par conséquent est en involution. Si k est > 1 , il suffira d'ajouter aux équations (19) $k-1$ équations de même forme, par exemple

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \psi_1\left(\frac{dx_1}{dx_1}\right), \quad \dots, \quad \frac{dx_{k+1}}{dx_1} = \psi_{k-1}\left(\frac{dx_1}{dx_1}\right),$$

les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k-1}$ étant arbitraires, pour être ramené au premier cas.

Les systèmes (19) ont été considérés par M. Darboux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1887). La méthode précédente montre comment on peut rattacher l'intégration de ces systèmes à une théorie générale, tout à fait analogue à la théorie de Monge pour l'équation à trois variables.

6. Appliquons, par exemple, cette méthode à l'équation de Serret

$$(21) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_4^2.$$

Joignons à cette équation une relation de forme arbitraire

$$(22) \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \varphi\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right).$$

Les équations (21) et (22) forment un système de Monge, et les équations du cône (T) correspondant de sommet (x_1, x_2, x_3, x_4) sont

$$(23) \quad \begin{cases} (X_4 - x_4)^2 = (X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2, \\ \frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1} = \varphi\left(\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1}\right). \end{cases}$$

Pour obtenir le système associé correspondant, formons l'équation qui donne les génératrices communes au cône (T) et au plan

$$X_4 - x_4 = p_1(X_1 - x_1) + p_2(X_2 - x_2) + p_3(X_3 - x_3);$$

on peut poser

$$\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1} = \alpha, \quad \frac{X_3 - x_3}{X_1 - x_1} = \varphi(\alpha).$$

ce qui donne

$$\frac{X_4 - x_4}{X_1 - x_1} = p_1 + p_2 \alpha + p_3 \varphi(\alpha).$$

L'équation en α est alors

$$[p_1 + p_2 \alpha + p_3 \varphi(\alpha)]^2 = 1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha),$$

ou

$$(24) \quad p_1 + p_2 \alpha + p_3 \varphi(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)} = U(\alpha).$$

D'après la théorie générale, on aurait les équations du système associé d'équations aux dérivées partielles en éliminant α entre la relation (24) et les relations (25)

$$(25) \quad \begin{cases} p_1 + p_3 \varphi'(\alpha) = U'(\alpha), \\ p_3 \varphi''(\alpha) = U''(\alpha). \end{cases}$$

Il est inutile d'effectuer cette élimination, car on aura une intégrale complète de ce système en prenant le plan

$$X_4 = p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3 + b,$$

p_1, p_2, p_3 étant remplacées par leurs expressions tirées des formules (24) et (25), α et b étant des constantes arbitraires.

Remplaçons maintenant b par une seconde fonction arbitraire $\psi(\alpha)$; d'après le théorème général, les fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 du paramètre α définies par les quatre équations

$$(26) \quad \begin{cases} x_4 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \psi(\alpha), \\ 0 = p'_1 x_1 + p'_2 x_2 + p'_3 x_3 + \psi'(\alpha), \\ 0 = p''_1 x_1 + p''_2 x_2 + p''_3 x_3 + \psi''(\alpha), \\ 0 = p'''_1 x_1 + p'''_2 x_2 + p'''_3 x_3 + \psi'''(\alpha), \end{cases}$$

p'_i, p''_i, p'''_i étant les dérivées de p_i par rapport à α , doivent satisfaire à la relation proposée (21).

Il est facile de le vérifier. On déduit en effet des relations (24) et (25) que l'on a

$$(27) \quad \begin{cases} p_1 + p_2 \alpha + p_3 \varphi(\alpha) = U(\alpha), \\ p'_1 + p'_2 \alpha + p'_3 \varphi(\alpha) = 0, \\ p''_1 + p''_2 \alpha + p''_3 \varphi(\alpha) = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté, en différentiant les relations (26), il vient

$$(28) \quad \begin{cases} dx_4 = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3, \\ 0 = p'_1 dx_1 + p'_2 dx_2 + p'_3 dx_3, \\ 0 = p''_1 dx_1 + p''_2 dx_2 + p''_3 dx_3. \end{cases}$$

Les relations (27) et (28) prouvent que l'on doit avoir

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\alpha} = \frac{dx_3}{\varphi(\alpha)} = \frac{dx_4}{U(\alpha)},$$

et comme l'on a

$$U^2(\alpha) = 1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha),$$

il s'ensuit que l'on a aussi

$$dx_4^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

SUR UNE TRANSFORMATION RÉCIPROQUE EN MÉCANIQUE;

Par M. PAUL-J. SUCHAN.

M. Painlevé ⁽¹⁾ a étudié des transformations de mouvement qui constituent la généralisation de la transformation homographique en Mécanique, indiquée par M. Appell ⁽²⁾. On peut envisager des transformations de mouvement distinctes des précédentes, que je désigne sous le nom de *transformations réciproques*, et qui seront définies comme il suit : les mouvements de deux points qui ont lieu, l'un par rapport au temps t et l'autre par rapport au temps t_1 , seront réciproques si, en deux points correspondants de leurs trajectoires, les coordonnées du premier point sont des fonctions des projections de la vitesse du second point sur les axes de coordonnées, et réciproquement, les coordonnées du second point sont les mêmes fonctions des composantes de la vitesse du premier point.

Si l'on suppose connues les fonctions qui caractérisent la réciprocité, et si, de plus, on se donne une relation entre les temps t

⁽¹⁾ PAINLEVÉ, *Journ. de Math.*, t. X, 1891.

⁽²⁾ APPELL, *American Journal*, t. XII.

et t_1 , les équations du mouvement des deux points seront déterminées.

Inversement, et c'est le cas le plus intéressant, on se donne les équations du mouvement d'un point matériel et l'on se demande si le mouvement est transformable en un autre réciproque.

Le problème ainsi posé est, en général, impossible, si aucune hypothèse n'est faite sur la nature de la force qui sollicite le point, ainsi que sur la direction de la force.

Je me propose, dans ce travail, de montrer que le mouvement est toujours transformable en un autre réciproque, si le temps n'entre pas explicitement dans l'expression de la force et si, de plus, la direction de la force fait, avec une droite fixe, un angle dont la tangente est le quotient de deux fonctions linéaires et homogènes des coordonnées du point matériel; en d'autres termes, si les projections de la force sur les axes de coordonnées, quand on se borne au mouvement plan, sont de la forme

$$X = (ax + by)u, \quad Y = (a'x + b'y)u,$$

où a, b, a', b' sont des constantes et u une fonction absolument quelconque des coordonnées du point et des composantes de la vitesse. Le problème comprend, comme cas particulier, le cas des forces centrales; c'est surtout ce dernier cas qui fera l'objet du présent Mémoire.

1. Soient M et M_1 deux points matériels de même masse, que pour simplifier nous supposons égale à 1. Nous supposons de plus que le mouvement se fait dans un plan et que les variables indépendantes pour les deux mouvements sont les temps t et t_1 .

Appelons x, y les coordonnées du premier point, x', y' leurs dérivées par rapport à t et X, Y les projections de la force sur les axes de coordonnées; enfin, x_1, y_1 les coordonnées du second point, x'_1, y'_1 les dérivées de x_1, y_1 par rapport à t_1 et X_1, Y_1 les composantes de la force.

D'après l'hypothèse faite, les deux mouvements seront réciproques, si, entre $x, y, x_1, y_1, x', y', x'_1, y'_1$, on a les relations

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = f(x', y'), & x = f(x'_1, y'_1), \\ y_1 = \varphi(x', y'), & y = \varphi(x'_1, y'_1). \end{cases}$$

Si les fonctions f et φ sont connues, et si l'on pose

$$(2) \quad \frac{dt_1}{dt} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} u,$$

où $\frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')}$ est le déterminant fonctionnel de f et φ , les équations du mouvement des deux points seront connues. Nous aurons, en effet,

$$\begin{aligned} x'_1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x'} X + \frac{\partial f}{\partial y'} Y \right) \frac{dt}{dt_1}, & x' &= \left(\frac{\partial f}{\partial x'_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial y'_1} Y_1 \right) \frac{dt_1}{dt}, \\ y'_1 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} Y \right) \frac{dt}{dt_1}, & y' &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y'_1} Y_1 \right) \frac{dt_1}{dt}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduira X, Y, X_1, Y_1 , en ayant égard à (1) et (2).

2. Considérons le problème inverse, c'est-à-dire le problème où l'on se donne les équations du mouvement du point M , et examinons tout de suite le cas où la force est centrale. Les équations du mouvement seront alors

$$(1) \quad \begin{cases} x'' = u x, \\ y'' = u y, \end{cases}$$

Nous supposons seulement que le temps t n'entre pas implicitement dans l'expression de la force.

Si ce mouvement est transformable en un autre réciproque, il existera deux fonctions f et φ , telles qu'en désignant par x_1, y_1 les coordonnées d'un point M_1 , on ait

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = f(x', y'), & x = f(x'_1, y'_1), \\ y_1 = \varphi(x', y'), & y = \varphi(x'_1, y'_1). \end{cases}$$

Il s'agit de trouver ces deux fonctions. Supposons le problème résolu et différencions les premières relations (2) par rapport à t_1 ; on aura

$$(3) \quad \begin{cases} x'_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} X + \frac{\partial f}{\partial y'} Y \right) \frac{dt}{dt_1}, \\ y'_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} Y \right) \frac{dt}{dt_1}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} u.$$

et qu'on remplace X, Y , par ux, uy , on aura

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\partial f}{\partial x'} x + \frac{\partial f}{\partial y'} y, \\ y_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y; \end{cases}$$

or, les fonctions f et φ étant supposées connues, x'_1, y'_1 seront d'après (2) des fonctions de x et y ; en les substituant dans ces dernières relations, on aura évidemment une identité, ce qui exige que ces relations soient indépendantes de x' et y' ; il faut donc que f et φ soient linéaires par rapport à x' et y' , et les relations (2) seront de la forme

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = ax' + by' + c, & x = ax'_1 + by'_1 + c, \\ y_1 = a'x' + b'y' + c', & y = a'x'_1 + b'y'_1 + c', \end{cases}$$

où l'on pose

$$ab' - ba' = K^2.$$

Si l'on substitue dans (4) les valeurs de x'_1, y'_1 déduites de (5), on trouve les relations suivantes entre les coefficients

$$b' - a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad a' = 0, \quad c' = 0,$$

et comme on a

$$ab' - ba' = K^2,$$

la transformation la plus générale sera

$$x_1 = Kx', \quad y_1 = Ky'.$$

Donc, si un point matériel est sollicité par une force centrale dont l'expression ne contient pas explicitement le temps, le mouvement sera toujours transformé en un autre réciproque, par la transformation

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = Kx', & \frac{dt_1}{dt} = K^2 u, \\ y_1 = Ky', \end{cases}$$

les équations du mouvement étant

$$x'' = ux, \quad y'' = uy.$$

3. Le point M_1 , transformé du premier, sera aussi sollicité par une force centrale. En effet, si nous différencions les relations (6) par rapport à t_1 , on aura

$$x'_1 = K x'' \frac{dt}{dt_1}, \quad y'_1 = K y'' \frac{dt}{dt_1};$$

en ayant égard aux équations du mouvement et à la relation qui lie t à t_1 , on aura

$$(7) \quad x'_1 = \frac{x}{K}, \quad y'_1 = \frac{y}{K};$$

une nouvelle différentiation nous donne

$$x''_1 = \frac{x_1}{K^2 u}, \quad y''_1 = \frac{y_1}{K^2 u},$$

où u s'exprime à l'aide de (6) et (7) en fonction de x_1, y_1, x'_1, y'_1 .

4. Remarquons que la trajectoire transformée, si on la rapporte aux mêmes axes que le premier mouvement, n'est autre chose qu'une courbe homothétique de la courbe hodographe correspondant au premier mouvement, la constante d'homothétie étant K , et le centre d'homothétie étant le centre des forces. Si, en particulier, $K = 1$, la trajectoire transformée est la courbe hodographe du premier mouvement, et la transformation est, dans ce cas, corrélative, comme nous l'avons fait voir dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 27 octobre 1902, c'est-à-dire que *la trajectoire transformée est la polaire réciproque de la trajectoire du mouvement donné par rapport au cercle ayant le centre des forces pour centre et $\sqrt{C}$ pour rayon, tournée d'un angle droit autour de ce centre dans un sens convenable*, la constante C étant celle des aires. On obtient une démonstration immédiate de cette proposition en partant du théorème des aires mis sous la forme $p v = C$, si l'on remarque que l'extrémité du segment vitesse, porté sur la droite qui mesure p , a pour polaire, par rapport au cercle dont le centre est le centre des forces, la tangente à la trajectoire; donc, si l'on fait tourner cette polaire réciproque d'un angle droit autour du centre et dans un sens convenable, elle coïncidera avec la courbe hodographe correspon-

dante, c'est-à-dire, dans le cas présent, avec la trajectoire transformée.

5. Supposons toujours la constante $K = 1$. Il est intéressant de déterminer la relation à laquelle la force donnée et la force transformée doivent satisfaire. On a, en effet, en désignant par F la force donnée et par F_1 la force transformée,

$$(8) \quad FF_1 = r v,$$

que l'on obtient par différentiation des formules (6) et (7) où r est la distance du point M au centre des forces. Une autre remarque intéressante est qu'il y a échange entre les coordonnées polaires r et θ et la vitesse v et la direction α de cette vitesse; c'est-à-dire que, dans les deux mouvements transformés et en deux points correspondants, les coordonnées polaires de l'un des points représentent la vitesse et la direction de la vitesse de l'autre point, ce qui résulte des formules mêmes de transformation. Il s'ensuit alors qu'en désignant par p_1 la distance du centre des forces à la tangente à la courbe transformée, c'est-à-dire à l'hodographe, le théorème des aires pourra se mettre aussi sous la forme $p_1 r = C$, la constante C étant la même que dans le premier mouvement; il suffit pour s'en convaincre de remarquer que, si φ est l'angle de la vitesse avec le rayon vecteur, cet angle se conserve dans les deux transformations, et l'on déduit de la relation des aires

$$(9) \quad C = r v \sin \varphi = p_1 r = p v.$$

A l'aide des formules (8) et (9), nous allons établir les équations différentielles de la trajectoire et de la courbe hodographe. Remarquons que le rayon vecteur r est la diagonale d'un rectangle ayant pour côtés les distances de l'origine à la tangente et à la normale à la trajectoire; or ces deux distances sont données par p et $\frac{dp}{dx}$; on aura donc, en ayant égard à (9),

$$r^2 = C^2 \left[\frac{1}{v^2} + \left(\frac{d \frac{1}{v}}{dx} \right)^2 \right],$$

et, par analogie, pour la courbe hodographe

$$v^2 = C^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right].$$

Différentions ces formules et remarquons que la différentielle de la force vive dans le premier mouvement est

$$v \, dv = F \, dr,$$

et dans le mouvement transformé est

$$r \, dr = F_1 \, dv.$$

Puisque r est la vitesse et v le rayon vecteur, nous aurons la formule de Binet

$$(10) \quad F = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right)$$

et la formule suivante

$$F_1 = -\frac{C^2}{v^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{v}}{dx^2} + \frac{1}{v} \right);$$

d'où, en ayant égard à (8), on conclura finalement,

$$(11) \quad \frac{rv}{F} = -\frac{C^2}{v^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{v}}{dx^2} + \frac{1}{v} \right).$$

6. Les formules (10) et (11) nous montrent que, si l'on sait déterminer la trajectoire ainsi que le mouvement lorsque la loi de la force est de la forme

$$F = r f(r, \theta, v),$$

on saura encore déterminer la trajectoire et le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$F = \frac{r}{f(v, a, r)},$$

où, dans la fonction précédente f , nous avons fait l'échange entre r , θ et v . La remarque est évidente; on sait d'ailleurs que r s'exprime

en fonction de $\frac{1}{v}$ et $\frac{d\frac{1}{v}}{dx}$, d'après le numéro précédent. Si, alors, nous supposons les deux mouvements rapportés aux mêmes axes et l'origine placée au centre des forces, le second mouvement nous donnera d'abord la courbe hodographe correspondant à cette dernière force; alors, pour obtenir la trajectoire, il faudra la faire tourner d'un angle droit autour de l'origine des axes, et prendre la polaire réciproque de cette courbe par rapport au cercle dont nous avons déjà parlé.

Considérons, comme exemple, les lois de forces trouvées par MM. Darboux et Halphen (1) et qui font décrire à leurs points d'application des coniques :

$$\frac{\mu r}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\mu r}{(ax + by + c)^3}, \quad \frac{\mu r}{(ax + by)^3}.$$

On sait déterminer le mouvement ainsi que la trajectoire pour chacune de ces forces; il résulte alors de notre remarque qu'on saura encore déterminer le mouvement ainsi que la trajectoire, pour les lois de forces

$$\frac{1}{\mu} r(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{\mu} r(ax' + by' + c)^3, \quad \frac{1}{\mu} r(ax' + by')^3,$$

où x' , y' sont les dérivées de x et y , par rapport à t . Les trajectoires correspondantes seront des coniques, puisque les courbes hodographes sont aussi des coniques.

On peut se rendre compte de la nature des trajectoires décrites sous l'action de ces dernières lois de forces. Il suffit pour cela de remarquer que, quelles que soient les conditions initiales, les lois de MM. Darboux et Halphen donnent des coniques qui sont tangentes à chacune des deux droites $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, ou bien qui ont la même droite $ax + by + c = 0$ pour droite polaire par rapport au centre des forces, ou enfin qui passent toutes par

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXIV.

le centre attractif. Or, ces courbes sont les courbes hodographes correspondant aux dernières lois de forces; donc, d'après des théorèmes bien connus sur les pôles et polaires, les coniques trajectoires auront un genre indépendant des conditions initiales et dépendant du signe de $b^2 - ac$, ou bien seront des coniques ayant toutes pour centre le point dont les coordonnées homogènes sont $x=a, y=b, z=c$, ou enfin seront des paraboles.

7. La remarque du numéro précédent nous a suggéré l'idée de chercher s'il n'existe pas, outre les lois de forces classiques qu'on rencontre dans tous les Traités de Mécanique, d'autres lois de forces pour lesquelles le mouvement s'obtienne par des quadratures. En effet, outre les lois qui ne dépendent que de la position du mobile, savoir $f(r)$ et la loi de Jacobi $\frac{f(\theta)}{r^2}$, on peut encore envisager les lois

$$(12) \quad \frac{1}{r^2} f(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta + \frac{\gamma}{r}).$$

$$(13) \quad r f(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$$

où α, β et γ sont des constantes données et f une fonction arbitraire. Il est facile de voir que le mouvement peut s'obtenir par des quadratures.

La proposition est immédiate pour la première loi de force, qui rentre dans le type de Jacobi si $\gamma=0$; pour $\gamma \geq 0$, si l'on fait dans la formule de Binet le changement de fonction

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma}{r_1} - \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta,$$

on obtient l'équation différentielle de la trajectoire d'un mobile sollicité par une force centrale et ne dépendant que de la distance r_1 au centre; par conséquent le mouvement s'obtiendra par des quadratures.

La démonstration de la proposition pour la deuxième loi de force peut se faire à l'aide d'un théorème dû à M. Appell (1) et qui s'énonce ainsi :

(1) APPELL, *loc. cit.*

Toute transformation homographique, faite sur les coordonnées d'un point sollicité par une force centrale qui ne dépend que de la position du mobile, transforme le mouvement en un autre où la force transformée est également centrale et ne dépend que des coordonnées du point transformé.

Nous allons effectuer la transformation particulière

$$x = ax_1 + by_1, \quad y = a'x_1 + b'y_1, \quad ab' - ba' = 1,$$

que nous supposons seulement n'être pas équivalente à un changement des axes de coordonnées; enfin, la variable indépendante dans les deux mouvements est toujours le temps t . On trouve que la force transformée est du même type que la précédente, savoir

$$r_1 f(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2),$$

mais la transformation contient encore trois constantes arbitraires; on pourra alors disposer de ces constantes de manière à annuler le coefficient β_1 et à rendre égaux à 1 les coefficients α_1 et γ_1 ; alors la force transformée ne dépendra plus que de la distance.

Remarquons en passant qu'à l'égard des deux forces (12) et (13) on peut se proposer le problème suivant :

Sachant qu'un point matériel est sollicité par une force centrale du type (12) ou du type (13), et que la trajectoire est algébrique, trouver la fonction f .

On trouvera que les seules courbes algébriques sont des coniques et que les deux types (12) et (13) se ramènent aux lois de MM. Darboux et Halphen. En effet, le mouvement se transforme par la transformation précédente en un autre où la trajectoire est encore algébrique; de même, si l'on emploie la transformation du même numéro en posant

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma_1}{r_1} - \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta,$$

il est évident que la trajectoire transformée est encore algébrique; or, pour les deux transformations, les forces se transforment en d'autres qui ne dépendent que de la distance, et l'on sera ainsi

amené au problème énoncé et résolu par M. Kœnigs (1), qui a trouvé que les seules lois de forces sont μr et $\frac{\mu}{r^2}$.

Nous voyons en résumé que le mouvement peut toujours s'obtenir par des quadratures, lorsque les forces sont de l'une des formes

$$f(r), \quad \frac{f(\theta)}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2} f\left(a \cos \theta + b \sin \theta + \frac{c}{r}\right), \quad r f(ax^2 + 2bxy + cy^2).$$

Il résulte alors de la remarque du n° 6, que le mouvement peut encore se ramener à des quadratures si les lois de forces sont de l'une des formes

$$rf(v), \quad rv^2 f(\alpha), \quad rv^2 f\left(a \cos \alpha + b \sin \alpha + \frac{c}{v}\right), \quad rf(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2),$$

où α est l'angle de la vitesse avec l'axe polaire.

8. Les types de lois de forces que nous avons considérés jusqu'à présent et pour lesquels le mouvement s'obtenait par des quadratures étaient représentés en général par des fonctions dépendant de r , θ et v et par l'échange de v , α et r . Il est facile de remarquer qu'il y aura encore réductibilité si, l'angle de la direction de la vitesse avec le rayon vecteur étant désigné par φ , la loi de la force rentre dans le type

$$f(r, v, \varphi).$$

En effet, il suffit de partir de l'équation différentielle de la force vive et du théorème des aires mis sous la forme $rv \sin \varphi = C$, pour ramener le problème à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et à des quadratures; on remarquera alors que si la loi de la force est de la forme

$$\frac{f(\varphi)}{r^2},$$

le problème se ramène à des quadratures. Considérons en particulier la loi

$$\frac{\cot \varphi}{r^3},$$

(1) KœNIGS, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII.

qui rentre dans le type précédent; on remarque que si à cette expression on ajoute un terme de la forme $\frac{f(\theta)}{r^2}$ et que l'on considère la loi

$$\frac{K \cot \varphi}{r^2} + \frac{f(\theta)}{r^2},$$

où K est une constante arbitraire et f une fonction arbitraire, le mouvement s'obtiendra par des quadratures. En effet, on a

$$\frac{1}{r} \cot \varphi = - \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta},$$

et la formule de Binet nous donne

$$-\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \right) = - \frac{K}{r^2} \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} + \frac{f(\theta)}{r^2},$$

d'où

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} - \frac{K}{C^2} \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} + \frac{1}{r} = - \frac{K}{C^2} f(\theta),$$

équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre; on aura donc la trajectoire par des quadratures, puis le temps par une nouvelle quadrature. De l'expression précédente de la force, en s'appuyant sur la remarque du n° 6 et en ayant égard à la formule (11) du n° 5, on déduit une autre loi

$$\frac{rv^4}{K \cot \varphi + v f(\alpha)},$$

pour laquelle le mouvement s'obtiendra encore par des quadratures.

9. Nous avons montré que le mouvement est toujours transformable en un autre réciproque, si la force est centrale. Il nous reste à montrer qu'en général le mouvement est transformable en un autre réciproque, si les équations du mouvement sont de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} x'' = (ax + by)u, \\ y'' = (a'x + b'y)u, \end{cases}$$

où u est une fonction arbitraire de x, y, x', y' . On trouve, en suivant la même marche qu'au n° 2, que les deux fonctions f et φ , qui permettent d'obtenir la transformation, doivent être linéaires; de plus, le déterminant $ab' - ba'$ étant différent de zéro, les deux fonctions f et φ seront homogènes; enfin, pour que le problème soit possible, il faut en outre que le déterminant $ab' - ba'$ soit égal à 1. Si cette condition est remplie, la transformation la plus générale sera, à un facteur constant près, qu'on peut supposer égal à 1,

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = (b' + 1)x' - by' \\ y_1 = -a'x' + (a + 1)y' \end{cases} \quad \frac{dt_1}{dt} = \Delta u,$$

où Δ est le déterminant de cette transformation, qui doit être supposé différent de zéro. La condition $ab' - ba' = 1$ semble restreindre la généralité du type (1); mais il est facile de voir qu'il n'en est rien et de s'affranchir de cette condition; il suffit, si cette condition n'est pas remplie, de faire au préalable sur les équations (1) un changement convenable, et le plus simple est d'effectuer un changement linéaire sur la variable indépendante t ; les équations après ce changement seront du même type; on pourra alors profiter de la constante introduite pour que le déterminant correspondant soit égal à 1.

10. Dans un travail qui paraîtra prochainement (*Essais sur la réductibilité des équations du mouvement d'un point matériel dans un plan*), nous reviendrons en particulier sur le type (1). Nous terminerons ce travail par une dernière remarque. Le type (1) outre les forces centrales comprend aussi, comme il est évident, le cas d'une force qui fait avec le rayon vecteur un angle constant. L'analogie est complète entre les deux cas; la seule différence est que la transformation n'est pas corrélative dans le dernier cas. Afin de montrer l'analogie entre les deux cas, nous allons examiner le cas d'une force qui fait un angle constant avec le rayon vecteur, et, pour simplifier, nous supposerons que cet angle est droit; toutes les propriétés que nous déterminerons dans ce cas subsisteront pour toutes les valeurs de l'angle. Nous remarquons que pour obtenir les équations du mouvement, il suffit dans (1) de faire

$$a = 0, \quad b = -1, \quad a' = 1, \quad b' = 0,$$

ce qui nous donne

$$(3) \quad \begin{cases} x'' = -uy, \\ y'' = ux, \end{cases}$$

et d'après (2)

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = x' + y', \\ y_1 = -x' + y', \end{cases} \quad \frac{dt_1}{dt} = 2u.$$

Différentiant les relations (4) par rapport à t_1 et ayant égard à (3), on trouve

$$\begin{aligned} x'_1 &= (-y + x)u \frac{dt}{dt_1} = \frac{-y + x}{2}, \\ y'_1 &= (y + x)u \frac{dt}{dt_1} = \frac{y + x}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$(5) \quad \begin{cases} x = x'_1 + y'_1, \\ y = -x'_1 + y'_1. \end{cases}$$

Différentiant (5) par rapport à t , afin d'obtenir les composantes de la force transformée, on aura

$$\begin{aligned} x' &= (X_1 + Y_1) \frac{dt_1}{dt}, \\ y' &= (-X_1 + Y_1) \frac{dt_1}{dt}, \end{aligned}$$

d'où

$$(6) \quad X_1 = \frac{-y_1}{2u}, \quad Y_1 = \frac{x_1}{2u}.$$

Les relations (4) nous montrent que la trajectoire transformée est la courbe hodographe correspondant au mouvement donné et rapportée à un système d'axes, qui sont les bissectrices des axes auxquels le mouvement est rapporté, l'origine des axes étant la même. Les relations (5) nous montrent que la vitesse en un point de la trajectoire transformée est le rayon vecteur correspondant de la trajectoire du mouvement donné; c'est-à-dire qu'il y a échange entre r et v ; enfin si F et F_1 sont les deux forces dans les deux mouvements, on aura la relation

$$F F_1 = \frac{rv}{\lambda}.$$

Il s'ensuit que, si l'on sait déterminer le mouvement pour une

certaine loi de force, par exemple une loi de force de la forme

$$rf(x, y),$$

on saura encore déterminer le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$\frac{r}{f(x' + y', y' - x')}.$$

Remarquons enfin que l'angle que la direction de la force fait avec le rayon vecteur se conserve par la transformation; en effet, d'après (6), la force transformée a une direction perpendiculaire au rayon vecteur v de la courbe transformée.

11. Dans ce travail, nous n'avons considéré que le cas où la courbe hodographe est curviligne; on peut voir sans peine que, si la courbe hodographe est rectiligne, cas où le mouvement lui-même est rectiligne, ou bien la direction de la force est constante, le mouvement est encore transformable en un autre réciproque et cela d'une infinité de manières; ainsi, dans le cas d'un mouvement rectiligne, on peut se donner arbitrairement la fonction qui caractérise la réciprocité, puisqu'il n'y aura qu'une seule fonction et déduire de l'équation du mouvement la relation qui lie les temps t et t_1 . On pourra aussi se proposer, en ayant égard à la relation qui lie la force donnée et la force transformée, le problème suivant :

Si dans un mouvement rectiligne la loi de la force ne dépend que de la distance et de la vitesse, le mouvement est tautochrone; on demande si le mouvement transformé le sera aussi.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

TANNERY (Jules), Sous-Directeur des Etudes scientifiques à l'École Normale supérieure, et **MOLK (Jules)**, Professeur à l'Université de Nancy.
— **Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.** 4 volumes grand in-8, avec figures.

TOME I : *Introduction. Calcul différentiel* (I^{re} Partie); 1893. 7 fr. 50 c.

TOME II : *Calcul différentiel* (II^e Partie); 1896..... 9 fr.

TOME III : *Calcul intégral* (I^{re} Partie); 1898..... 8 fr. 50 c.

TOME IV : *Calcul intégral* (II^e Partie) et *Applications*; 1902.... 9 fr.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 3).

	Pages.
Comptes rendus des séances	157
[J 1 b 3] ANDRÉ (D.). — Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque	159
[O 5 n] DE MONTCHEUL. — Résolution de l'équation $dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$	170
[Q 2] AUTONNE (L.). — Sur les droites fondamentales dans les collimations de l'espace à $n - 1$ dimensions	171
[D 5 d] RÉMOUNDOS (G.). — Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes	191
[H 9 h z] GOURSAT (E.). — Sur le problème de Monge	201
[R 8 g] SUCHAR (P.-J.). — Sur une transformation réciproque en mécanique	210

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, et **GOURSAT (Edouard)**, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann**, avec une Préface de M. HERMITE. Grand in-8, avec 91 figures; 1895..... 16 fr.

GODEFROY (Maurice). — **La fonction gamma. Théorie. Histoire. Bibliographie**. Grand in-8 avec figures; 1901..... 7 fr.

GODEFROY (Maurice), Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. — **Théorie élémentaire des séries. Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma**. Avec une Préface de L. SAUVAGE, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. Un volume grand in-8 de VIII-266 pages avec figures; 1903..... 8 fr.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

S'adresser, pour la rédaction, à M. RAFFY, rue Pierre-Nicole, Paris, 5^e ;
pour la distribution, à M. GRÉVY, rue Saint-Placide, 62, Paris, 6^e.

TOME XXXIII. -- FASCICULE IV.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
A LA SORBONNE.

1908

MM. les Membres de la Société sont priés d'adresser leur cotisation à M. *Claude-Lafontaine*,
banquier, rue de Trévise, n° 32, à Paris, Trésorier de la Société.

On s'abonne et l'on trouve les Volumes déjà publiés au siège de la Société et à la Librairie
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Les séances de la Société mathématique ont lieu les premier et troisième jeudis de chaque mois à 9 heures du soir.

Depuis le 1^{er} mars 1900 les séances de la Société ont lieu dans une salle de la Faculté des Sciences (entrée place de la Sorbonne, escalier tout au bout de la galerie, deuxième étage à droite).

Les Membres de la Société ont dû recevoir une carte, portant le timbre du Secrétariat, leur donnant accès à la Bibliothèque de l'Université, et fournissant à ce sujet les renseignements nécessaires: ceux qui ne l'auraient pas reçue sont priés d'en informer le Secrétariat.

La correspondance peut être adressée, soit à la Faculté des Sciences, place de la Sorbonne, soit au domicile de l'un des secrétaires, de préférence à M. Grévy, sauf ce qui concerne la rédaction du Bulletin, qui doit être adressé de préférence à M. Raffy.

AVIS.

Dans sa séance du 2 février 1883, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société qui voudra compléter sa collection du *Bulletin* aura le droit personnel de le faire, une seule fois pour chacun des volumes publiés avant son admission, aux prix suivants :

	Le volume.
	fr
Dix volumes au moins.....	4,60
De cinq à neuf volumes.....	5,00
Moins de cinq volumes.....	6,00

Dans sa séance du 28 février 1900, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé qu'à l'avenir tout Membre de la Société, auteur d'un travail *quelconque* inséré dans le Bulletin et désirant en obtenir des tirages à part, **devra en faire la demande en retournant l'épreuve corrigée.**

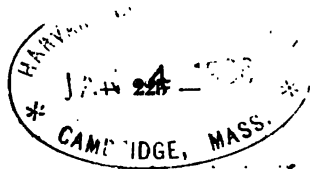
Si le nombre demandé ne dépasse pas *cinquante*, les frais du tirage à part seront faits par la Société.

Conformément à des décisions prises par le Conseil et par la Commission d'impression :

1^o Le *Bulletin*, depuis le Tome XXVII, paraît tous les trois mois;

2^o Les auteurs de tous les travaux destinés au *Bulletin* sont instamment priés d'inscrire en tête de leurs manuscrits la classification que leur assigne, d'après le sujet traité, l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*;

3^o Ils sont également invités à ne pas dépasser, autant que possible, la proportion de **une figure pour quatre pages** de texte imprimé.



COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUILLET 1903.

PRÉSIDENTE DE M. BOREL.

Communications :

M. Félix Lucas : *Sur la généralisation du rapport anharmonique.*

M. Zervos : *Sur un problème de mécanique.*

SÉANCE DU 20 JUILLET 1903.

PRÉSIDENTE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Estanave présente deux modèles de surfaces algébriques applicables sur le paraboloïde de révolution (surfaces de M. G. Darboux). Il expose le procédé par lequel il est arrivé à la réalisation de ces modèles.

M. Roche : *Sur la détermination des surfaces.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA GÉNÉRALISATION DU RAPPORT ANHARMONIQUE;

Par M. FÉLIX LUCAS.

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 22 décembre 1873, j'ai indiqué que la notion du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite peut s'étendre, de la manière suivante, au rapport anharmonique de quatre points quelconques du plan.

Désignons par z_1, z_2, z_3, z_4 les coordonnées affixes (de la forme $x + y\sqrt{-1}$) de ces quatre points relativement à un système quelconque d'axes rectangulaires et distinguons les deux groupes z_1, z_2 et z_3, z_4 . Le rapport anharmonique sera

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Il est indépendant du système d'axes rectangulaires adopté, car si l'on place une nouvelle origine au point α, β en faisant tourner d'un angle ω la direction des axes, la nouvelle valeur z' de l'affixe z d'un point quelconque est liée explicitement à celle-ci par la formule

$$z = z' e^{i\omega\sqrt{-1}} + \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Le rapport anharmonique de deux couples de points n'appartenant pas à une même ligne droite est, par conséquent, fonction seulement de la figure formée par ces quatre points.

On démontre aisément que, *pour que ce rapport soit réel, il est nécessaire et suffisant que les quatre points constituent les sommets d'un quadrilatère inscriptible.*

Pour que ce rapport prenne la valeur -1 (cas dans lequel il reçoit le nom de *rapport harmonique*), il faut et il suffit que les cordes 1, 2 et 3, 4 soient les diagonales d'un quadrilatère inscriptible et représentent deux *droites conjuguées*, c'est-à-dire que chacune d'elles doit contenir le pôle de l'autre relativement au cercle circonscrit.

Avec les systèmes de points en ligne droite et les systèmes de droites convergentes, on peut obtenir des *figures corrélatives*. La notion du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite conduit à la notion corrélatrice du rapport anharmonique de quatre droites convergentes. Désignons par A, B et C, D les deux couples de droites; on sait que leur rapport anharmonique est représenté par l'expression

$$\frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{AD}} : \frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \widehat{BD}}.$$

Il nous paraît intéressant de rechercher si l'on peut attribuer un

rapport anharmonique à quatre droites non convergentes, formant deux couples que nous désignerons par les indices 1, 2 et 3, 4.

Décrivons dans le plan une circonférence quelconque et prenons les pôles de nos droites relativement à cette courbe. Comme le rapport anharmonique de ces quatre pôles est indépendant du système d'axes rectangulaires adopté, nous pouvons, pour calculer ce rapport, placer notre origine des coordonnées au centre de la circonférence considérée. Prenons l'équation de cette circonférence

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

et celle de la première droite

$$a_1 X + b_1 Y = c_1;$$

la coordonnée affixe du pôle de cette droite est

$$z_1 = R^2 \frac{a_1 + b_1 \sqrt{-1}}{c_1}.$$

Il est à remarquer que les *coordonnées tangentielles* de la droite, relativement à nos axes rectangulaires, sont

$$R^2 \frac{a_1}{c_1} \quad \text{et} \quad R^2 \frac{b_1}{c_1};$$

par conséquent, *l'affixe cartésien du pôle de la droite ne diffère pas de l'affixe tangentiel de cette droite lorsque l'origine des coordonnées est au centre de la circonférence considérée. Il n'en est plus ainsi lorsque l'origine n'est pas au centre du cercle.*

Les valeurs des affixes z_1 , z_2 et z_3 , z_4 montrent que : *Le rapport anharmonique des pôles de quatre droites relativement à une circonférence est indépendant du rayon de cette courbe.*

Mais ce rapport anharmonique dépend de la position du centre de la circonférence relativement à laquelle on prend les pôles des quatre droites données. Transportons, en effet, la circonférence parallèlement à elle-même de manière que son centre vienne occuper le point quelconque α , β et prenons ce nouveau centre pour origine des coordonnées. L'équation de la droite deviendra

$$a_1 X + b_1 Y = -a_1 \alpha - b_1 \beta + c,$$

et l'affixe de son pôle sera

$$z_1 = R^2 \frac{a_1 + b_1 \sqrt{-1}}{-a_1 \alpha - b_1 \beta + c};$$

par conséquent le rapport anharmonique des affixes des quatre pôles dépendra de α et de β .

Il est clair que nous n'arrivons pas ainsi à généraliser complètement la notion du rapport anharmonique de quatre droites non convergentes. Nous devons nous contenter d'examiner le cas particulièrement intéressant où les quatre pôles des droites considérées ont un rapport anharmonique réel, c'est-à-dire le cas où ces quatre pôles sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible.

A cet effet, considérons quatre droites tangentes à une même circonférence et désignons par T_1, T_2 et T_3, T_4 ces deux couples de tangentes. Leurs pôles relativement à la circonférence inscrite ne diffèrent pas de leurs points de contact, dont nous pouvons désigner les affixes par z_1, z_2 et z_3, z_4 . Il suffit de construire la figure pour apercevoir la relation

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{\sin \frac{1}{2} \widehat{T_1 T_3}}{\sin \frac{1}{2} \widehat{T_2 T_3}} : \frac{\sin \frac{1}{2} \widehat{T_1 T_4}}{\sin \frac{1}{2} \widehat{T_2 T_4}}.$$

Il est clair que le second membre de cette égalité est exclusivement fonction de la figure formée par nos quatre tangentes. Il est égal au rapport anharmonique des quatre droites convergentes que l'on obtient en joignant un point quelconque de la circonférence aux quatre points de contact. On sait, d'ailleurs, que ce dernier rapport est égal au rapport anharmonique des quatre points d'intersection de nos quatre tangentes avec une cinquième tangente quelconque à la circonférence, rapport auquel M. Chasles a donné le nom de *rapport anharmonique des quatre tangentes*.

Les diverses considérations que nous avons exposées dans cette Note nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de quatre droites tangentes à une circonférence est égal :

D'une part, au rapport anharmonique des pôles de ces quatre

droites relativement à une circonférence quelconque concentrique avec la circonférence inscrite,

Et, d'autre part, au rapport anharmonique des affixes tangentiels de ces quatre droites relativement à un système quelconque d'axes rectangulaires ayant pour origine le centre de la circonférence inscrite.

Pour que les quatre droites tangentes à une même circonférence soient en rapport harmonique, il faut et il suffit que les points d'intersection ou sommets de chacun des couples T_1, T_2 et T_3, T_4 soient deux *points conjugués* relativement à la circonférence, ou, en d'autres termes, que la polaire de chacun d'eux passe par l'autre.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS DANS LA THÉORIE DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN;

Par M. E. LANDAU.

I.

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, pour $R(s) > 1$, par la série

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s};$$

on sait d'ailleurs que $(s-1)\zeta(s)$ est une fonction entière de s .

D'après l'égalité (1), $\zeta(s)$ reste finie si, la partie réelle σ de $s = \sigma + ti$ étant fixe et supérieure à 1, la partie imaginaire t devient infinie; en effet, on a toujours, pour $\sigma > 1$,

$$|\zeta(\sigma + ti)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+ti}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{\sigma+ti}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \zeta(\sigma).$$

Pour $0 < \sigma \leq 1$, domaine où $\zeta(s)$ peut être représentée par la série

$$(2) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\},$$

M. Mellin (1) a démontré le théorème suivant :

Si σ reste fixe et si t va à l'infini positif (2), on a

$$(3) \quad |\zeta(\sigma + ti)| = O(t^{1-\sigma}) \quad (3), \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma < 1,$$

$$(4) \quad |\zeta(\sigma + ti)| = O(\log t), \quad \text{pour} \quad \sigma = 1.$$

Voici d'abord une démonstration simplifiée de la formule (3) de M. Mellin (4) :

Le terme général de la somme qui figure dans l'égalité (2) étant identique à

$$-s \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}},$$

cette égalité peut s'écrire

$$(5) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^m \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\} \\ -s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}},$$

m étant un entier arbitraire dont nous disposerons bientôt; (5) se réduit à

$$(6) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^s} -s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}}.$$

Donc

$$(7) \quad |\zeta(\sigma + ti)| \leq \frac{1}{|\sigma-1+ti|} \frac{1}{(m+1)^{\sigma-1}} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^{\sigma}} + |\sigma + ti| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}.$$

(1) *Eine Formel für den Logarithmus transcenderter Funktionen von endlichem Geschlecht* (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XXIX, n° 4, 1900, p. 48-49).

(2) Il suffit, en vertu de $|\zeta(\sigma + ti)| = |\zeta(\sigma - ti)|$, de considérer les valeurs positives de t .

(3) J'entends par $O(g(t))$, comme d'habitude, une fonction de t telle que son quotient par $g(t)$ reste compris, pour $t = \infty$, entre deux limites finies.

(4) Quant à la formule (4) de M. Mellin, qui n'interviendra pas dans la suite, on en trouvera une démonstration analogue dans mes travaux : *Ueber die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyscheffschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. CXXV, 1903, p. 90) et *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beveis des Primideal-satzes* (Mathematische Annalen, t. LVI, 1903, p. 650-651).

En égalant m au plus grand nombre entier $\leq t$,

$$m = [t],$$

le second membre de (7) est, pour $0 < \sigma < 1$, de la forme

$$O\left(\frac{1}{t}\right) \cdot O(t^{1-\sigma}) + O(t^{1-\sigma}) + O(t) \cdot O\left(\frac{1}{t^\sigma}\right),$$

d'où, en vertu de (7),

$$(3) \quad |\zeta(\sigma + ti)| = O(t^{1-\sigma}), \quad \text{pour } 0 < \sigma < 1,$$

ce qui constitue le théorème de M. Mellin.

Pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, M. Mellin (1) a encore rendu plus précise l'inégalité concernant $|\zeta(\sigma + ti)|$ en tirant parti de la relation fonctionnelle de Riemann

$$(8) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s),$$

de l'inégalité

$$(9) \quad \left| \cos \frac{\pi(\sigma + ti)}{2} \right| = \left| \frac{e^{\frac{\pi}{2}(-t + \sigma i)} + e^{\frac{\pi}{2}(t - \sigma i)}}{2} \right| \leq \frac{e^{-\frac{\pi}{2}t} + e^{\frac{\pi}{2}t}}{2}$$

et du fait connu que

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma(\sigma + ti)| e^{\frac{\pi}{2}t}}{t^{\sigma - \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

(8), (9) et (10) donnent, pour σ constant,

$$\begin{aligned} |\zeta(1-\sigma-ti)| &= O\left(e^{-\frac{\pi}{2}t} t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \cdot O\left(e^{\frac{\pi}{2}t}\right) \cdot |\zeta(\sigma+ti)| \\ (11) \quad &= O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \cdot |\zeta(\sigma+ti)|, \end{aligned}$$

d'où, pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, en appliquant (3),

$$|\zeta(1-\sigma-ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \cdot O(t^{1-\sigma}) = O(\sqrt{t}),$$

(1) *Loc. cit.*, p. 49.

en d'autres termes ⁽¹⁾, pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$,

$$|\zeta(\sigma + ti)| = O(\sqrt{t}),$$

ce qui est préférable à (3).

Le résultat complet de M. Mellin relatif à la bande $0 < R(s) < 1$, le meilleur qu'on possède aujourd'hui, s'énonce donc de la façon suivante :

$$(12) \quad |\zeta(s)| = O(\sqrt{t}), \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{2},$$

$$(13) \quad |\zeta(s)| = O(t^{1-\sigma}), \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma < 1.$$

II.

L'objet principal du travail actuel est de prouver les relations

$$(14) \quad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma} \sqrt{\log t}\right), \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{2},$$

$$(15) \quad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)} \sqrt{\log t}\right), \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma < 1,$$

qui sont évidemment, pour toute valeur de σ en question, plus précises que (12) et (13).

J'y parviendrai en appliquant un théorème remarquable démontré récemment par M. Voronoï, dans un ordre d'idées tout différent.

Soient

$$T(n)$$

le nombre des diviseurs de n et

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^x T(n)$$

la fonction sommatoire; en d'autres termes, le nombre des solu-

(1) On n'a qu'à écrire $1 - \sigma$ au lieu de σ et qu'à observer que

$$|\zeta(\sigma + ti)| = |\zeta(\sigma - ti)|.$$

tions des inégalités

$$\kappa\lambda \leq x, \quad \kappa \geq 1, \quad \lambda \geq 1,$$

ou encore

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^x \left[\frac{x}{n} \right].$$

Dirichlet avait démontré que

$$(16) \quad \tau(x) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

où C désigne la constante d'Euler.

Avant M. Voronoï, personne n'avait réussi à trouver une relation plus précise que (16). M. Voronoï⁽¹⁾ est parvenu, même par une méthode élémentaire (n'appliquant pas la théorie des fonctions analytiques) à prouver que

$$(17) \quad \tau(x) = x \log x + (2C - 1)x + O(\sqrt[3]{x} \log x).$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(s) = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s).$$

C'est une fonction entière, comme on sait. En effet, le seul point douteux serait $s = 1$, et les développements dans le voisinage de $s = 1$ sont

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \dots, \\ \zeta^2(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} + (C^2 + 2C_1) + \dots, \\ \zeta'(s) &= -\frac{1}{(s-1)^2} + C_1 + \dots, \\ -2C\zeta(s) &= -\frac{2C}{s-1} - 2C^2 + \dots \end{aligned}$$

Pour $R(s) > 1$, on a

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad \zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

(¹) Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXVI, 1903, p. 241-282).

La fonction $F(s)$ est donc représentée, au moins pour $R(s) > 1$, par la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n) - \log n - 2C}{n^s};$$

en d'autres termes, on a, pour $R(s) > 1$,

$$(18) \quad F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

où

$$a_n = T(n) - \log n - 2C.$$

Cette équation (18) est, du reste, connue ⁽¹⁾. On n'a pas manqué d'observer que, en vertu de (16),

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^x a_n = \sum_{n=1}^x [T(n) - \log n - 2C] = \tau(x) - \sum_{n=1}^x \log n - 2Cx \\ &= x \log x + (2C - 1)x - x \log x + x - 2Cx + O(\sqrt{x}) = O(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence de la série (18) au moins pour $R(s) > \frac{1}{2}$, en vertu d'une propriété bien connue des séries de Dirichlet. Pareillement, le théorème (17) montre que

$$(19) \quad S(x) = \sum_{n=1}^x a_n = O(\sqrt[3]{x} \log x),$$

ce qui prouve la convergence de la série (18), au moins pour $R(s) > \frac{1}{3}$. L'égalité (18) est donc valable pour $R(s) > \frac{1}{3}$.

Examinons maintenant comment se comporte la série au second membre de (18) si, $R(s) = \sigma$ étant constant et compris entre $\frac{1}{3}$ et 1, la partie imaginaire t de s augmente indéfiniment. On a,

⁽¹⁾ Voir, par exemple, FRANEL, *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. III, 1896, p. 103, ou KRONECKER, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, t. I, Leipzig, 1901, p. 349-351.

pour m quelconque,

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{T(n) - \log n - 2C}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \frac{S(m)}{(m+1)^s} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{T(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^m \frac{\log n}{n^s} - 2C \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^{s+1}} - \frac{S(m)}{(m+1)^s}, \\ |F(s)| &\leq \sum_{n=1}^m \frac{T(n)}{n^\sigma} + \sum_{n=1}^m \frac{\log n}{n^\sigma} + 2C \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^\sigma} + \sqrt{\sigma^2 + t^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} |S(n)| \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{|S(m)|}{(m+1)^\sigma}. \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer au second membre les relations

$$\sum_{n=1}^m \frac{T(n)}{n^\sigma} = O(m^{1-\sigma} \log m) \quad (1),$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{\log n}{n^\sigma} = O(m^{1-\sigma} \log m),$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^\sigma} = O(m^{1-\sigma}),$$

$$|S(n)| < A \sqrt[3]{n} \log n \quad (\text{pour } n \geq 2) \quad (2);$$

nous obtiendrons, en posant $m = \left[t^{\frac{3}{2}} \right]$,

$$\begin{aligned} |F(s)| &= O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right) + O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right) + O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\right) \\ &\quad + O(t) \cdot O \sum_{n=\left[t^{\frac{3}{2}} \right]+1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{2}{3}+\sigma}} + O\left(\frac{\sqrt[3]{t^{\frac{3}{2}} \log t}}{t^{\frac{2}{3}\sigma}}\right) \\ &= O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right) + O(t) \cdot O\left(t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sigma\right)} \log t\right) + O\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sigma \log t\right) \\ &= O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right). \end{aligned}$$

(1) Voir, par exemple, le Mémoire de M. Voronoï, p. 281.

(2) A désigne une constante absolue. Cette inégalité n'est autre chose que (19).

Or, on a

$$F(s) = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s);$$

donc, pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} |\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)| &= O\left(t^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} \log t\right), \\ |\zeta^2(s)| &= |-\zeta'(s) + 2C\zeta(s) + \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)|, \\ (20) \quad &\leq |\zeta'(s)| + 2C|\zeta(s)| + O\left(t^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} \log t\right). \end{aligned}$$

Dans (20), le terme $2C|\zeta(s)|$ peut être négligé vis-à-vis du dernier terme $O\left(t^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} \log t\right)$, en vertu du théorème (3) de M. Mellin

$$|\zeta(s)| = O(t^{1-\sigma}).$$

Quant à $|\zeta'(s)|$, on peut traiter cette expression par la méthode appliquée plus haut à $|\zeta(s)|$. On a, en différentiant (6), pour $R(s) > 0$,

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= -\frac{1}{(s-1)^2} \frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^s} \\ &\quad - \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u du}{(n+u)^{s+1}} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u)}{(n+u)^{s+1}} du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\zeta'(\sigma + ti)| &\leq \frac{1}{|\sigma-1+ti|^2} \frac{1}{(m+1)^{\sigma-1}} + \frac{1}{|\sigma-1+ti|} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{\sigma-1}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^{\sigma}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}} + |\sigma+ti| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n^{1+\sigma}}, \end{aligned}$$

d'où, pour $m = [t]$, en supposant $0 < \sigma < 1$ ⁽¹⁾,

$$\begin{aligned} |\zeta'(s)| &= O\left(\frac{1}{t^2} t^{1-\sigma}\right) + O\left(\frac{1}{t} \log t \cdot t^{1-\sigma}\right) \\ &\quad + O(t^{1-\sigma} \log t) + O(t^{-\sigma}) + O(t \log t \cdot t^{-\sigma}) = O(t^{1-\sigma} \log t), \end{aligned}$$

quantité négligeable vis-à-vis du dernier terme de l'inégalité (20).

⁽¹⁾ Pour notre objet, il s'agit seulement des valeurs de σ comprises entre $\frac{1}{3}$ et 1.

Cette inégalité se réduit donc à

$$\begin{aligned} |\zeta^2(s)| &= O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right), \\ (21) \quad |\zeta(s)| &= O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \sqrt{\log t}\right). \end{aligned}$$

Cette relation (21) vient d'être démontrée pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$.

Pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$, on peut conclure de (20) et de

$$(11) \quad |\zeta(1-\sigma-ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \cdot |\zeta(\sigma+ti)|$$

que

$$|\zeta(1-\sigma-ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \sqrt{\log t}\right) = O\left(t^{\frac{1}{2}(1+\sigma)} \sqrt{\log t}\right);$$

donc, en remplaçant σ par $1-\sigma$, pour $0 < \sigma < \frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma-ti)| &= |\zeta(\sigma+ti)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma} \sqrt{\log t}\right), \\ (22) \quad |\zeta(s)| &= O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma} \sqrt{\log t}\right). \end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{2}{3}$, les deux formules (21) et (22) sont valables; on voit aisément que, pour $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{2}{3}$, la première est la plus précise et que, pour $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{1}{2}$, c'est la seconde.

J'arrive donc au résultat final

$$(14) \quad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma} \sqrt{\log t}\right), \quad \text{pour} \quad 0 < \sigma \leq \frac{1}{2},$$

$$(15) \quad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \sqrt{\log t}\right), \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma < 1,$$

annoncé au commencement de ce paragraphe.

III.

Je viens de démontrer un nouveau théorème sur la fonction $\zeta(s)$, en appliquant un théorème de la théorie élémentaire des fonctions numériques. Dans un but inverse, je vais maintenant préciser une formule connue de la théorie élémentaire des fonctions numériques en me servant de certaines propriétés analytiques de la fonction $\zeta(s)$ trouvées il y a quelques années.

Voici la formule connue ⁽¹⁾ dont il s'agit :

$$(23) \quad Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}),$$

où $Q(x)$ désigne le nombre des nombres $\leq x$ qui ne sont divisibles par aucun carré > 1 , en d'autres termes, qui ne contiennent chacun de leurs facteurs premiers qu'à la première puissance. On peut aussi définir $Q(x)$ par la somme

$$Q(x) = \sum_{n=1}^x |\mu(n)|^2,$$

où $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius. La relation (23) se démontre, comme on sait, facilement au moyen de l'identité connue

$$(24) \quad Q(x) = \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2} \right];$$

en effet, on tire de (24)

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n) \left(\frac{x}{n^2} - \theta_{n,x} \right),$$

où

$$0 \leq \theta_{n,x} < 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} Q(x) &= x \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n) \theta_{n,x} \\ &= x \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(\sqrt{x}) \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} - x \sum_{n=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{6}{\pi^2} x + O \left(x \sum_{n=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

(¹) Voir, par exemple, GEGENBAUER, *Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie* (Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in

Le quotient

$$(25) \quad \frac{Q(x) - \frac{6}{\pi^2}x}{\sqrt{x}}$$

reste donc compris, pour tous les $x \geq 1$, entre deux limites finies. Je prouverai dans ce qui suit que le quotient (25) tend, pour $x = \infty$, vers la limite 0 ⁽¹⁾.

Pour cela, j'appliquerai le théorème suivant, que j'ai déduit ⁽²⁾, il y a quelques années, des recherches modernes sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann :

$$(26) \quad M(x) = \sum_{n=1}^x \mu(n) = O\left(\frac{x}{\log x \log \log x}\right).$$

On a ⁽³⁾

$$(27) \quad Q(x) = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2} \right] = \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} - 1} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2} \right] + \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2} \right].$$

Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, t. XLIX, 1885, p. 47); et BERGER, *Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres* (*Nova Acta regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis*, 3^e série, t. XIV, 1887, p. 110).

⁽¹⁾ J'ai déjà fait allusion à ce théorème, sans entrer dans les détails, dans mon Mémoire *Ueber die zahlentheoretische Function $\mu(k)$* (*Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien*, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, t. CXII, II^a, 1903, p. 562, note 3).

⁽²⁾ *Ueber die asymptotischen Werte einiger zahlentheoretischer Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. LIV, 1901, p. 585). Dans mon Mémoire cité dans la note précédente, j'ai démontré un théorème beaucoup plus précis; mais il me paraît intéressant de constater que la relation (26) suffit pour le but actuel. On peut aussi aborder le problème directement en appliquant à la fonction génératrice

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(n) - Q(n-1)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

les théorèmes sur la fonction $\zeta(s)$.

⁽³⁾ Pour simplifier, j'écris les limites de sommation sans le signe []. Une somme étendue de a à b doit signifier que la variable parcourt les valeurs entières de $[a]$ à $[b]$.

Dans (27), on a d'abord

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} - 1} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} - 1} \mu(n) \left(\frac{x}{n^2} - \theta_{n,x} \right) = x \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} - 1} \frac{\mu(n)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right) \\
 &= \frac{6}{\pi^2} x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right) \\
 &= \frac{6}{\pi^2} x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right) \\
 &= \frac{6}{\pi^2} x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\infty} M(n) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
 &\quad + x \frac{M\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right] - 1\right)}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right]^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right) \\
 &= \frac{6}{\pi^2} x + x O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\infty} \frac{n}{\log n \log \log n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
 &\quad + x O \left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x \cdot \log x \cdot \log \log x} \cdot \frac{(\log \log x)^2}{x} \right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right) \\
 &= \frac{6}{\pi^2} x + x O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right) \\
 &= \frac{6}{\pi^2} x + x O\left(\frac{\log \log x}{\sqrt{x} \cdot \log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right) \\
 (28) \quad &= \frac{6}{\pi^2} x + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}\right).
 \end{aligned}$$

La dernière somme qui figure dans l'équation (27) est

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\sqrt{x}} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2} \right] &= \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\sqrt{x}} \{M(n) - M(n-1)\} \left[\frac{x}{n^2} \right] \\
 &= \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\sqrt{x}} M(n) \left(\left[\frac{x}{n^2} \right] - \left[\frac{x}{(n+1)^2} \right] \right) \\
 &\quad - M \left(\left[\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} \right] - 1 \right) \left[\frac{x}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} \right]^2} \right] \\
 &= O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\sqrt{x}} \frac{n}{\log n \log \log n} \left(\left[\frac{x}{n^2} \right] - \left[\frac{x}{(n+1)^2} \right] \right) \\
 &\quad + O \left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x \cdot \log x \cdot \log \log x} (\log \log x)^2 \right) \\
 &= O \frac{\sqrt{x}}{\log x \log \log x} \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log \log x}}^{\sqrt{x}} \left(\left[\frac{x}{n^2} \right] - \left[\frac{x}{(n+1)^2} \right] \right) + O \left(\frac{\sqrt{x}}{\log x} \right) \\
 &= O \frac{\sqrt{x}}{\log x \log \log x} \cdot \left[\frac{x}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} \right]^2} \right] + O \left(\frac{\sqrt{x}}{\log x} \right) \\
 &= O \left(\frac{\sqrt{x} \log \log x}{\log x} \right) + O \left(\frac{\sqrt{x}}{\log x} \right) \\
 (29) \quad &= O \left(\frac{\sqrt{x} \log \log x}{\log x} \right).
 \end{aligned}$$

En combinant (27), (28) et (29), on obtient finalement

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O \left(\frac{\sqrt{x}}{\log \log x} \right),$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x) - \frac{6}{\pi^2} x}{\sqrt{x}} = 0.$$

C. Q. F. D.

SUR CERTAINS GROUPES D'ORDRE $p^m q^n$;

Par M. J. DE SÉGUIER.

Dans la recherche des groupes d'ordre $p^m q^n$ (p, q premiers) pour les premières valeurs de m et de n , un cas s'impose de suite à l'attention : c'est celui où le groupe considéré G contient normalement un g_{p^m} abélien principal ⁽¹⁾ A , aucun $e_{(q^n)}$ n'étant permutable à tout élément de A .

C'est ce cas et un autre cas voisin que je vais considérer.

1. B étant un g_{q^n} quelconque de G , on a $G = AB$, et comme B divise ici le groupe $L(m, p)$ des isomorphismes de A ⁽²⁾, G divise l'holomorphe K de A . Je supposerai K, L , et B pris sous la forme de groupes concrets de substitutions linéaires, en sorte que G est complètement déterminé par B (tout système de générateurs réels de B joint à une base de A forme un système de générateurs de G sur lequel on lit les équations du groupe). Soient $\mathfrak{B}$ un système de générateurs de B , $(\mathfrak{B})$ l'ensemble des conjugués de $\mathfrak{B}$ dans L ; $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \dots$, des systèmes de générateurs de B non conjugués dans L . J'appellerai l'ensemble $(\mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}') + \dots$ la *catégorie* des systèmes des générateurs de B . Si $\mathfrak{B}$ parcourt un système de *représentants* des catégories des divers g_{q^n} de L , $\{A, \mathfrak{B}\}$ fournira tous les types cherchés chacun une fois, car deux g_{q^n} distincts de L ne peuvent être formés des mêmes isomorphismes de A avec lui-même.

On remarquera que, l'ordre de B étant premier à p , la forme canonique d'un élément quelconque de B est complètement déterminée par la fonction caractéristique de cet élément.

⁽¹⁾ Je me servirai de la même terminologie et des mêmes notations que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), auxquels je renverrai par la lettre E .

⁽²⁾ Cf. HÖLDER, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 325. Le groupe $L(m, p)$ est le groupe des substitutions linéaires (mod p) à m variables. Sur ce point et sur la définition de l'holomorphe, voir MOORE, *S. M. A.*, t. II, 1895, p. 33; HÖLDER, *loc. cit.*, ou BURNSIDE, *Theory of groups*, p. 243, 228.

2. Soit désormais $B = \{b\}$ cyclique. On sait construire *a priori* toutes les formes canoniques de b . Cherchons les b^β ayant même forme canonique que b . Si $(b) = (b^\beta)$ (β est alors premier à q), on a évidemment $(b^x) = (b^{\beta x})$. Si donc $(b) = (b^\beta) = (b^{\beta'})$, on a $(b) = (b^{\beta\beta'})$. Donc $\beta, \beta', \dots$ forment un groupe B_0 qui divise le $g_{\varphi(q^n)}$ engendré par une racine primitive α de q^n . B_0 est donc cyclique; soit $B_0 = \{\beta\}$. $(B_0, 1) = \delta$ est l'ordre de $\beta \bmod q^n$. $(b^x), (b^{\beta x}), \dots, (b^{\beta^{x-1}x})$ coïncidant quel que soit x , les $\varphi(q^n)$ classes (b^x) où x est premier à q coïncident δ à δ et les $\frac{\varphi(q^n)}{\delta}$ classes distinctes se réunissent en une catégorie. Supposons que q^{n-i} soit diviseur propre de $p^{r_i} - 1$ ($i = 0, \dots, n; r_0 = r$). Les facteurs irréductibles de la fonction caractéristique Δ_b de b appartiendront chacun à un des q^{n-i} . Soit ρ_i le nombre des facteurs irréductibles appartenant à l'exposant q^{n-i} (ils sont tous de degré r_i), ρ_{is} le nombre de ceux qui sont de multiplicité s que je désignerai par $P_{is1}, \dots, P_{is\rho_i}$. $\rho_0 = \rho$ sera ≥ 1 et $\rho_n = m - \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i r_i$ est le nombre des facteurs linéaires de racine 1. Si ξ est une racine de P_{it} et ξ' de $P_{it'}$ ($t' \neq t$), ξ^x sera, pour x premier à q , de même ordre que ξ et distinct de ξ'^x , car, si $xx' \equiv 1 \bmod q^n$, l'égalité $\xi^x \equiv \xi'^x$ (je sous-entendrai toujours le module p) élevée à la puissance x' donnera $\xi \equiv \xi'$. Les nombres r_i, ρ_i sont donc les mêmes pour b^x que pour b , et l'on pourra dire que $G, b, (b), \Delta_b, B$ appartiennent à la répartition $(\rho_{01}, \rho_{02}, \dots; \rho_{11}, \rho_{12}, \dots)$ (lorsque les ρ_{is} seront donnés, je supprimerai dans la parenthèse ceux qui sont tous nuls à partir d'un certain rang).

B_0 étant formé de tous les $x \bmod q^n$ tels que $(b^x) = (b)$ ou $\Delta_{b^x} = \Delta_b$, à chaque x de B_0 répondra une substitution (z, z^x) des racines z de Δ_b . Donc B_0 est isomorphe au groupe $B_1 = \{(z, z^\beta)\}$ et l'on peut définir β et δ par la condition que (z, z^β) soit une substitution d'ordre maximum δ conservant Δ_b . Je dirai que δ est l'indice de Δ_b . Si z appartient à l'exposant q^{n-i} , le cycle de (z, z^β) où il figure est $(z, z^\beta, \dots, z^{\beta^{\delta_i-1}})$, δ_i étant l'exposant auquel appartient $\beta \bmod q^{n-i}$ [δ_i divise δ_{i-1} et $\delta_0 = \delta$ divise $\varphi(q^n)$]. Si β^{ω_i} est la première puissance de β qui soit congrue $\bmod q^{n-i}$ à une puissance de p , (z, z^β) permute $P_{is1}, \dots, P_{is\rho_i}$ par cycles de ω_i ; donc ω_i divise ρ_{is} , ρ_{is} divise δ_i , et le plus petit commun multiple ω des ω_i divise celui des ρ_{is} et celui δ des δ_i . β^ω est la première puissance

de β congrue mod q^n à une puissance de p , et $(z, z^\beta)^\omega$ est la première puissance de (z, z^β) qui ne permute pas les $P_{i\omega}$. Donc $(z, z^\beta)^{\omega r} = 1$ et δ divise ωr . On remarquera que B_i devant contenir $\{(z, z^p)\}$, δ est multiple de r . Si $\delta = kr$, $(z, z^\beta)^k$ est d'ordre r ; donc β^k est d'ordre $r \bmod q^n$ et est par suite une puissance de p (B_i n'a qu'un diviseur d'ordre r qui est $\{(z, z^p)\}$). Donc k est multiple de ω et $\delta = \omega r$.

Soit n_δ le nombre des fonctions caractéristiques d'indice δ répondant à une répartition $(p_{01}, \dots)$. Le nombre $N_{p_{01}, \dots}$ des types de G répondant à la répartition sera $\sum_\delta \frac{\delta n_\delta}{\varphi(q^n)}$.

3. En particulier la répartition (1) donne lieu à $\frac{\varphi(q^n)}{r}$ fonctions caractéristiques. Si $r > 1$, on peut supposer β est, pour chacune d'elles, $\equiv p \bmod q^n$, et comme p est d'ordre $r \bmod q^n$, on a $\delta = r$, d'où $N_i = 1$. Soit donc θ d'ordre q^n dans C_{p^r} et $\theta^r = \sum_0^{r-1} \alpha_i \theta^i$. Si $n = 1$,

$$\alpha_0 = (-1)^{r-1} \theta^{\sum_0^{r-1} p^i} = (-1)^{r-1}$$

(q , diviseur propre de $p^r - 1$, divise $\sum_0^{r-1} p^i$). La forme canonique générale de b répondant à la répartition (1) est

$$|y'_i = \theta^{p^i} y_i; y'_j = y_j| \quad (i = 0, \dots, r-1; j = r, \dots, m-1);$$

y_i est une fonction des variables réelles à coefficients dans C_{p^r} , y_j une fonction des variables réelles à coefficients dans C_p . Si $y_i = \sum_0^{r-1} \theta^{ip^i} x_k$, $y_j = x_j$, la forme canonique réelle qui s'obtient en prenant les x pour variables est

$$b = |x'_0 = \alpha_0 x_{r-1}, x'_i = x_{i-1} + \alpha_i x_{r-1}, x'_j = x_j| \\ (i = 1, \dots, r-1; j = r, \dots, m-1).$$

Les substitutions

$$a_k = |x'_k = x_k + 1, x'_i = x_i| \quad (i, k = 0, \dots, m-1; i \neq k)$$

engendrent A , et les équations de G s'obtiennent en adjoignant à celles de A

$$bq^n = 1, \quad b^{-1} a_h b = a_{h+1} \quad (h = 0, \dots, r-2), \\ b^{-1} a_{r-1} b = \Pi_0^{r-1} a_i^{p^i}, \quad b^{-1} a_k b = a_k \quad (k = r, \dots, m-1).$$

Comme ces équations sont vérifiées par des substitutions engendrant effectivement un $g_{p^m q^n}$, on est assuré *a priori* qu'elles définissent bien un $g_{p^m q^n}$ (E., 18). Il est clair que $\{b\}$ n'est primaire ⁽¹⁾ que si $r = m$, et le groupe G correspondant divise le $g_{p^m(p^m-1)}$ de Mathieu. On voit d'ailleurs que, pour la répartition (1) ($r < m$), G est le produit direct d'un diviseur du $g_{p^r(p^r-1)}$ de Mathieu par un groupe abélien principal. Ces résultats complètent ceux obtenus par MM. Miller et Moreno sur les groupes dont tous les diviseurs sont abéliens (*Transact. of the Am. math. Soc.*, t. IV, 1903, p. 398).

4. Soit $n = 1$ et $p = 2$. Considérons d'abord la répartition (2). Elle donne lieu à $\frac{1}{2} \frac{q-1}{r} \left(\frac{q-1}{r} - 1 \right)$ fonctions caractéristiques de la forme $\Delta_k = PP'$, P et P' étant distincts, irréductibles, de degré r. Si $r > 1$, q est ici > 2 . Si $r = 1$ et $q = 2$, le nombre des fonctions caractéristiques est 1 et il n'y a qu'un type dont on trouvera les équations au n° 5. Soit donc $q > 2$ et $p \equiv g^\pi \pmod{q}$, g étant une racine primitive de $q \left(\pi = \frac{q-1}{r} \right)$. On sait *a priori* que $\delta = r$ ou $2r$. Cherchons dans quel cas $\delta = 2r$. Alors β^2 est de la forme $g^{\pi\tau}$, τ étant premier à r et pris mod r. π ne peut pas être impair, car r et τ seraient pairs et $\beta \equiv \pm p^{\frac{\tau}{2}}$ serait une puissance de p $\left(-1 \equiv p^{\frac{\tau}{2}} \pmod{q} \right)$. Soit donc $\pi = 2\pi'$ et d'abord r pair $= 2r'$. Alors $-1 \equiv p^{r'} \pmod{q}$ et les racines de tout polynome P ou P' sont deux à deux inverses l'une de l'autre. De plus τ est impair, sans quoi $\beta = p^{\frac{\tau}{2}}$ serait une puissance de p. En remplaçant au besoin β par β^{τ_1} ($\tau\tau_1 \equiv 1 \pmod{r}$) on peut supposer que $\beta^2 \equiv g^\pi$ et que $\beta \equiv g^{\pi'}$. Alors (z, z^β) est bien d'ordre $2r$ et pour chaque P il y a un seul P' ayant les racines z^β , c'est-à-dire que PP' a $\frac{q-1}{2r} = \frac{\pi}{2}$ déterminations pour lesquelles $\delta = 2r$. Soit maintenant r impair. En changeant au besoin τ en $\tau + r$, on peut supposer τ pair $= 2\tau'$. Alors $\beta \equiv -p^{\tau'}$, P' est déterminé par la condition que ses racines

(1) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 110.

soient les inverses de celles de P et il y a encore $\frac{\pi}{2}$ fonctions PP' telles que $\delta = 2r$. Donc si p est non carré mod q (alors π est impair donc r pair), $\delta = r$; $n_r = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1)$; $N_2 = \frac{q-r-1}{2r}$.

Si p est carré mod q (alors π est pair), $\delta = r$ ou $2r$; $n_{2r} = \frac{\pi}{2}$, $n_r = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} - \pi$; $N_2 = \frac{q-1}{2r}$.

Soit par exemple $r = 1$. En remplaçant au besoin b par une de ses puissances, on peut toujours représenter la catégorie de b par

$$b_\lambda = |x'_0 = ax_0, x'_1 = a^\lambda x_1, x'_i = x_i| \quad (i = 2, \dots, m-1; \lambda \not\equiv 1 \pmod{q}),$$

α étant une racine primitive arbitraire de $\alpha^q \equiv 1$. Les $\frac{q-1}{2}$ types s'obtiennent alors en faisant parcourir à λ un système de valeurs $\not\equiv 1 \pmod{q}$ dont aucune ne soit inverse d'une autre mod q ; car, pour que b_λ et $b_{\lambda'}$ appartiennent à la même catégorie, c'est-à-dire pour que $b_{\lambda'}^u$ soit conjuguée de b_λ dans $L(m, p)$, il faut et suffit (si $\lambda \not\equiv \lambda' \pmod{q}$) que $\alpha^u \equiv \alpha^\lambda$, $\alpha^{u\lambda} \equiv \alpha$ ou que $\lambda\lambda' \equiv 1 \pmod{q}$. De là les types

$$a_i^p = b_i^q = 1, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad b^{-1} a_0 b = a_0^2, \quad b^{-1} a_1 b = a_1^{\lambda}, \quad b^{-1} a_h b = a_h; \\ (i, j = 0, \dots, m-1; h = 2, \dots, m-1).$$

La répartition $(0, 1)$ donne de suite $N_{0,1} = 1$. Les équations du type correspondant se déduisent des précédentes en y faisant $\lambda = 1$.

§. Considérons pour $r = 1$ la répartition $(\rho_{01}, \dots, \rho_{0v})$. n_δ ne sera $\neq 0$ que si : 1° δ divise $\rho_{01} = h_1 \delta, \dots, \rho_{0v} = h_v \delta$ et $\varphi(q^n) = Q = K \delta$; 2° on peut ranger $\Sigma \rho_{0s} = \rho_0 = p$ des Q nombres z appartenant à l'exposant q^n en séries de δ termes, la $i^{\text{ème}}$ étant $z_i, z_i^\delta, \dots, z_i^{p^{\delta-1}}$. Alors on pourra prendre pour les $\rho_{01}, P_{01},$ les racines de h_1 quelconques de ces séries, puis pour les $\rho_{02}, P_{02},$ celles de h_2 quelconques des séries restantes, etc. Le nombre

$$\binom{K}{h_1} \binom{K-h_1}{h_2} \dots = \frac{K!}{h_1! h_2! \dots}$$

des déterminations de Δ_b ainsi obtenues, est $\geq n_\delta$ (car on peut seulement affirmer que ces Δ_b ont pour indice un multiple de δ); il est égal à δ si δ est le plus grand commun diviseur des ρ_{0s} et

de Q ; si ce plus grand commun diviseur d est premier, δ prend les seules valeurs 1, d , et $n_1 = \frac{Q!}{\rho_{01}! \rho_{02}! \dots} - n_d$.

A chaque choix des z_i répondent une forme canonique de b et des équations de G qui s'écrivent immédiatement. Mais il est plus simple encore de former à la fois tous les types répondant à une valeur de ρ . La forme canonique générale correspondante de b est $|x'_i = \theta_i x_i, x'_j = x_j|$ ($i = 0, \dots, \rho - 1; j = \rho, \dots, m - 1; \theta_i \not\equiv 1$). Les types de G qu'elle déterminé sont

$$a_h^p = b^{q^n} = 1, \quad a_h a_k = a_k a_h, \quad b^{-1} a_i b = a_i^{\theta_i}, \quad b^{-1} a_j b = a_j \\ (h, k = 0, \dots, m - 1; i = 0, \dots, \rho - 1; j = \rho, \dots, m - 1).$$

On peut prendre $\theta_i = \alpha^{\lambda_i}$ ($\not\equiv 1$), α étant une racine primitive arbitraire de $\alpha^{q^n} \equiv 1$, $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{\rho-1}$ parcourant des valeurs telles que, dans deux des systèmes $\alpha, \alpha^{\lambda_1}, \dots, \alpha^{\lambda_{\rho-1}}$, les exposants n'aient jamais de valeurs proportionnelles mod q^n , quel que soit l'ordre où l'on prend les α^{λ_i} .

6. Cherchons enfin les $g_{p^n q^n} G$ ayant un g_{p^n} normal A de figure (1) (11...1) et un g_{q^n} cyclique, lorsque G/D (D étant le central de A) répond à la répartition (1) pour $r = m - 1$.

m étant impair ($E.$, 143), soit $m = 2v + 1$. G aura des équations de la forme ($E.$, 144, 145)

$$a^p = j^{q^n} = 1, \quad c_i^p = a^{\epsilon}, \quad d_i^p = a^{\eta}, \quad c_h^p = d_h^p = 1 \quad (h = 2, \dots, v), \\ c_i c_k = c_k c_i, \quad d_i d_k = d_k d_i, \quad c_i d_k = d_k c_i, \quad c_i^{-1} d_i c_i = d_i a \\ (i, k = 1, \dots, v; i \neq k),$$

$$j^{-1} a j = a^{\xi}, \quad j^{-1} c_i j = a^{\lambda_i} \Pi_l c_l^{\alpha_{li}} d_l^{\beta_{li}}, \quad j^{-1} d_i j = a^{\mu_i} \Pi_l c_l^{\gamma_{li}} d_l^{\delta_{li}}; \\ \text{si } p > 2, \quad \epsilon = 0, 1, \quad \eta = 0; \quad \text{si } p = 2, \quad \epsilon = \eta = 0, 1,$$

les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfaisant aux conditions suivantes :

ξ et le déterminant Δ des $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont $\not\equiv 0$,

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma_j (\alpha_{ji} \delta_{jk} - \beta_{ji} \gamma_{jk}) \equiv 0 \text{ si } i \neq k, & \equiv \xi \text{ si } i = k, \\ \Sigma_j (\gamma_{ji} \delta_{jk} - \beta_{ji} \alpha_{jk}) \equiv \Sigma_j (\gamma_{ji} \delta_{jk} - \delta_{ji} \gamma_{jk}) \equiv 0, \end{cases} \quad i, j, k = 1, \dots, v.$$

et, en observant que $\Pi_l c_l^{\alpha_{li}} d_l^{\beta_{li}}$ par exemple est égal à

$$a^{\frac{n(n-1)}{2} \Sigma_k \alpha_k \beta_k} \Pi_k c_k^{\alpha_k} d_k^{\beta_k}.$$

et que, si $p = 2$, tout nombre x est $\equiv x^2$,

$$(2) \quad \text{si } p > 2 \text{ et } \varepsilon = 1, \quad \alpha_{11} \equiv \xi, \quad \alpha_{1h} \equiv 0, \quad \gamma_{1i} \equiv 0, \quad h > 1, \quad i \geq 1,$$

$$(3) \quad \text{si } p = 2, \quad \Sigma_k \alpha_{ki} \beta_{ki} + \varepsilon(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2) \equiv \Sigma_k \gamma_{ki} \delta_{ki} + \varepsilon(\gamma_{1i}^2 + \delta_{1i}^2) \equiv \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Ce sont les conditions d'automorphisme, etc. (E., 19). Un calcul direct montre que, d'après (1), $\Delta^2 \equiv \xi^{2v}$.

7. Pour l'intelligence de ce qui va suivre je présenterai d'abord sous une forme particulière des résultats dus à M. Jordan (*Traité des substitutions*).

Remplaçons un instant l'équation $j^n = 1$ par $j^m = 1$ et considérons j comme un isomorphisme de A avec lui-même, remplaçant

$$a \text{ par } a^k = a', \quad c_i \text{ par } a^{\lambda_i} \Pi_i c_i^{\alpha_i} d_i^{\beta_i} = a^{\lambda_i} c_i', \\ d_i \text{ par } a^{\mu_i} \Pi_i c_i^{\gamma_i} d_i^{\delta_i} = a^{\mu_i} d_i'.$$

On aura les équations de $\{A, j\}$. Or le groupe des substitutions $|Dc_i, Dd_i; Dc'_i, Dd'_i|$ ($D = |a|$) qui représente l'action du groupe J des isomorphismes de G sur $G|D$ est le groupe H des isomorphismes contragrédients de G (HÖLDER, BURNSIDE, *loc. cit.*) et divise le groupe $L(2v, p)$ des isomorphismes de $G|D$. $G|D$ est isomorphe au groupe $\mathcal{C}$ des substitutions $|x_i, y_k; x_i + g_i, y_k + h_k|$ et H à celui $\mathcal{J}$ des substitutions

$$(4) \quad s = |x_i, y_i; \Sigma_k (\alpha_{ik} x_k + \gamma_{ik} y_k), \Sigma_k (\beta_{ik} x_k + \delta_{ik} y_k)|.$$

Un calcul direct montre d'après (1) que

$$s' = |x_i, y_i; \Sigma_k (\alpha'_{ik} x_k + \gamma'_{ik} y_k), \Sigma_k (\beta'_{ik} x_k + \delta'_{ik} y_k)|$$

vérifie $ss' = 1$ toujours et seulement si $\xi \alpha'_{ik} = \delta_{ki}$, $\xi \gamma'_{ik} = -\gamma_{ki}$, $\xi \beta'_{ik} = -\beta_{ki}$, $\xi \delta'_{ik} = \alpha_{ki}$. Les conditions (1), (2), (3) écrites pour s^{-1} donnent donc les conditions suivantes respectivement équivalentes en vertu de (1) :

$$(1') \quad \begin{cases} \Sigma_j (\alpha_{ij} \delta_{kj} - \beta_{ij} \gamma_{kj}) \equiv 0 & \text{si } i \neq k, & \equiv \xi & \text{si } i = k, \\ \Sigma_j (\alpha_{ij} \beta_{kj} - \beta_{ij} \alpha_{kj}) \equiv \Sigma_j (\delta_{ij} \delta_{kj} - \delta_{ij} \gamma_{kj}) \equiv 0, & i, j, k = 1, \dots, v, \end{cases}$$

$$(2') \quad \text{si } p > 2 \text{ et } \varepsilon = 1, \quad \delta_{11} \equiv \xi^2, \quad \delta_{h1} \equiv 0, \quad \gamma_{1i} \equiv 0, \quad h > 1, \quad i \geq 1,$$

$$(3') \quad \text{si } p = 2, \quad \Sigma_k \gamma_{ik} \delta_{ik} + \varepsilon(\beta_{1i}^2 + \delta_{1i}^2) \equiv \Sigma_k \alpha_{ik} \gamma_{ik} + \varepsilon(\alpha_{1i}^2 + \gamma_{1i}^2) \equiv \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Comme (1') donne, d'après (2), $\delta_{11} \equiv 1$, (2') montre que $\xi^2 \equiv 1$ (lorsque p est $> r$ et $\epsilon = 1$). La condition (1) ou (1') qui dérive des équations de A est nécessaire et suffisante pour que l'exposant $F = \sum_i (X_i y_i - Y_i x_i)$ de a dans l'un des commutateurs de $\Pi_i c_i^{r_i} d_i^{r_i}$, $\Pi_i c_i^{r_i} d_i^{r_i}$ garde sa forme (mod p) au facteur ξ près lorsqu'on lui applique la substitution s (opérant sur les X_i, Y_i comme sur les x_i, y_i). Si s multiplie F par ξ , s^{-1} multiplie F par ξ^{-1} . Si $p > 2$, (2) ou (2') qui dérive des équations de A est la condition nécessaire et suffisante pour que le carré x_i^2 de l'exposant de a dans $(\Pi_i c_i^{r_i} d_i^{r_i})^p$ garde sa forme (mod p): si $p = 2$, (3) ou (3') est nécessaire et suffisante pour que l'exposant $\sum_i x_i y_i + \epsilon(x_i^2 + y_i^2)$ de a dans $(\Pi_i c_i^{r_i} d_i^{r_i})^2$ garde sa forme (mod 2).

On voit donc que les substitutions s vérifient (1) ou (1') quand $\xi (\not\equiv 0)$ et les coefficients sont dans un C_π ($\pi = p^m$) formant un groupe $\mathfrak{A}(2\nu, \pi)$. C'est le *groupe linéaire abélien général* quand ξ reste indéterminé. Son diviseur relatif à $\xi = 1$ est le *groupe linéaire abélien spécial* $\mathfrak{A}_1(2\nu, \pi)$. Lorsque $p = 2$, le diviseur $\mathfrak{H}_0(2\nu, \pi)$ de $\mathfrak{A}$ vérifiant (3) ou (3') pour $\epsilon = 0$ est le *premier groupe hypoabélien* d'ordre $\frac{2 \Pi_i^{\nu} (\pi^{2i} - 1) \pi^{2i}}{\pi^{2\nu} (\pi^{\nu} + 1)}$ (JORDAN, loc. cit.; DICKSON, *Linear groups*). Le diviseur $\mathfrak{H}_d(2\nu, \pi)$ de $\mathfrak{A}$ vérifiant (3) ou (3') pour $\epsilon = d$, d rendant $z^2 + z + d$ irréductible dans C_π (E., 45) est le *second groupe hypoabélien* d'ordre $\frac{2 \Pi_i^{\nu} (\pi^{2i} - 1) \pi^{2i}}{\pi^{2\nu} (\pi^{\nu} - 1)}$ (Ibid.). Pour $p > 2$, le diviseur de $\mathfrak{A}$ qui vérifie (2) ou (2') sera désigné par $\mathfrak{X}(2\nu, \pi)$.

8. Revenons maintenant au groupe G du n° 6. On voit comme au n° 1 que G divise l'holomorphe K de A. Supposons que la substitution (4) corresponde à l'élément j du n° 6. Cette substitution appartient alors, pour $p > 2$, à $\mathfrak{A}(2\nu, p)$ ou à $\mathfrak{X}(2\nu, p)$, pour $p = 2$, à $\mathfrak{H}_0(2\nu, p)$ ou à $\mathfrak{H}_1(2\nu, p)$. Par hypothèse la fonction caractéristique $\varphi(z)$ de s est irréductible. Donc, si $p > 2$, il faut $\epsilon = 0$, sans quoi, d'après (2), $\varphi(z)$ aurait le facteur $1 - z$; nous retrouverons d'ailleurs ce résultat tout à l'heure. Il faudra en outre que q^n soit diviseur propre de $p^{2\nu} - 1$, en sorte que q^n divise $p^\nu + 1$. Donc, si $p = 2$ et $\nu = 1$, $q^n = 3$ divise l'ordre de $\mathfrak{H}_1$ et non celui de $\mathfrak{H}_0$, c'est-à-dire que s est dans $\mathfrak{G}_1$ et que $\epsilon = \tau = 1$.

G | D n'ayant qu'un type déjà trouvé (2), on pourra, par un changement de générateurs, ramener les équations de G à la forme

$$\begin{aligned} a^p &= j^{q^n} = 1, & c_i^p &= a^{\gamma_i}, & d_i^p &= a^{\delta_i}, & c_i^{-1} a c_i &= d_i^{-1} a d_i = a, \\ c_i c_h &= c_h c_i, & d_i d_h &= d_h d_i, & c_i d_h &= d_h c_i, & c_i^{-1} d_i c_i &= d_i a, & j^{-1} a j &= a^{\varepsilon} \\ & & (i, h &= 1, \dots, v). \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{cases} j^{-1} c_{\sigma} j = a^{\lambda_{\sigma}} c_{\sigma+1}, & j^{-1} d_{\sigma} j = a^{\lambda_{\sigma} + \varepsilon} d_{\sigma+1}, \\ j^{-1} c_v j = a^{\lambda_v} d_1, & j^{-1} d_v j = a^{\lambda_v} c_1^{\alpha_0} \dots c_{v-1}^{\alpha_{v-1}} d_1^{\alpha_{v-1}} \dots d_{v-1}^{\alpha_{v-1}} \end{cases} \quad (\sigma = 1, \dots, v-1),$$

$\theta^{2v} - \sum_0^{v-1} \alpha_i \theta^i = f(\theta)$ étant irréductible dans C_p et appartenant à l'exposant q^n . Les conditions (1) donnent $\xi = 1$, $\alpha_0 = 1$ (si $v = 1$, elles donnent seulement $\xi = -\alpha_0$; mais alors $-\alpha_0 = \theta^{1+p}$ et q^n divise $1+p$) et, si $v > 1$, $\alpha_{v+1} = \dots = \alpha_{2v-1} = 0$. Si $p > 1$, ou si $p = 2$ avec $v > 1$, les conditions (2) et (3) donnent $\varepsilon = 0$ et, sauf si $v = 1$ avec $p > 1$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_{v-1} = 0$. Donc s est dans $\mathfrak{A}_1$ si $p > 2$ et dans $\mathfrak{H}_0$ si $p = 2$ avec $v > 1$. Si $p = 2$ avec $v = 1$, on a vu que $\varepsilon = 1$ et que s est dans $\mathfrak{H}_1$. En prenant $c_i a^{x_i}$ pour c_i et $d_i a^{x_{i+1}}$ pour d_i , λ_k est remplacé par $\lambda_k + \xi x_k - x_{k+1}$ ($k = 1, \dots, 2v-1$) et λ_{2v} par $\lambda_{2v} + \xi x_{2v} - \sum_0^{2v-1} \alpha_i x_{i+1}$. Les équations obtenues en annulant ces quantités mod p déterminent $x_2, \dots, x_{2v}$ en fonction de x_1 , puis x_1 par une équation linéaire où le coefficient de x_1 est $f(\xi) \not\equiv 0$ (f est irréductible). On pourra donc supposer nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_{2v}$. Si $p > 2$, ou si $p = 2$ avec $v > 1$, on sait *a priori* (E., 144, 145) que A n'a que des e_p ; donc $\gamma_i = \delta_i = 0$. Au contraire, si $p = 2$ avec $v = 1$, A a des e_p , en sorte que les γ_i, δ_i ne peuvent pas être tous nuls. D'ailleurs (5) montre que $c_1, \dots, c_v, d_1, \dots, d_v$ sont du même ordre; donc $\gamma_i = \delta_i = 1$. Ainsi on n'a qu'un type pour $p \geq 2$, et ce type n'existe que s'il y a un polynôme irréductible de la forme $\theta^{2v} - a\theta^v - 1$ appartenant à l'exposant q^n mod p (il faut d'abord pour cela que q^n soit diviseur propre de $p^{2v} - 1$).

**SUR QUELQUES THÉORÈMES DE M. PETROVITCH RELATIFS AUX ZÉROS
DES FONCTIONS ANALYTIQUES;**

Par M. E. LANDAU.

I.

Dans un Mémoire qu'a inséré ce *Bulletin* ⁽¹⁾ M. Petrovitch démontre, par une méthode très intéressante, le théorème suivant ⁽²⁾ :

A. Si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série

$$(1) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

(où a_0 est supposé différent de 0) et si l'on forme la fonction

$$u(z) = \left| \frac{1}{z^2} \right| \sum_0^\infty |a_n z^n|^2,$$

on aura

$$(2) \quad \lambda \geq \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}} \quad (3),$$

⁽¹⁾ *Remarque sur les zéros des séries de Taylor*, t. XXIX, 1901, p. 303-312.

⁽²⁾ *Ibidem*, voir p. 306.

⁽³⁾ Je change ici, dans l'énoncé de M. Petrovitch, le signe $>$ en $\geq$. En réalité, sa démonstration prouve seulement que la série (1) n'a pas de zéro dont le module soit inférieur à $\frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}$. Avec le signe $>$ dans l'inégalité (2), le théorème ne serait plus exact, comme l'exemple suivant le fera voir. La série

$$-1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{-1 + 2z}{1 - z}$$

admet, dans son cercle de convergence (de rayon 1), la seule racine $\frac{1}{2}$. Donc

$\lambda = \frac{1}{2}$. Or, pour $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \sum_0^\infty \frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = \lambda.$$

quelle que soit la valeur de la variable complexe z à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1).

En d'autres termes, si R est le rayon de convergence de la série (1) et r une quantité positive inférieure à R , on a

$$(3) \quad \lambda \geq \frac{|a_0|r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}.$$

Si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

est une fonction entière, l'inégalité (3) s'applique à toutes les valeurs positives de r .

M. Petrovitch a déduit de son théorème A, vers la fin de son Mémoire, une autre proposition. Il se sert de l'inégalité

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < \left(\sum_0^{\infty} |a_n| r^n \right)^2,$$

dont le second membre représente le carré de la fonction majorante $\mathfrak{M}(r)$ relative à $f(z)$ pour la circonférence de rayon r .

M. Petrovitch conclut donc de (3) l'inégalité

$$(4) \quad \lambda > \frac{|a_0|r}{\sum_0^{\infty} |a_n| r^n} = \frac{|a_0|r}{\mathfrak{M}(r)},$$

qu'il énonce sous la forme suivante (1) :

B. Une fonction $f(z)$, holomorphe dans une circonférence C décrite autour de l'origine comme centre, ne s'annulant pas à l'origine, ne saurait avoir de zéro de module inférieur à l'expression

$$\frac{|f(0)|}{M},$$

où M désigne la plus petite (2) valeur que prend le module du

(1) *Idem*, voir p. 311-312.

(2) Je corrige ici une faute d'écriture, en remplaçant, dans l'énoncé de M. Petrovitch, le mot *grande* par *petite*.

rapport de la fonction majorante de $f(z)$ à la variable z pour les valeurs de z comprises à l'intérieur de la circonférence C .

II.

Je ferai observer en premier lieu que ce théorème B doit être considéré comme presque évident; en effet, en vertu de l'inégalité:

$$\frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n} < 1,$$

pour

$$|z| \leq \frac{|a_0| r}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n}, \quad m \geq 1,$$

on a aussi

$$|z|^m \leq \left(\frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n} \right)^m r^m \leq \frac{|a_0|^m}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^m r^m};$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(z) - a_0| &= |a_1 z + a_2 z^2 + \dots| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| |z|^m \\ &\leq \frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| r^m < |a_0|, \end{aligned}$$

$$|f(z)| = |a_0 + f(z) - a_0| \geq |a_0| - |f(z) - a_0| > 0.$$

III.

On peut obtenir une proposition plus instructive que B en interprétant l'inégalité (3) de M. Petrovitch de la manière suivante.

Les formules connues de la théorie des séries de Fourier, si on

les applique au carré du module de

$$\begin{aligned} f(z) &= f(re^{i\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n r^n \cos n\varphi - \gamma_n r^n \sin n\varphi) + i \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n r^n \sin n\varphi + \gamma_n r^n \cos n\varphi) \end{aligned}$$

(où l'on a posé $a_n = \beta_n + \gamma_n i$), donnent

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n^2 r^{2n} + \gamma_n^2 r^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

où, dans l'intégrale, z parcourt la circonférence $re^{i\varphi}$. Cette identité (5), connue, quoique pas très usuelle, montre qu'en désignant par $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, on a

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2 \quad (1).$$

De (3) et (6), on conclut l'inégalité

$$(7) \quad \lambda \geq \frac{|a_0| r}{M(r)} \quad (2).$$

Si la fonction $|f(z)|$ n'est pas constante pour $|z| = r$, on a même

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} &< M(r)^2, \\ \lambda &> \frac{|a_0| r}{M(r)}, \end{aligned}$$

(1) L'inégalité (6) a été démontrée, sans faire intervenir les intégrales, par M. Gutzmer dans sa Note: *Ein Satz über Potenzreihen* (*Mathematische Annalen*, t. XXXII, 1886, p. 596-600). Ce fait intéressant que $M(r)^2$ est supérieur ou égal non seulement à chacune des quantités $|a_n|^2 r^{2n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), ainsi que Cauchy l'avait démontré, mais aussi à leur somme, n'est mentionné presque dans aucun traité.

(2) Dans l'exemple contenu dans la troisième note de la page 251, la limite indiquée par le second membre de (7) est atteinte. Car on a $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$. D'ailleurs, pour $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a, indépendamment de φ , $|f(z)| = \left| \frac{-1+2z}{1-z} \right| = \sqrt{2}$.

ce qui, en vertu de la relation

$$M(r) \leq \mathfrak{M}(r),$$

entraîne l'inégalité

$$(4) \quad \lambda > \frac{|\alpha_0| r}{\mathfrak{M}(r)}.$$

Si $|f(z)|$ est constant pour $|z| = r$, on a certainement

$$M(r) < \mathfrak{M}(r),$$

de sorte que (7) entraîne l'inégalité (4).

IV.

Cependant l'inégalité (7) n'est pas nouvelle; au contraire, elle est une conséquence presque immédiate du théorème de M. Jensen ⁽¹⁾, dont voici l'énoncé dans le cas des fonctions $f(z)$ régulières pour $|z| \leq r$ et différentes de 0 pour $z = 0$:

Si $z_1, z_2, \dots, z_k$ sont les zéros de la fonction dont le module ne surpasse pas r , on a

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\varphi = \log \left| \frac{f(0)r^k}{z_1 z_2 \dots z_k} \right|,$$

où z parcourt la circonférence $re^{i\varphi}$.

Il résulte de (8) que

$$(9) \quad \log \left| \frac{f(0)r^k}{z_1 z_2 \dots z_k} \right| \leq \log M(r),$$

$$\left| \frac{f(0)r^k}{z_1 z_2 \dots z_k} \right| \leq M(r).$$

Donc, pour $|z_1| \leq r < |z_2|$, en posant $k = 1$, $|z_1| = \lambda$, on a

$$\frac{|\alpha_0| r}{\lambda} \leq M(r),$$

$$\lambda \geq \frac{|\alpha_0| r}{M(r)}.$$

⁽¹⁾ Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions (Acta mathematica, t. XXII, 1899, p. 359-364).

C'est l'inégalité (7), pour $|z_1| \leq r < |z_2|$. Pour $k = 0$, c'est-à-dire pour $0 < r < |z_1|$, elle résulte de ce que

$$M(r) > |a_0|,$$

$$\lambda = |z_1| > r > \frac{|a_0|}{M(r)} r.$$

Pour $k \geq 2$, c'est-à-dire pour $|z_2| \leq r$ et r inférieur au rayon du cercle de convergence de la série (1), elle résulte de

$$M(r) \geq \left| \frac{f(0)r^k}{z_1 \dots z_k} \right| = \frac{|a_0|r}{\lambda} \cdot \frac{r}{|z_2|} \dots \frac{r}{|z_k|} \geq \frac{|a_0|r}{\lambda} \cdot 1 \dots 1 = \frac{|a_0|r}{\lambda}.$$

De cette façon, M. Lindelöf ⁽¹⁾ est même arrivé à déduire du théorème de M. Jensen, pour tous les v , l'inégalité

$$(10) \quad M(r) \geq \frac{|a_0|r^v}{|z_1| \dots |z_v|},$$

où les racines $z_1, z_2, \dots$ sont rangées par ordre de modules croissants et où r désigne un nombre positif quelconque inférieur au cercle de convergence de (1). Il est vrai que M. Lindelöf ne parle, à l'endroit cité, que des fonctions entières; mais il n'y a rien à changer à son raisonnement pour le cas général. Seulement il faut mettre $\geq$ à la place de $>$, pour embrasser tous les cas, ce qui est fait dans la formule (10). Voici donc la démonstration de l'inégalité (10) :

Soient $z_1, \dots, z_h$ les zéros dont la valeur absolue est $\leq r$.

1° Pour $k = v$, c'est-à-dire pour $|z_v| \leq r < |z_{v+1}|$, (10) n'est autre chose que (9).

2° Pour $k < v$, on a $0 < r < |z_v|$, et (10) résulte de (9) en vertu de

$$\frac{|a_0|r^v}{|z_1| \dots |z_v|}$$

$$= \frac{|a_0|r^k}{|z_1| \dots |z_k|} \cdot \frac{r}{|z_{k+1}|} \dots \frac{r}{|z_v|} \leq \frac{|a_0|r^k}{|z_1| \dots |z_k|} \cdot 1 \dots 1 = \frac{|a_0|r^k}{|z_1| \dots |z_k|}.$$

3° Pour $k > v$, on a $r \geq |z_{v+1}|$; (10) est alors la conséquence

(1) *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XXXI, 1902, p. 13-14).

de (9) et de

$$\frac{|a_0| r^k}{|z_1| \dots |z_k|} = \frac{|a_0| r^v}{|z_1| \dots |z_v|} \cdot \frac{r}{|z_{v+1}|} \dots \frac{r}{|z_k|} \geq \frac{|a_0| r^v}{|z_1| \dots |z_v|} \cdot 1 \dots 1 = \frac{|a_0| r^v}{|z_1| \dots |z_v|}.$$

V.

Je vais maintenant montrer que non seulement l'inégalité (7), tirée du théorème A, peut être déduite du théorème de M. Jensen, mais que le théorème A lui-même est contenu dans le théorème de M. Jensen.

En appliquant l'identité (5), on voit qu'il s'agit de démontrer l'inégalité

$$(11) \quad \lambda \geq \frac{|a_0| r}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi}},$$

en partant du théorème de M. Jensen.

Celui-ci peut s'écrire

$$\frac{|a_0| r^k}{|z_1| \dots |z_k|} = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\varphi}.$$

Le premier membre étant, comme on l'a vu, toujours supérieur ou égal à $\frac{|a_0| r}{\lambda}$, on a

$$(12) \quad \frac{|a_0| r}{\lambda} \leq e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\varphi}.$$

Soit $g(\varphi)$ une fonction de φ , continue pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. La moyenne géométrique de n nombres positifs étant inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique, on a

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{e^{g(0)} e^{g(\frac{2\pi}{n})} \dots e^{g((n-1)\frac{2\pi}{n})}} \\ &= e^{\frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} g(v\frac{2\pi}{n})} \leq \frac{1}{n} \left\{ e^{g(0)} + e^{g(\frac{2\pi}{n})} + \dots + e^{g((n-1)\frac{2\pi}{n})} \right\} = \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} e^{g(v\frac{2\pi}{n})}, \end{aligned}$$

xxxiii.

17

d'où, en passant à la limite,

$$(13) \quad e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi} \leq e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{g(\varphi)} d\varphi}.$$

Supposons d'abord que $f(z)$ n'ait pas de zéros sur la circonférence $|z| = r$, et posons, dans (13),

$$g(\varphi) = 2 \log |f(re^{i\varphi})| = \log |f(re^{i\varphi})|^2;$$

nous aurons

$$(14) \quad \left(e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\varphi} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi;$$

donc, en vertu de (12),

$$(15) \quad \frac{|a_0|r}{\lambda} \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi}.$$

Les deux membres de (15) étant des fonctions continues de r , cette inégalité subsiste aussi dans le cas où $f(z)$ a des zéros dont le module est égal à r .

Donc on a

$$(11) \quad \lambda \geq \frac{|a_0|r}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi}},$$

ce qui constitue, comme nous l'avons vu plus haut, le théorème A de M. Petrovitch.

VI.

Soient, plus généralement, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ les modules des ν premiers zéros de la fonction $f(z)$, situés dans le cercle de convergence de la série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

On a vu, au paragraphe IV, que, pour tout r inférieur au rayon de ce cercle, on a

$$\frac{|a_0| r^\nu}{\lambda_1 \dots \lambda_\nu} \leq \frac{|a_0| r^k}{|z_1 \dots z_k|},$$

où $z_1, \dots, z_k$ désignent les zéros dont le module ne surpasse pas r .
Donc, par le théorème de M. Jensen,

$$\frac{|a_0| r^\nu}{\lambda_1 \dots \lambda_\nu} \leq e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\varphi},$$

et, en appliquant (14),

$$\frac{|a_0| r^\nu}{\lambda_1 \dots \lambda_\nu} \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi},$$

ce qui, en vertu de (5), peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\nu \geq \frac{|a_0| r^\nu}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}.$$

Pour $\nu = 1$, on retrouve le théorème de M. Petrovitch.

VII.

Enfin, j'indiquerai une démonstration directe et très élémentaire du théorème A. L'inégalité en question

$$(3) \quad \lambda \geq \frac{|a_0| r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}$$

sera évidemment démontrée si l'on réussit à prouver que

$$(16) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \frac{|a_0|^m r^m}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right)^{\frac{m}{2}}} \leq |a_0|;$$

car, pour

$$|z| < \frac{|a_0| r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}},$$

on aura alors

$$|f(z) - a_0| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| |z|^m < \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \frac{|a_0|^{1/m} r^m}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{1/n} r^{1/n} \right)^{\frac{m}{2}}} \leq |a_0|.$$

$$f(z) \neq 0.$$

En d'autres termes, si l'on pose dans (16), pour $m = 1, 2, \dots$,

$$\frac{|a_m| r^m}{|a_0|} = p_m,$$

il suffit de prouver : si $p_1, p_2, \dots$ sont des quantités réelles et si la série

$$1 + p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots$$

converge, on a

$$(17) \quad S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{(1 + p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots)^{\frac{m}{2}}} \leq 1.$$

Cette inégalité (17) peut être déduite d'une inégalité plus générale établie par M. Pringsheim⁽¹⁾ dans un autre but. Elle s'établit directement de la manière suivante, en excluant le cas banal de $p_1 = p_2 = \dots = 0$, où $S = 0 < 1$.

On a, pour α et β réels,

$$2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2.$$

Appliquons cette identité à

$$\alpha = \frac{p_m}{(p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots)^{\frac{1}{2}}}, \quad \beta = \frac{(p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots)^{\frac{1}{2}}}{(1 + p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots)^{\frac{m}{2}}},$$

où m désigne un des nombres $1, 2, \dots$; nous aurons

$$(18) \quad \frac{2 p_m}{(1 + p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots)^{\frac{m}{2}}} \leq \frac{p_m^{\frac{1}{2}}}{p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots} + \frac{p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots}{(1 + p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}} + \dots)^m}.$$

(¹) Voir, par exemple, *Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* [Mathematische Annalen, t. LVIII, 1904, p. 268, formule (b)], en lisant, entre les deux membres, $\leq$ au lieu de $<$.

Ajoutons ces inégalités (18) pour $m = 1, 2, \dots$; nous obtiendrons

$$2S \leq \frac{p_1^2 + p_2^2 + \dots}{p_1^2 + p_2^2 + \dots} + \frac{p_1^2 + p_2^2 + \dots}{p_1^2 + p_2^2 + \dots} = 1 + 1 = 2,$$
$$S \leq 1;$$

c'est l'inégalité (17) qu'il fallait démontrer, ou, en d'autres termes, le théorème A de M. Petrovitch.

CORRESPONDANCE.

CINQ LETTRES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

I. — Lettre de M. Hadamard à M. Borel.

J'ai lu avec intérêt les arguments que tu opposes (2^e Cahier du tome LX des *Mathematische Annalen*) à la démonstration de M. Zermelo parue dans le Tome précédent. Je ne partage cependant pas ton opinion à ce sujet. Je n'admets pas, tout d'abord, l'assimilation que tu établis entre le fait qui sert de point de départ à M. Zermelo et le raisonnement qui consisterait à numérotter les éléments de l'ensemble les uns après les autres, ce numérotage étant poursuivi *transfiniment*. Il y a, en effet, une différence fondamentale entre les deux cas : le raisonnement qui vient d'être cité en dernier lieu comporte une série de choix successifs dont chacun dépend des précédents; c'est pour cela que son application transfinie est inadmissible. Je ne vois aucune analogie à établir, au point de vue qui nous occupe, entre les choix en question et ceux dont parle M. Zermelo, lesquels sont *indépendants les uns des autres*.

C'est d'ailleurs dans le cas d'une infinité *non dénombrable* de choix que tu récusés cette manière d'opérer; mais, à mon tour, je ne vois pas de différence, à cet égard, entre le cas d'une infinité non dénombrable et celui d'une infinité dénombrable. La diffé-

rence serait manifeste s'il y avait une dépendance quelconque entre les choix en question, parce qu'il faudrait alors avoir égard à l'ordre dans lequel on les opérerait : elle me paraît, encore une fois, s'évanouir complètement dans le cas des choix indépendants.

Ce qui est certain, c'est que M. Zermelo ne donne aucun moyen d'exécuter *effectivement* l'opération dont il parle, et qu'il reste douteux que personne puisse, dans la suite, indiquer ce moyen. Il aurait été assurément plus intéressant de résoudre le problème sous cette forme; mais la question ainsi posée (détermination effective de la correspondance cherchée) n'en est pas moins complètement distincte de celle que nous examinons (une telle correspondance existe-t-elle?) : il y a entre elles toute la différence, laquelle est fondamentale, qui existe entre ce que M. Tannery (¹) appelle *une correspondance* qui peut être *définie* et une correspondance qui peut être *décrite*. Plusieurs questions importantes de Mathématiques changeraient totalement de sens, et de solutions, si l'on substituait le second mot au premier. Tu emploies des correspondances dont tu constates l'*existence* sans pouvoir cependant les *décrire*, dans ton important raisonnement relatif aux séries qui admettent leur cercle de convergence comme coupure : si l'on se bornait aux séries entières dont la loi de formation peut être décrite, l'opinion ancienne (à savoir, que les séries entières admettant leur cercle de convergence comme coupure sont l'exception) devrait, à mon sens, être considérée comme la vraie. C'est d'ailleurs une pure question de sentiment; car la notion de correspondance « qui peut être décrite » est, pour reprendre ton expression, « en dehors des Mathématiques »; elle relève du domaine de la psychologie et est relative à une propriété de notre esprit, c'est une question de cette nature que celle de savoir si la correspondance employée par M. Zermelo pourra jamais être indiquée *en fait*.

Quant à l'existence de cette correspondance, elle me paraît aussi adéquate à la possibilité de prendre *un* élément dans un ensemble quelconque donné, que la proposition suivante :

A. *Un nombre x étant donné, il existe des nombres y qui ne*

(¹) *Revue générale des Sciences*, t. VIII, 1897, p. 133 et suiv.

sont liés à x par aucune équation algébrique à coefficients entiers,

l'est à celle-ci :

B. *Il existe des fonctions y de x telles que, pour aucune valeur de x , y n'ait ni une valeur algébrique, ni une valeur liée à x par une équation algébrique à coefficients entiers.*

On pourrait d'ailleurs, sans doute, former de telles fonctions. Mais ce que je prétends, c'est que cela n'est nullement nécessaire pour affirmer l'exactitude du théorème B; et je crois que beaucoup de mathématiciens ne prendraient pas plus que moi cette peine s'ils avaient à employer le théorème en question. — J. HADAMARD.

II. — Lettre de M. Baire à M. Hadamard.

Borel me communique la lettre où vous lui exposez votre manière de voir sur le grand débat soulevé par la Note Zermelo. Je vous demande la permission de vous adresser quelques réflexions qu'elle me suggère.

Je suis, vous le savez, de l'avis de Borel, en gros, et si je m'en écarte, ce sera pour aller plus loin que lui.

Supposons qu'on fasse un effort pour essayer d'appliquer la méthode de Zermelo à l'ensemble M des suites d'entiers positifs. On prend dans M un élément distingué m_1 ; reste l'ensemble $M - m_1$, dans lequel on prend un élément distingué m_2 ; etc. Ces choix successifs dépendent bien chacun de ceux qui le précèdent. Mais, dites-vous avec M. Zermelo, les choix sont indépendants les uns des autres, parce qu'il admet comme point de départ un choix d'élément distingué fait dans toute partie de M . Ceci ne me paraît pas satisfaisant : c'est, pour moi, dissimuler la difficulté en la noyant dans une difficulté plus grande.

L'expression *ensemble donné* est employée à chaque instant : a-t-elle un sens? Pas toujours, selon moi. Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable, et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel), l'assimilation, *consciente ou inconsciente*, avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main, doit complètement disparaître, et nous sommes, à mon avis, dans le *virtuel*,

c'est-à-dire que nous faisons des conventions qui nous permettent ultérieurement, un objet étant défini *par une nouvelle convention*, d'affirmer certaines propriétés de cet objet. Mais croire qu'on est allé plus loin ne me paraît pas légitime. En particulier, de ce qu'un ensemble est donné (nous serons d'accord pour dire, par exemple, que nous nous donnons l'ensemble des suites d'entiers positifs), *il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données*. A plus forte raison je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix fait dans chaque partie d'un ensemble.

M. Zermelo dit : « Concevons qu'à tout ensemble partiel de M corresponde un de ses éléments. » C'est là une conception qui n'a rien de contradictoire, d'accord. Aussi, tout ce qu'il démontre pour moi, c'est que nous n'apercevons pas de contradiction à concevoir que, dans tout ensemble qu'on nous définira, les éléments aient entre eux des relations de position identiques à celles qu'ont les éléments des ensembles bien ordonnés. Pour dire après cela qu'on a établi que tout ensemble peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné, il faut donner aux mots une extension extraordinaire et, j'ajouterai, trompeuse.

Dans ce qui précède, je ne suis arrivé que bien incomplètement à rendre ma pensée. J'ai dit ma manière de voir dans la phrase qu'a bien voulu transcrire Borel dans sa Note. Pour moi, le progrès, dans cet ordre d'idées, consisterait à délimiter le domaine de ce qui est définissable. Et, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini. — R. BAIRE.

III. — *Lettre de M. Lebesgue à M. Borel.*

Vous me demandez mon opinion sur la Note de M. Zermelo (*Math. Annalen*, t. LIX) sur les objections que vous lui avez faites (*Math. Annalen*, t. LX) et sur la lettre de M. Hadamard que vous me communiquez; la voici. Excusez moi d'être long, j'ai essayé d'être clair.

Tout d'abord je suis d'accord avec vous pour ceci : M. Zermelo a très ingénieusement démontré que l'on savait résoudre le problème A :

A. *Mettre un ensemble M sous forme bien ordonnée,*
toutes les fois qu'on savait résoudre le problème B :

B. *Faire correspondre à chaque ensemble M' formé avec des éléments de M un élément particulier m' de M'.*

Malheureusement le problème B n'est facile à résoudre, à ce qu'il semble, que pour les ensembles qu'on sait bien ordonner; par suite on n'a pas une solution générale du problème A.

Je doute fort qu'on puisse donner une solution générale de ce problème, du moins si l'on admet, avec M. Cantor, que définir un ensemble M c'est nommer une propriété P appartenant à certains éléments d'un ensemble N précédemment défini et caractérisant, par définition, les éléments de M. En effet, avec cette définition, on ne sait rien sur les éléments de M d'autre que ceci : ils possèdent tous les propriétés *inconnues* des éléments de N et ce sont les seuls qui ont la propriété P *inconnue*. Rien là-dedans ne permet de distinguer deux éléments de M, encore moins de les classer comme il faudrait le faire pour résoudre A.

Cette objection, faite *a priori* à tout essai de solution de A, tombe évidemment si l'on particularise N ou P; l'objection tombe, par exemple, si N est l'ensemble des nombres. Tout ce que l'on peut espérer faire de général, c'est indiquer des problèmes, tels que B, dont la résolution entraînerait celle de A et possibles dans certains cas, particuliers, mais qui se rencontrent fréquemment. D'où l'intérêt, à mon avis, du raisonnement de M. Zermelo.

Je crois que M. Hadamard est plus fidèle que vous à la pensée de M. Zermelo en interprétant la Note de cet auteur comme un essai, non pas de résolution effective de A, mais de démonstration d'existence de la solution. La question revient à celle-ci, peu nouvelle : *peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir?*

C'est évidemment une affaire de convention; mais je crois qu'on ne peut bâtir solidement qu'en *admettant qu'on ne démontre l'existence d'un être qu'en le définissant*. A ce point de vue, voisin de celui de Kronecker et de M. Drach, il n'y a pas à distinguer entre A et le problème C :

C. *Tout ensemble peut-il être bien ordonné?*

Je n'aurais rien de plus à dire si la convention que j'ai indiquée était universellement admise; mais je dois avouer que l'on emploie souvent, et que j'ai moi-même souvent employé, le mot *existence* dans d'autres sens. Par exemple, lorsqu'on interprète un raisonnement bien connu de M. Cantor en disant : *il existe une infinité non dénombrable de nombres*, on ne donne cependant pas le moyen de nommer une telle infinité. On montre seulement, vous l'avez dit avant moi, que, chaque fois qu'on aura une infinité dénombrable de nombres, on pourra définir un nombre ne faisant pas partie de cette infinité. (Le mot *définir* a tout le temps le sens de : *nommer une propriété caractéristique du défini*). Une existence de cette nature peut être utilisée dans un raisonnement et de la manière suivante : une propriété est vraie, si, la nier, conduit à admettre qu'on peut ranger tous les nombres en suite dénombrable. Je crois qu'elle ne peut intervenir que de cette manière.

M. Zermelo utilise l'*existence* d'une *correspondance* entre les sous-ensembles de M et certains de leurs éléments. Vous voyez que, quand même l'existence de ces correspondances serait hors de doute, suivant la manière dont cette existence aurait été prouvée, il ne serait pas évident qu'on ait le droit d'utiliser cette existence comme le fait M. Zermelo.

J'arrive au raisonnement que vous énoncez ainsi : « Il est possible, dans un ensemble particulier M' , de choisir *ad libitum* l'élément distingué m' ; ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M' , peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », et duquel semble résulter l'existence des correspondances.

Tout d'abord, M' étant donné, est-il évident qu'on puisse choisir m' ? Cela serait évident si M' existait, au sens presque kroneckérien que j'ai dit, puisque dire que M' existe serait alors affirmer que l'on sait nommer certains de ses éléments. Mais étendons le sens du mot *exister*. L'ensemble Γ des correspondances entre les sous-ensembles M' et les éléments distingués m' *existe* certainement pour MM. Hadamard et Zermelo; ce dernier représente même le nombre de ses éléments par un produit transfini. Cependant, sait-on choisir un élément de Γ ? Non, évidemment, puisque ce serait donner de B , pour M , une solution déterminée.

Il est vrai que j'emploie le mot *choisir* dans le sens de *nommer* et qu'il suffit peut-être pour le raisonnement de M. Zermelo que

choisir signifie *penser à*. Mais il faut cependant remarquer qu'on n'indique pas celui auquel on pense et qu'il est néanmoins nécessaire au raisonnement de M. Zermelo qu'on pense à *une correspondance déterminée toujours la même*. M. Hadamard croit, il me semble, qu'il n'est pas nécessaire qu'on démontre qu'on peut *déterminer* un élément (et un seul); c'est de là, à mon avis, que viennent les différences d'appréciation.

Pour mieux vous faire sentir la difficulté que je vois, je vous rappelle que, dans ma thèse, j'ai démontré l'existence (sens non kroneckérien et peut-être difficile à préciser) d'ensembles mesurables non mesurables B, mais il restait douteux pour moi qu'on pût jamais en nommer un. Dans ces conditions, aurais-je eu le droit de fonder un raisonnement sur cette hypothèse : *je suppose choisi un ensemble mesurable non mesurable B*, alors que je doutais que personne pût jamais en nommer un?

Ainsi je vois déjà une difficulté dans ceci « dans un M' déterminé je puis choisir un m' déterminé », puisqu'il existe des ensembles (l'ensemble C par exemple, qu'on pourrait considérer comme un ensemble M' provenant d'un ensemble plus général) dans lesquels il est peut-être impossible de choisir un élément. Il y a ensuite la difficulté que vous signalez relative à l'infinité des choix, ce qui fait que, si l'on veut considérer le raisonnement de M. Zermelo comme tout à fait général, il faut admettre qu'on parle d'une infinité de choix, infinité de puissance peut-être très grande; on ne donne d'ailleurs ni la loi de cette infinité, ni la loi d'un des choix; on ne sait pas s'il est possible de nommer une loi définissant un ensemble de choix ayant la puissance de l'ensemble des M' ; on ne sait pas s'il est possible, étant donné un M' , de nommer un m' .

En résumé, quand j'examine de près le raisonnement de M. Zermelo, comme d'ailleurs plusieurs raisonnements généraux sur les ensembles, je le trouve trop peu kroneckérien pour lui attribuer un sens (en tant que théorème d'existence de la solution de C, seulement, bien entendu).

Vous faites allusion à ce raisonnement : « Pour bien ordonner un ensemble il suffit d'y choisir un élément, puis un autre, etc. » Il est certain que ce raisonnement présente des difficultés énormes, plus grandes encore, au moins en apparence, que celui de M. Zermelo; et je suis tenté de croire avec M. Hadamard qu'il y a progrès

à avoir remplacé une infinité de choix successifs et dépendant les uns des autres par une infinité, non ordonnée, de choix indépendants. Il n'y a peut-être là qu'une illusion et la simplification apparente tient peut-être seulement à ce que l'on doit remplacer une infinité ordonnée de choix par une infinité non ordonnée, mais de puissance plus grande. De sorte que le fait qu'on peut ramener à la seule difficulté, placée au début du raisonnement de M. Zermelo, toutes les difficultés du raisonnement simpliste que vous citez prouve peut-être simplement que cette seule difficulté est très grande. En tout cas, elle ne me paraît pas disparaître parce qu'il s'agit d'un ensemble non ordonné de choix indépendants. Par exemple, si je crois à l'existence de fonctions $y(x)$ telles que, quel que soit x , y ne soit jamais lié à x par une équation algébrique à coefficients entiers, c'est parce que je crois, avec M. Hadamard, qu'il est possible d'en construire; mais ce n'est pas, pour moi, la conséquence immédiate de l'existence, quel que soit x , de nombres y qui ne soient liés à x par aucune équation à coefficients entiers ⁽¹⁾.

Je suis pleinement d'accord avec M. Hadamard quand il déclare que la difficulté qu'il y a à parler d'une infinité de choix sans en donner la loi est aussi grave, qu'il s'agisse ou non d'une infinité dénombrable. Quand on dit, comme dans le raisonnement que vous critiquez, « ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M' , peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », on ne dit rien si l'on n'explique pas les termes employés. Faire un choix, ce peut être écrire ou nommer l'élément choisi; faire une infinité de choix, ce ne peut être écrire ou nommer les éléments choisis, un à un : la vie est trop courte. Il faut donc dire ce que c'est faire. On entend par là, en général, que c'est donner la loi qui définit les éléments choisis, mais cette loi est pour moi, comme pour M. Hadamard, aussi indispensable, qu'il s'agisse d'une infinité dénombrable ou non.

Peut-être cependant suis-je encore d'accord avec vous sur ce point parce que, si je n'établis pas de différences théoriques entre

(1) En corrigeant les épreuves, j'ajoute qu'en fait le raisonnement, par lequel on légitime ordinairement l'énoncé A de M. Hadamard (p. 262), légitime en même temps l'énoncé B. Et, à mon avis, c'est parce qu'il légitime B qu'il légitime A.

les deux infinités, au point de vue pratique, je fais une grande différence entre elles. Quand j'entends parler d'une loi définissant une infinité transfinie de choix, je suis très méfiant, parce que je n'ai jamais encore vu de pareilles lois, tandis que je connais des lois définissant une infinité dénombrable de choix. Mais ce n'est qu'une affaire de routine et, à la réflexion, je vois parfois des difficultés aussi graves, à mon avis, dans des raisonnements où n'interviennent qu'une infinité dénombrable de choix que dans des raisonnements où il y en a une transfinité. Par exemple, si je ne considère pas comme établi par le raisonnement classique que tout ensemble de puissance supérieure au dénombrable contient un ensemble dont la puissance est celle de l'ensemble des nombres transfinis de la classe II de M. Cantor, je n'attribue pas plus de valeur à la méthode par laquelle on démontre qu'un ensemble non fini contient un ensemble dénombrable. Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas démontrée. Mais je vous ai déjà parlé de ces questions. — H. LEBESGUE.

IV. — *Lettre de M. Hadamard à M. Borel.*

La question me paraît tout à fait claire maintenant, après la lettre de M. Lebesgue. De plus en plus nettement, elle tient tout entière dans la distinction, exposée dans l'article de M. Tannery, entre ce qui est *déterminé* et ce qui peut être *décrit*.

Lebesgue, Baire et toi, adoptez à cet égard la manière de voir de Kronecker, que je croyais jusqu'ici lui être particulière. Vous répondez négativement à la question posée (ci-dessus, p. 263) par M. Lebesgue : Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir? J'y réponds affirmativement. Je prends pour mienne, autrement dit, la réponse que Lebesgue fait lui-même (p. 266) à son objection relative à l'ensemble I'.

Qu'il nous soit impossible, au moins actuellement, de *nommer* un élément de cet ensemble, j'en conviens. C'est là la question pour vous; ce ne l'est pas pour moi.

Il n'y a qu'un point sur lequel il me semble que Lebesgue ne soit pas logique avec lui-même. C'est lorsqu'il se reconnaît ou ne

se reconnaît pas le droit d'utiliser une existence, suivant la manière dont elle a été démontrée. Pour moi, les *existences* dont il parle sont des faits comme les autres. Sinon, elles n'ont pas lieu.

La question se pose de même vis-à-vis de Baire. Je n'aimerais pas beaucoup la placer, comme il le fait (p. 264), à la façon de M. Hilbert, sur le terrain du *non contradictoire*, qui me paraît encore relever de la psychologie et faire entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux. Je ne comprends même pas bien comment M. Zermelo peut avoir *démontré* que nous n'apercevons pas de contradiction, etc. Cela ne se *démontre* pas, cela se *constate* : on en a aperçu ou l'on n'en a pas aperçu.

Ce point écarté, la question principale, celle de savoir si l'ensemble peut être ordonné, n'a évidemment pas pour Baire (pas plus que pour Lebesgue et toi) le même sens que pour moi. Je dirais plutôt : l'ordination est-elle possible? (et non pas même peut-on ordonner, de crainte d'avoir à penser à ce qu'est cet *on*) : Baire dirait : pouvons-nous ordonner? Question toute subjective, à mon avis.

Ce sont donc deux conceptions des Mathématiques, deux mentalités qui sont en présence. Je ne vois, dans tout ce qui a été dit jusqu'ici, aucun motif de changer la mienne. Je ne prétends pas l'imposer. Tout au plus ferai-je valoir en sa faveur les arguments que j'ai indiqués dans la *Revue générale des Sciences* (30 mars 1905), savoir :

1° Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs, sur la notion même de fonction. La *loi* qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression ⁽¹⁾ analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. Et même à une expression analytique pas trop bizarre. Non seulement la *numérabilité* des choix ne me paraît pas changer la question, mais il en est de même de l'*unicité*. Je ne vois pas

⁽¹⁾ Je crois devoir insister un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des Mathématiques », parce qu'il était impossible de les décrire.

comment nous aurions le droit de dire : « Pour chaque valeur de x il existe un nombre satisfaisant à Soit y ce nombre... », alors que, parce que « la mariée est trop belle », nous ne pouvons pas dire : « Pour chaque valeur de x il existe une infinité de nombres satisfaisant à Soit y l'un de ces nombres ... ».

2° Les choix arbitraires de Tannery conduisent à des nombres γ , que nous serions incapables de définir. Je ne conçois pas que ces nombres n'existent pas.

Quant aux raisonnements présentés par M. Bernstein (*Math. Annalen*, t. LX, p. 187), et, par conséquent, à ses objections à la démonstration de M. Zermelo, je ne les considérerais pas, pour ma part, comme probants. Cette opinion est d'ailleurs indépendante de la question que nous discutons actuellement.

M. Bernstein part du paradoxe de M. Burali-Forti (*Circolo matematico di Palermo*, 1897) relatif à l'ensemble W de tous les nombres ordinaux. Pour échapper à la contradiction mise en évidence par M. Burali-Forti, il suppose le nombre ordinal W tel qu'il soit impossible de lui ajouter 1. Cette opinion est, pour moi, inadmissible, ainsi que les arguments imaginés en sa faveur par M. Bernstein. L'ordre établi (d'après la théorie de M. Cantor) entre les éléments de W et l'élément supplémentaire (c'est à cet ordre que s'attaque l'auteur) est une pure convention, qu'on est toujours libre de faire et à laquelle les propriétés de W , quelles qu'elles soient, ne sauraient mettre aucun obstacle.

La solution est autre. C'est l'existence même de l'ensemble W qui implique contradiction. Dans sa définition, la définition générale du mot *ensemble* est incorrectement appliquée. On n'a le droit de former un ensemble qu'avec des objets préalablement existants et il est aisé de voir que la définition de W suppose le contraire.

Même observation pour *l'ensemble de tous les ensembles* (Hilbert, Congrès de Heidelberg).

Revenons à la question primitive. Voici encore, à cet égard, non un argument, car je crois que nous coucherons éternellement sur nos positions, mais une conséquence de tes principes.

Cantor a considéré l'ensemble de toutes les fonctions qui, dans l'intervalle $(0, 1)$, ne prennent que les valeurs 0, 1. Cet ensemble a,

pour moi, un sens clair et sa puissance est $2^{\aleph}$, comme l'énonce Cantor. De même, l'ensemble de toutes les fonctions de x a pour moi un sens, et je vois clairement que sa puissance est $\aleph^{\aleph}$.

Quel sens tout cela a-t-il pour toi? Il me paraît évident que cela ne peut en avoir aucun. Car à toute fonction tu imposes une condition supplémentaire qui n'a aucun sens mathématique : celle d'être *descriptible* pour nous.

Ou plutôt, voici ce que cela signifie : on ne doit considérer, à ton point de vue, que les fonctions définissables en un nombre fini de mots. Mais, à ce compte, les deux ensembles ainsi formés sont *dénombrables*, ainsi que tous les ensembles possibles, d'ailleurs. — J. HADAMARD.

V. — Lettre de M. Borel à M. Hadamard.

... Je voudrais d'abord te signaler une intéressante remarque faite par M. Lebesgue à la séance de la Société du 4 mai : Comment M. Zermelo peut-il être assuré qu'aux divers points de son raisonnement il parle *du même* choix de l'élément distingué, puisqu'il ne le caractérise par rien *pour lui-même* (il ne s'agit même pas ici d'un contradicteur possible; il s'agit d'être cohérent avec soi-même).

Quant à ta nouvelle objection, voici quelle est ma situation à son égard.

Je n'aime guère écrire des alephs, mais je consens cependant à faire des raisonnements équivalents à ceux dont tu parles, sans me faire guère illusion sur leur valeur intrinsèque, *mais en les regardant comme pouvant guider pour d'autres raisonnements plus sérieux*. Comme exemple pratique, je puis te citer la Note III que j'ai insérée à la fin de mon dernier petit Livre (*Leçons sur les fonctions de variables réelles, etc.*, rédigées par Maurice Fréchet); le raisonnement qui y est employé est manifestement suggéré par le raisonnement de Cantor, que j'ai rapporté dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions* ⁽¹⁾, page 107.

(1) Dans les Notes I et II de ce petit Livre, je fais constamment des raisonnements du type de ceux que tu me refuses le droit de faire; je suis d'ailleurs à chaque instant rempli de scrupules et chacune de ces deux Notes se termine par une phrase très restrictive.

La forme que j'adopte dans cette Note III n'est pas encore absolument satisfaisante, comme je l'indique au bas de la dernière page de mon Livre; mais le raisonnement analogue de M. Lebesgue dans son Mémoire paru dans le *Journal de Jordan* (1905) est, je crois, tout à fait irréprochable, en ce sens qu'il conduit à un résultat précis, exprimable au moyen d'un nombre fini de mots; il a cependant son origine dans celui de Cantor.

On peut se demander quelle est la valeur réelle de ces raisonnements que je ne regarde pas comme valables absolument et qui cependant conduisent ultérieurement à des résultats effectifs. Il semble en effet que, s'ils étaient dépourvus de toute valeur, ils ne pourraient conduire à rien, car ce seraient des assemblages de mots vides de sens. Je crois qu'on serait ainsi trop sévère et qu'ils ont une valeur analogue à celle de certaines théories de Physique mathématique, par lesquelles nous ne prétendons pas exprimer la réalité, mais avoir un guide qui nous permette, par analogie, de découvrir des phénomènes nouveaux, qu'il reste ensuite à vérifier. Il y aurait un travail considérable à faire pour savoir quel est le sens réel et précis que l'on peut attribuer à des raisonnements de ce genre; ce travail est inutile ou du moins hors de proportion avec son utilité; les rapports avec le concret de ces raisonnements trop abstraits apparaissent d'eux-mêmes lorsque le besoin s'en fait sentir.

Je serai d'accord avec toi sur le fait qu'il est contradictoire de parler de l'ensemble de tous les ensembles, car, par le raisonnement de la page 107 citée plus haut, on peut former un ensemble de puissance plus grande, mais je crois que cette contradiction tient à ce que l'on introduit des ensembles non définis réellement.

— EM. BOREL.

SUR LE PROBLÈME DES AIRES;

Par M. H. LEBESGUE.

Je m'aperçois que, dans une Note de ce *Bulletin* (t. XXXI, p. 197), où je rectifiais une erreur commise dans ma Thèse, j'ai de nouveau laissé passer une inexactitude.

Au lieu de prendre pour aire de D le nombre

$$m + \theta m(A) + (1 - \theta) m(B),$$

il faut, en effet, prendre

$$m + \theta m(A) + (1 - \theta) m(B) + \frac{1}{2} m(E),$$

$m(E)$ désignant la mesure superficielle des points du contour de D qui ne font partie ni de A, ni de B.

Faute de ce terme $\frac{1}{2} m(E)$, que j'avais écrit correctement dans ma Thèse, il arriverait parfois que le domaine formé par la réunion de deux domaines, sans points intérieurs communs, n'aurait pas pour aire la somme des aires des domaines composants.

FIN DU TOME XXXIII.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXIII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
État de la Société mathématique au commencement de 1905.....	v
Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation.....	xiv
Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	xv
Comptes rendus des séances.....	1, 81, 157, 225

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[D 2 b]	Andoyer (H.). — Sur la sommation des séries.....	36
[J 1 b β]	André (D.). — Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque.....	159
[Q 2]	Autonne (L.). — Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à $n-1$ dimensions.....	172
[A 5 b]	Bernstein (S.). — Sur l'interpolation.....	33
[M ² 2 b]	Bioche (Ch.). — Remarques sur un cas de symétrie dans l'espace.....	13
[M ³ 6 a]	Bioche (Ch.). — Sur les courbes gauches de 4 ^e ordre et de 4 ^e classe.....	18
[J 1 a α]	Bioche (Ch.). — Sur les permutations polyédriques...	88
[J 2 f]	Borel (Em.). — Remarques sur certaines questions de probabilité.....	123
[H 9 f]	Clairin (J.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes....	14
[H 7 c]	Clairin (J.). — Sur certaines transformations des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.	90
[J 4 d]	Cotton (E.). — Généralisation de la théorie du trièdre mobile.....	42
[D 1 a]	Denjoy (A.). — Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles.....	98
[L ¹ 17 d, K 14 g]	Fontené (G.). — Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre un .	115
[R 1 d x]	Fouché (M.). — Sur la déviation des graves et les champs de force.....	130

		Pages.
[H 9 h z]	Goursat (E.). — Sur le problème de Monge.....	201
[J 3 c]	Hadamard (J.). — Sur quelques questions de calcul des variations.....	73
[D 6 i β]	Landau (E.). — Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann	229
[D 3 b α]	Landau (E.). — Sur quelques théorèmes de M. Petrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques.....	251
[K 7 a]	Lucas (F.). — Sur la généralisation du rapport anharmonique.....	225
[S 3]	Maillet (Ed.). — Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés	2
[H 1 a, S 3 a β]	Maillet (Ed.). — Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; application à un système hydraulique de n réservoirs	129
[O 6 a z]	Montcheull (M. de). — Détermination des surfaces de révolution admettant une surface de révolution donnée pour surface moyenne.....	17
[O 5 n]	Montcheull (M. de). — Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$	170
[A 3 g]	Montessus (R. de). — La résolution numérique des équations.....	26
[D 5 d]	Rémoundos (G.). — Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes.....	191
[J 4 a]	Séguier (J. de). — Sur certains groupes d'ordre $p^m q^n$	242
[R 1 d α]	Sparre (M. de). — Note au sujet des mouvements à la surface de la Terre.....	65
[R 1 d z]	Sparre (M. de). — Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre.....	146
[R 8 g]	Suchar (P.-J.). — Sur une transformation réciproque en Mécanique.....	210
[A 4 e]	Weill (M.). — Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux	82

CORRESPONDANCE.

[J 5]	Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue. — Sur la théorie des ensembles	261
[O 2 a]	Lebesgue (H.). — Sur le problème des aires.....	273

Table des matières du Tome XXXIII.....	275
--	-----

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXIII.

EXTRAIT DES STATUTS ET DU RÈGLEMENT.

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et ses publications. Elle a son siège à Paris.

La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

La Société publie par livraisons un Recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I^{re} PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leur développement en séries*; 1886..... 15 fr.

II^e PARTIE : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géométrie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888..... 20 fr.

III^e PARTIE : *Fragments. (Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5^e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.)* Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891..... 8 fr. 50 c.

TABLE DES MATIÈRES

(FASCICULE 4).

	Pages.
Comptes rendus des séances.....	225
[K7a] LUCAS (FÉLIX). — Sur la généralisation du rapport anharmonique.....	225
[D613] LANDAU (E.). — Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.....	229
[J4a] DE SÉGUIER (J.). — Sur certains groupes d'ordre $p^m q^n$	242
[D3bx] LANDAU (E.). — Sur quelques théorèmes de M. Petrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques.....	251
Correspondance.....	261
Table des matières du Tome XXXIII.....	275

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

LÉVY (Lucien), Examinateur d'admission et Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique. — *Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, avec Tables numériques et applications.* Grand in-8, avec figures; 1898..... 7 fr. 50 c.

LÉVY (Maurice), Membre de l'Institut, Inspecteur général des Ponts et Chaussées, Professeur au Collège de France. — *Leçons sur la Théorie des marées, professées au Collège de France. Théories élémentaires. Formules pratiques de la prévision des marées.* Un volume in-4, avec figures; 1898..... 14 fr.

RAFFY (L.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse. Éléments de la théorie des courbes et des surfaces.* Grand in-8, avec figures; 1897..... 7 fr. 50 c.

